

*Pricop Ioan*

A. I. NEKRASOV

CURS  
DE  
MECANICĂ  
TEORETICĂ

1

EDITURA TEHNICĂ



A. I. NEKRASOV

CURS DE  
MECANICĂ TEORETICĂ

vol. I

Statica și cinematica

Traducere din limba rusă



EDITURA TEHNICĂ  
1955



## TABLA DE MATERII

Prefață la ediția a patra . . . . .	8
Prefață la ediția a cincea . . . . .	8
Introducere . . . . .	9

### STATICA

#### CAPITOLUL I

##### Forța ca vector

§ 1. Solid și rigid și punct material . . . . .	19
§ 2. Direcția, sensul și mărimea forțelor . . . . .	21
§ 3. Paralelogramul și poligonul forțelor . . . . .	23
§ 4. Definiția mărimilor scalare și vectoriale . . . . .	28
§ 5. Proiecția unui vector pe o axă . . . . .	30
§ 6. Adunarea și scăderea vectorilor . . . . .	33
§ 7. Reprezentarea vectorială și analitică a forțelor . . . . .	37
§ 8. Exemple . . . . .	40

#### CAPITOLUL II

##### Momentul unei forțe și produsul vectorial

§ 9. Bazele fizice ale introducerii momentului forței . . . . .	42
§ 10. Momentul unei forțe în raport cu un punct. . . . .	44
§ 11. Momentul unei forțe în raport cu o axă . . . . .	47
§ 12. Produsul vectorial . . . . .	49
§ 13. Momentul unei forțe ca produs vectorial . . . . .	55
§ 14. Exemple . . . . .	59

#### CAPITOLUL III

##### Legături și reacțiuni. Produs scalar

§ 15. Despre diferitele tipuri de forțe . . . . .	61
§ 16. Legăturile și reacțiunile introduse de ele . . . . .	61
§ 17. Problema de bază a staticii . . . . .	65
§ 18. Produsul scalar. . . . .	66
§ 19. Exemple . . . . .	70



## CAPITOLUL IV

## Forțe concurente

§ 20. Rezultanta și echilibrul unui sistem de forțe concurente . . . . .	72
§ 21. Teorema lui Varignon . . . . .	74
§ 22. Exemple . . . . .	76

## CAPITOLUL V

## Reducerea forțelor paralele

§ 23. Forțele paralele dirijate în același sens . . . . .	83
§ 24. Cazul general al forțelor paralele . . . . .	92
§ 25. Variația momentului resultant al forțelor paralele. Momentul cuplului . . . . .	98
§ 26. Exemple . . . . .	100

## CAPITOLUL VI

## Centre de greutate

§ 27. Definiții generale . . . . .	106
§ 28. Centrul de greutate și centrul maselor . . . . .	108
§ 29. Metode practice de determinare a coordonatelor centrului maselor . . . . .	112
§ 30. Cele mai simple cazuri de determinare a centrului de greutate . . . . .	115
§ 31. Teoremele lui Guldin . . . . .	121
§ 32. Exemple . . . . .	124

## CAPITOLUL VII

## Echilibrul forțelor paralele

§ 33. Ecuațiile de echilibru . . . . .	130
§ 34. Exemple . . . . .	132

## CAPITOLUL VIII

## Teoria cuplurilor

§ 35. Echivalența cuplurilor . . . . .	136
§ 36. Compunerea cuplurilor . . . . .	140
§ 37. Aparatul lui Tepler . . . . .	142
§ 38. Exemple . . . . .	144

## CAPITOLUL IX

## Sistem de forțe în plan

§ 39. Reducerea unui sistem de forțe în plan la cel mai simplu sistem . . . . .	146
§ 40. Echilibrul unui sistem de forțe în plan . . . . .	150
§ 41. Moment de stabilitate și moment de răsturnare . . . . .	153
§ 42. Exemple . . . . .	154



## CAPITOLUL X

### Frecarea

§ 43.	Frecarea de aderență și frecarea de alunecare . . . . .	158
§ 44.	Frecarea de rostogolire . . . . .	162
§ 45.	Frecarea de pivotare . . . . .	164
§ 46.	Exemple . . . . .	165

## CAPITOLUL XI

### Sistem arbitrar de forțe

§ 47.	Metoda vectorială de reducere a unui sistem de forțe la cel mai simplu sistem . . . . .	170
§ 48.	Metoda analitică de reducere a unui sistem de forțe la cel mai simplu sistem . . . . .	174
§ 49.	Echilibrul unui sistem arbitrar de forțe . . . . .	178
§ 50.	Exemple . . . . .	182

## CAPITOLUL XII

### Cazuri particulare

§ 51.	Determinarea forțelor interioare. . . . .	188
§ 52.	Echilibrul unui sistem de solide. . . . .	190
§ 53.	Principiul lui Torricelli . . . . .	193

## STATICA GRAFICĂ

## CAPITOLUL XIII

### Poligon funicular

§ 54.	Importanța staticii grafice. Poligon funicular . . . . .	197
§ 55.	Reprezentarea grafică a momentelor . . . . .	207
§ 56.	Determinarea grafică a momentului de inerție al unei figuri plane . . . . .	213

## CAPITOLUL XIV

### Aplicații ale metodelor grafice în statică

§ 57.	Centrul de greutate . . . . .	215
§ 58.	Grinda pe două reazeme . . . . .	217

## CAPITOLUL XV

### Grinzi cu zăbrele

§ 59.	Generalități . . . . .	228
§ 60.	Metoda lui Ritter . . . . .	231
§ 61.	Metoda lui Culman . . . . .	232
§ 62.	Metoda Cremona-Maxwell . . . . .	235



## CINEMATICA

## CAPITOLUL XVI

## Viteza unui punct

§ 63.	Sisteme de referință . . . . .	243
§ 64.	Ecuațiile mișcării și traiectoria unui punct . . . . .	244
§ 65.	Derivata unui vector în raport cu un scalar . . . . .	254
§ 66.	Determinarea vitezei unui punct . . . . .	258
§ 67.	Viteza punctului în coordonate ortogonale și polare . . . . .	263
§ 68.	Viteză areolară . . . . .	270
§ 69.	Exemple . . . . .	275

## CAPITOLUL XVII

## Accelerația unui punct

§ 70.	Determinarea accelerației unui punct . . . . .	282
§ 71.	Accelerația unui punct în coordonate ortogonale și în coordonate polare în plan . . . . .	286
§ 72.	Proiecțiile accelerației unui punct pe triedrul fundamental . . . . .	289
§ 73.	Accelerația punctului în mișcare circulară . . . . .	293
§ 74.	Dimensiunile mărimilor mecanice . . . . .	294
§ 75.	Exemple . . . . .	299

## CAPITOLUL XVIII

## Mișcarea de translație a unui solid și mișcarea lui de rotație în jurul unei axe fixe

§ 76.	Mișcarea de translație a solidului . . . . .	303
§ 77.	Vitezele unghiulare și liniare ale punctelor unui solid, care se rotește în jurul unei axe fixe . . . . .	305
§ 78.	Proiecțiile vitezelor punctelor unui solid, care se rotește în jurul unei axe fixe . . . . .	309
§ 79.	Accelerațiile punctelor unui solid, care se rotește în jurul unei axe fixe . . . . .	313
§ 80.	Exemple . . . . .	318

## CAPITOLUL XIX

## Mișcarea plan paralelă a solidului

§ 81.	Studiul geometric al deplasărilor solidului în mișcarea plan paralelă . . . . .	322
§ 82.	Studiul analitic al mișcării plan paralele a solidului. Viteza . . . . .	333
§ 83.	Studiul analitic al mișcării plan paralele a solidului. Accelerația . . . . .	343
§ 84.	Aplicații . . . . .	347
§ 85.	Exemple . . . . .	355



## CAPITOLUL XX

### Mișcarea de rotație a solidului în jurul unui punct fix

§ 86.	Studiul geometric al rotației solidului în jurul unui punct fix .	364
§ 87.	Studiul analitic al rotației solidului rigid în jurul unui punct fix. Viteza . . . . .	369
§ 88.	Studiul analitic al rotației solidului în jurul unui punct fix. Accelerația . . . . .	373
§ 89.	Exemple . . . . .	376

## CAPITOLUL XXI

### Cumpunerea vitezelor unghiulare. Reducerea vitezelor unghiulare și de translație, la cel mai simplu sistem

§ 90.	Viteza unghiulară ca vector alunecător . . . . .	378
§ 91.	Compunerea vitezelor unghiulare concurente . . . . .	379
§ 92.	Compunerea vitezelor unghiulare paralele. Cuplu de viteze unghiulare . . . . .	380
§ 93.	Observații asupra rotațiilor finite . . . . .	385
§ 94.	Reducerea vitezei unghiulare și a vitezei de translație perpendiculară pe ea, la o singură viteză unghiulară . . . . .	387
§ 95.	Reducerea la cel mai simplu sistem a sistemului format dintr-o viteză unghiulară și o viteză de translație cu direcții arbitrare . . . . .	389
§ 96.	Reducerea unui sistem de viteze unghiulare și de translație, dirijate arbitrar, la cel mai simplu sistem . . . . .	390
§ 97.	Exemple . . . . .	395

## CAPITOLUL XXII

### Cazul general de mișcare a solidului liber

§ 98.	Studiul geometric al mișcării solidului liber . . . . .	399
§ 99.	Studiul analitic al mișcării solidului liber . . . . .	401
§ 100.	Exemple . . . . .	406

## CAPITOLUL XXIII

### Viteza și accelerația unui punct în mișcare relativă Axe mobile de coordonate

§ 101.	Observații generale. . . . .	409
§ 102.	Viteza unui punct în mișcare absolută . . . . .	410
§ 103.	Accelerația unui punct în mișcare absolută . . . . .	413
§ 104.	Folosirea axelor de coordonate, invariabil legate cu pământul . . . . .	419
§ 105.	Exemple . . . . .	426
Anexă	. . . . .	431
Indice alfabetic . . . . .	. . . . .	435



## PREFAȚĂ LA EDIȚIA A PATRA

Ediția a patra a „Cursului de mecanică teoretică” reprezintă reproducerea cu mari modificări a ediției a treia. Astfel, în ediția a patra s-au corectat erorile care s-au strecurat în ediția precedentă, s-au introdus numeroase precizări, clarificări, completări și s-a mărit numărul exemplelor. Exemplele au fost culese cu litere mai mici și s-a introdus pentru ele o numerotație generală. Cursul este precedat de o introducere scrisă special pentru noua ediție. La pregătirea noii ediții au fost consultate în special lucrările sovietice de mecanică teoretică.

## PREFAȚĂ LA EDIȚIA A CINCEA

Ediția a cincea a fost retipărită după ediția a patra fără modificări, cu excepția corectării erorilor și a precizării unor formulări.



## INTRODUCERE

Mecanica este știința despre mișcări și forțe. Ambele noțiuni — atât mișcarea cât și forța — impun lămuriri care vor fi date aici, la începutul studiului mecanicii, în măsura în care aceasta este necesar.

Printre diferitele forme ale mișcării materiei, mecanica se ocupă cu forma cea mai simplă a mișcării, care constă din schimbarea poziției reciproce a corpurilor sau a unor părți din corp, una față de alta, în decursul timpului. Asemenea mișcare se numește mișcare mecanică.

Deși noțiunea de forță pare ceva obișnuit și cuvântul „forță” îl folosim frecvent în vorbirea curentă, totuși, stabilirea sensului precis al acestei noțiuni, nu este un lucru simplu. Observațiile și experiența dovedesc că corpurile acționează mecanic unul asupra celuilalt; se modifică sau mișcarea corpurilor, sau se produc deformări ale acestor corpuri. De multe ori nu știm care este, din punct de vedere fizic, esența acestei acțiuni reciproce a corpurilor, dar, fără să ne atingem de esența fizică a acestei acțiuni mecanice, îi atribuim numele de forță. Noțiunea de forță este foarte folositoare pentru mecanică, deoarece învățând să măsurăm forțele, sîntem în stare să determinăm cauza acțiunii exterioare și mărimea ei.

Chiar din definiția mișcării mecanice rezultă că se poate vorbi de mișcarea corpului pe care îl studiem, numai în raport cu un alt corp. Studiind mișcarea corpurilor materiale, noi raportăm poziția lor la un corp oarecare dat, de exemplu în raport cu pămîntul sau în raport cu obiecte direct legate de el. Corpul în raport cu care se examinează mișcarea studiată se numește sistem de referință. De obicei, pentru ușurința determinării poziției obiectului material în mișcare, unui asemenea corp i se atașează un anumit sistem de coordonate, invariabil, pe care de asemenea îl numim sistem de referință.

Newton (1642—1727), formulînd pentru întâia oară așa-numitele legi fundamentale sau axiome ale mecanicii, presupunea



existența spațiului absolut imobil, deci a unui sistem de referință absolut imobil și a timpului absolut, cu ajutorul cărora este posibilă stabilirea mișcării absolute, și, cu ajutorul cărora Newton a stabilit legile sale despre mișcare.

Știința modernă nu recunoaște spațiul absolut imobil. Vorbind despre mișcare, de fiecare dată trebuie să se indice acel sistem de referință în raport cu care este determinată mișcarea, fără de care noțiunea de „mișcare” și, în particular, de „repaus” este lipsită de conținut. Totuși, dintre toate sistemele de referință posibile, putem alege pe acelea pentru care sînt valabile, cel puțin cu aproximație, legile fundamentale ale lui Newton. Cum se aleg aceste sisteme, numite „inerțiale”, se va indica în partea a doua a prezentului „Curs de mecanică teoretică”. Tot acolo se va arăta că pentru studiul multor fenomene mecanice se poate lua fără erori sensibile, ca sistem inerțial, orice sistem de axe de coordonate, legat direct de suprafața pămîntului.

Legile fundamentale ale mecanicii stabilite de Newton, au fost considerate valabile timp de un secol și jumătate, pînă cînd s-a descoperit, la mijlocul secolului trecut, că interacțiunile polilor magnetici cu curenții electrici duc la forțe care nu se supun legilor lui Newton. Atunci, pentru studiul acestui fel de interacțiune, a fost creată o știință nouă, anume „electrodinamica”.

După aceasta, pînă la sfîrșitul secolului trecut, nu a fost nici o îndoială că mecanica lui Newton sau „mecanica clasică” este aplicabilă la mișcarea mecanică a oricărui corp material, deși se știe că mărimea deplasării periheliului orbitei planetei Mercur, egală aproximativ cu trei sferturi de minut la un secol, este inexplicabilă. Pe la începutul acestui secol, s-au observat și alte fenomene care nu se puteau explica folosind mecanica clasică.

Aceste nepotriviri între teorie și observații au dus la crearea „mecanicii relativiste restrînse” care s-a dovedit a fi în stare de a explica mai multe fenomene decît mecanica clasică. Totuși, gravitația universală continua să rămînă tot așa de enigmatică cum era și pentru savanții care trăiseră cu două secole în urmă. Ce e drept, în decursul timpului s-a obișnuit ca prin cuvintele „acțiunea la distanță”, să se înlocuiască explicarea esenței fizice a acestei forțe. Pentru explicarea gravitației universale, a fost generalizată mecanica relativistă restrînsă și creată „mecanica relativistă generalizată”, cu ajutorul căreia s-a reușit să se explice esența gravitației și în același timp și deplasarea indicată



mai sus a periheliului planetei Mercur. Mecanica relativistă renunță la noțiunile lui Newton despre spațiu și timp și le înlocuiește cu altele depărtate mult de sensul cu care sîntem obișnuiți. Totuși, această înlocuire se face observată pentru viteze foarte mari ale corpurilor; pentru vitezele obișnuite ale corpurilor, care sînt o fracțiune mică din viteza luminii, diferența dintre rezultatele folosirii noțiunilor lui Newton despre spațiu și timp și a noțiunilor relativiste despre spațiu și timp, este practic neglijabilă.

Studiul fenomenelor de radioactivitate a dus la descoperirea că atomii au o structură complicată, iar încercările de a folosi mecanica clasică la studiul mișcării particulelor din care sînt compuși atomii, de exemplu la studiul mișcării electronilor, s-au soldat cu insuccese. Pentru explicarea acestei mișcări a fost creată în jurul anului 1930 o știință nouă „mecanica cuantică” și „mecanica ondulatorie”, care a făcut posibilă studierea mișcărilor din interiorul atomului. Legile mecanicii cuantice diferă mult de legile mecanicii clasice.

Vedem că în locul mecanicii clasice unice, despre care se credea în secolul al XVIII-lea că este în stare să explice toate fenomenele, avem deja în mijlocul secolului al XX-lea, patru mecanici: clasică, relativistă restrînsă, relativistă generalizată și cuantică. Dar, deoarece rezultatele mecanicii clasice sînt în general aplicabile, iar în condițiile practice de pe pămînt sînt totdeauna aplicabile la toate cazurile mișcării mecanice a corpurilor microscopice (inclusiv cele pînă la dimensiunile moleculelor) cu viteze mici în comparație cu viteza luminii, rezultă că studiul mecanicii clasice teoretice este necesar.

Totuși, nu se poate afirma că în prezent s-a ajuns la limită în domeniul mecanicii și că în viitor nu se va cere o lărgire ulterioară și stabilirea de noi puncte de vedere. În cartea sa „Materialism și empiriocriticism” (Opere, ed. 4, vol. 14 pag. 248) V. I. Lenin scria:

„Materialismul dialectic insistă însă asupra caracterului aproximativ, relativ, al oricărei teze științifice asupra structurii materiei și a însușirilor ei, asupra inexistenței unor hotare absolute în natură, asupra transformării materiei în mișcare dintr-o stare în alta, incompatibilă pe cît se pare, din punctul nostru de vedere, cu cea dintîi etc. oricît de ciudată ar fi, din punctul de vedere al „bunului simț”, transformarea eterului imponderabil în materie ponderabilă și, invers, oricît de „stranie” ar părea absența la electron a oricărei alte mase în afară de cea



electromagnetică, oricît de neobișnuită ar părea limitarea legilor mecanice ale mișcării numai la domeniul fenomenelor naturii și subordonarea lor unor legi mai profunde ale fenomenelor electromagnetice etc., — toate acestea nu fac decît să aducă încă o confirmare a materialismului dialectic<sup>1</sup>.

Prezentul „Curs de mecanică teoretică” este exclusiv un curs de mecanică clasică.

Mecanica se poate împărți în trei părți: cinematica, dinamica și statica.

*Cinematica* studiază mișcarea corpurilor materiale din punct de vedere geometric, independent de cauzele care o provoacă și o modifică. Fără a apela la noțiunile de forță și de masă și considerînd mișcarea corpurilor ca fiind dată, cinematica examinează dependența de timp a coordonatelor punctelor unui corp, a vitezelor și a accelerațiilor lor, de asemenea și problema transformării acestor mărimi prin trecerea de la un sistem de referință la altul.

*Dinamica* studiază mișcările mecanice ale corpurilor în funcție de forțele care acționează asupra lor.

*Statica* se ocupă de cazul particular al dinamicii: cazul echilibrului corpurilor, adică acel caz cînd acțiunile forțelor se anulează reciproc.

Menționăm că această împărțire a mecanicii este convențională, deoarece nu se poate stabili o limită clară între fenomenele care se referă la fiecare dintre aceste părți. Vom menține totuși această împărțire, deoarece ea înlesnește înțelegerea mecanicii. Prezentul „Curs de mecanică teoretică” este împărțit în trei părți: statica, cinematica și dinamica; această ordine a părților este comodă din două motive.

În primul rînd, datorită acestei succesiuni este înlesnită începerea studiului mecanicii, deoarece pentru înțelegerea staticii se cere, afară de matematica elementară numai cîteva noțiuni de geometrie analitică. Începînd studiul cinematicii, studentul trebuie să cunoască elemente de calcul diferențial și numai pentru aprofundarea dinamicii se cer cunoștințe de calcul integral și de integrarea ecuațiilor diferențiale.

Al doilea motiv care ne obligă să începem cursul de mecanică în școlile tehnice superioare cu statica, constă în faptul că o astfel de ordine de expunere ne dă posibilitatea de a trece mai

<sup>1</sup> V. I. Lenin, Opere, vol. 14, Ed. de Stat pentru literatură politică, București, 1954, p. 255.



devreme la studiul științelor aplicate, care se bazează în mare măsură pe statică.

Din punct de vedere principial, ar fi mai just să se înceapă studiul mecanicii cu cinematica, deoarece expunerea ar câștiga astfel din punct de vedere al înlănțuirii logice. Astfel, de exemplu, în această ordine ar fi trebuit împărțită statica în două părți interpunând între ele cinematica, avînd în vedere că partea a doua a staticii impune cunoașterea cinematicii. Totuși, considerentele practice expuse mai înainte ne obligă să începem „Cursul de mecanică teoretică” cu statica, în dauna rigurozității expunerii și a logicii în desfășurarea materiei acestui curs.

Toate corpurile din natură ne sînt cunoscute, sub trei stări de agregare: solidă, lichidă și gazoasă; în conformitate cu aceasta și mecanica se împarte în mecanica solidelor, mecanica lichidelor sau hidromecanica și mecanica gazelor, în special a aerului sau aeromecanica. Mecanica teoretică, în scopul construirii unei teorii care să aproximeze mișcarea corpurilor reale, utilizează o serie de modele abstracte care reflectă acele proprietăți ale corpurilor reale care joacă un rol hotărîtor în fenomenele studiate. Deoarece deformările solidelor sub acțiunea forțelor sînt în multe cazuri mici, este natural să se examineze în mecanică *solidele perfect rigide* adică astfel de corpuri la care acțiunea forțelor nu provoacă nici un fel de deformări. De multe ori și dimensiunile geometrice ale corpului considerat pot fi neglijate într-o problemă oarecare în comparație cu alte dimensiuni care intervin în problemă. De aceea este natural să se studieze în mecanică, *punctele materiale*, adică corpurile a căror poziție este determinată printr-un punct geometric și care au proprietatea de a avea în același timp o anumită masă. În hidromecanică se consideră de multe ori lichidul ca fiind lipsit de coeziune și fără frecări interioare, adică fără viscozitate. De astfel de modele abstracte se servește mecanica teoretică. Mecanica teoretică stă în fruntea celorlalte discipline mecanice, pentru că în ea se cunosc și se cercetează în modul cel mai general și pur, regulile mișcării mecanice; de aceea științele mecanice aplicate, ca: rezistența materialelor, teoria mecanismelor și a mașinilor etc., se bazează continuu pe rezultatele și metodele mecanicii teoretice.

Mecanica pornește de la o serie de axiome și principii, adică adevăruri care au fost obținute ca rezultat al generalizării experienței întregii omeniri în decursul existenței sale. Justețea acestor axiome și principii se constată continuu în practică în domeniile corespunzătoare fenomenelor reale. La aceasta este necesar



să se mai adauge rezultatele care se obțin pe cale experimentală pentru probleme izolate. Ultimele rezultate sînt totdeauna necesare pentru disciplinele mecanicii aplicate. Pe baza axiomelor și principiilor, conținutul mecanicii teoretice se dezvoltă pe cale matematică. Dar, deși mecanica teoretică folosește în mare măsură metodele matematice de cercetare, este necesar totuși a înțelege clar că mecanica teoretică este una dintre științele despre natură, că ea apare ca o știință a naturii, deși este cea mai abstractă dintre toate științele naturii.

Deducțiile mecanicii teoretice depind de justetea ipotezelor pe care ele se sprijină, pentru că numai dacă ipotezele sînt reale, deducțiile matematice nu pot introduce greșeli. În cazul cînd se observă nepotriviri între rezultatele calculelor și rezultatele experimentale, trebuie analizate ipotezele admise.

În ceea ce privește metoda matematică de expunere a mecanicii teoretice, la baza prezentului „Curs de mecanică teoretică” se folosește metoda vectorială deoarece o întreagă serie de noțiuni introduse în mecanică: forța, momentul unei forțe, momentul unui cuplu, viteza liniară, viteza unghiulară etc., sînt vectori. De fapt calculul vectorial a apărut ca rezultat al studiului proprietăților matematice ale mărimilor mecanice menționate mai sus. Domeniul reprezentărilor mărimilor mecanice prin vectori a fost lărgit prin adăugarea unei întregi serii de mărimi din studiul electricității. Toate operațiile fundamentale cu vectorii au apărut ca rezultat al analizei și al generalizării operațiilor cu mărimile respective mecanice și electrice. De aceea expunerea vectorială în mecanica teoretică apare ca normală și totodată ea permite să se descopere mai ușor unitatea matematică în diferite date mecano-matematice din diferitele secțiuni ale mecanicii teoretice. Astfel, de exemplu, este suficient ca cineva să știe ce este un produs vectorial și să știe că unele mărimi din mecanica teoretică sînt produse vectoriale, ca el singur să deducă aproape direct proprietățile fundamentale ale acestor mărimi mecanice și să obțină teoremele fundamentale referitoare la ele. În acest fel, introducerea vectorilor în mecanica teoretică ușurează memorarea proprietăților noțiunilor mecanice introduse și fixează în memorie aspectul lor geometric, permite să se înțeleagă ușor unitatea matematică în diferitele secțiuni ale mecanicii teoretice, ușurează și simplifică concluziile; simplifică expresiile literare ale formulelor; înlesnește memorarea formulelor și exprimarea lor; face ca deducțiile să fie independente de axele de coordonate adoptate



Monumentele istorice rămase pînă în vremurile noastre, arată că izvoarele cunoștințelor mecanice trebuie căutate în antichitate. Acumularea cunoștințelor mecanice izolate în procesul activității economice și industriale a omului a început cu mult înaintea apariției oricărei teorii.

Dar, încă în antichitate, afară de acumularea de observații, se tindea la explicarea acestor observații pe baze teoretice; astfel, lui Arhimede îi aparține demonstrația, care nu a pierdut din interes nici în prezent, a regulii pîrghiei. Statica apărută în acest fel se consideră ca o parte a fizicii. Apariția dinamicii corespunde deja cu începuturile timpurilor moderne, cînd soluționarea problemelor dinamice s-a dovedit a fi necesară pentru practică, și, în același timp, s-a înțeles că la cercetarea naturii nu ne putem mulțumi numai cu raționamente abstracte, cum se făcea de obicei în antichitate, ci se impune a păși la observații sistematice și la experiențe. Fondatorii dinamicii au fost Galileu (1564—1642) și mai ales Newton, care a trăit puțin mai tîrziu, creatorul mecanicii clasice moderne sau newtoniene (*Principiile matematice ale filozofiei naturii*, 1686). După Newton, succesul în dezvoltarea mecanicii teoretice depindea mai ales de aplicarea în mecanică a matematicii și în special a analizei.

În legătură cu aceasta trebuie amintit în primul rînd numele lui Euler (1707—1788) (*„Mecanica sau știința despre mișcare expusă analitic“*, 1736), al lui Lagrange (1736—1818). Opera lui Lagrange denumită de el, *„Mecanica analitică“* (1788) și menținută într-un caracter pur analitic, a exercitat o influență puternică asupra întregii dezvoltări a mecanicii din secolul al XIX-lea. În urma lui au fost parcă uitate bazele fizice ale mecanicii teoretice și întreaga mecanică teoretică a fost considerată drept matematică aplicată; de altfel, pe această cale s-au obținut rezultate foarte importante. În Rusia, în universități, se folosea în locul denumirii de „mecanică teoretică“ chiar pe atunci denumirea de „matematică aplicată“. Dar, din primul pătrar al secolului al XX-lea, mecanica teoretică își reia din nou importanța ca știință despre natură; aceasta a devenit deosebit de clar, mai ales după crearea mecanicii relativiste și a mecanicii cuantice. În acest fel, statica a apărut în antichitate, dinamica a apărut în ultimul pătrar al secolului al XVII-lea, cinematica însă, ca o parte independentă a mecanicii teoretice, s-a creat de-abia în prima jumătate a secolului al XIX-lea, iar la aceasta a contribuit mult chiar cerința crescîndă de studiere a mișcării mecanismelor și mașinilor.



Uniunea Sovietică a adus contribuții prețioase în crearea și dezvoltarea diferitelor discipline mecanice. Contribuțiile U.R.S.S. sînt foarte mari mai ales în hidromecanică și aeromecanică. Contribuțiile U.R.S.S. în mecanica teoretică generală sînt de asemenea mari. Primul creator al mecanicii teoretice, a fost în Rusia Euler, care a trăit la Petersburg unde a și murit, timp de 31 de ani. Cartea lui, pomenită mai înainte, „Mecanica sau știința despre mișcare, expusă analitic“, a fost scrisă și editată la Petersburg. Ea a influențat mult dezvoltarea mecanicii teoretice pe cale analitică; ea l-a influențat și pe Lagrange. O serie întreagă de rezultate esențiale în dezvoltarea mecanicii teoretice pe cale analitică aparțin academicianului Mihail Vasilievici Ostrogradski (1801—1851); din școala lui Ostrogradski fac parte mulți savanți mecanicieni renumiți din Rusia. Ostrogradski a elaborat principiul variațional al dinamicii, care se mai numește și principiul Ostrogradski-Hamilton, deoarece independent de Ostrogradski și într-o formă mai puțin generală, el a fost elaborat simultan și de către englezul Hamilton. Pentru dezvoltarea teoriei analitice a mecanismelor au avut o importanță mare lucrările renumitului savant rus academicianul Pafnutie Lvovici Cebîșev (1821—1894). Dintre cele trei cazuri cunoscute, cînd mișcarea unui solid în jurul unui punct fix se poate studia analitic pînă la capăt, unul a fost elaborat în Rusia (1888) cazul Sofia Vasilievna Kovalevskaja (1850—1891). Lucrările lui Aleksandr Mihailovici Leapunov (1857—1918), privind studiul stabilității mișcării („Problema generală a stabilității mișcării“, 1892), sînt pînă în prezent neîntrecute în știința universală. Nicolai Egorovici Jukovski (1847—1921), „părintele aviației ruse“, și-a creat un renume universal prin lucrările în domeniul aerodinamicii care stau la baza calculului avionului. Numeroasele lucrări ale lui N. E. Jukovski, care fac parte din cele mai variate ramuri ale mecanicii, atît ale celei teoretice cît și ale celei aplicate, au fost create de necesitățile practicii. Pentru Jukovski mecanica nu a fost un capitol al matematicii aplicate ci o știință despre natură, care deși se folosea pe scară largă de toate mijloacele matematicii, se baza pe experiență în toate stadiile dezvoltării sale. Academicianul Serghei Alexeevici Ceaplîghin (1869—1942) a lucrat mult și cu succes în domeniul aerodinamicii și hidromecanicii; în mecanica teoretică a dedus ecuațiile dinamicii pentru sisteme cu legături așa-numite neolonomice. Prof. Ivan Vsevolodovici Meșcerski (1859—1935) a fost primul care a obținut ecuația mișcării punctului cu masă



variabilă, care este în prezent de o mare importanță pentru teoria mișcării rachetelor.

Multe date prețioase și interesante despre dezvoltarea mecanicii în Uniunea Sovietică se pot găsi în cartea „Mecanica în U.R.S.S. în ultimii 30 ani”<sup>1</sup> în care se arată și evenimente importante din istoria mecanicii în Rusia, înainte de 1917.

Inginerii și cercetătorii științifici sovietici, în vederea unei activități rodnice pentru construirea comunismului în U.R.S.S., trebuie să îndeplinească cu indici calitativi înalți sarcinile ce le stau în față și să traseze căi noi pentru studiul tehnicii și științei. Incontestabil că un mare ajutor în această activitate îl vor da cunoștințele fundamentale în domeniul mecanicii teoretice, deoarece mecanica teoretică stă la baza a foarte numeroase discipline tehnice și metodele ei sînt utilizabile direct la rezolvarea diferitelor probleme tehnice.

<sup>1</sup> Gostehizdat, M.-L., 1950.

<sup>2</sup> — Mecanica teoretică, I



# STATICA

## CAPITOLUL I

### FORȚA CA VECTOR

§ 1. Solid rigid și punct material. Denumirea de statică provine de la cuvântul grecesc „stasis” care înseamnă a sta, nemișcare, repaus; prin urmare statica este știința care se ocupă cu starea de repaus a corpurilor materiale sub acțiunea unor forțe aplicate asupra lor. Raportînd poziția corpurilor materiale la sistemul inerțial de axe de coordonate amintit în introducere, vom numi *echilibru absolut*, starea de repaus a unui corp material sub acțiunea forțelor care sînt aplicate asupra lui, în raport cu sistemul inerțial de axe de coordonate.

De aceea scriind mai jos: „punct de repaus”, „axă de repaus” etc., se va înțelege mereu sub acești termeni punctul, legat invariabil de sistemul inerțial, axa, invariabil legată de sistemul inerțial etc.

Starea de repaus a unui corp material în raport cu orice alte axe de coordonate care nu sînt invariabile față de sistemul inerțial de axe ales, se numește *echilibru relativ*. În statică, vom avea de-a face numai cu echilibrul absolut al corpurilor materiale. Dar, să admitem deocamdată fără demonstrație, că legile echilibrului absolut se pot extinde în general și asupra echilibrului corpurilor materiale aflate pe suprafața pămîntului. Justificarea acestui fapt, ca și întregul studiu al echilibrului relativ, se face numai în dinamică.

Orice corp sub acțiunea forțelor ce-i sînt aplicate, fie că va rămîne în repaus, fie că va intra într-o anumită stare de mișcare, își va schimba aspectul, sau, cum se spune, *se va deforma*. Deformațiile pot fi mari și atunci ele se vor observa imediat cu ușurință, spre exemplu întinderea unui șnur de cauciuc, întinderea arcului, încovoierea unei bare metalice subțiri etc. Dar, deformațiile pot fi și puțin vizibile, astfel că ele pot fi descoperite numai cu ajutorul instrumentelor de măsurat, speciale, ca în cazul lungirii unei șine prin forțe de întindere aplicate la extremitățile ei. Studiul deformațiilor corpurilor sub acțiunea forțelor



care sînt aplicate se face în partea mecanicii denumită *teoria elasticității*, și, în partea ei aplicată — *rezistența materialelor*. În cursul general de mecanică teoretică, deformația corpurilor se neglijează de obicei introducîndu-se noțiunea de *solid rigid*, adică a unui asemenea corp, în care acțiunea forțelor nu produce nici un fel de deformații sau la care distanța dintre toate punctele rămîne neschimbată. Posibilitatea înlocuirii corpurilor reale cu solide perfect rigide se explică prin faptul că în multe cazuri deformația corpurilor poate fi neglijată fiind foarte mică. Acolo unde aceasta nu se poate face, rezultatele obținute în mecanica teoretică pot fi corectate în baza teoriei și a metodelor rezistenței materialelor și teoriei elasticității.

Afară de solidul rigid, se mai introduce în mecanica teoretică și o altă noțiune convențională, și anume în cazurile în care se pot neglija dimensiunile corpului fie în comparație cu distanțele la alte corpuri, fie în comparație cu dimensiunile celorlalte corpuri materiale care intră în studiul problemei. Așa este, de exemplu, cazul sistemului nostru solar, în care dimensiunile planetelor sînt neglijabile în comparație cu distanța lor de la soare și cu distanța dintre ele; în cazul unui bulgăre față de pămînt, în care dimensiunile bulgărelui sînt neglijabile în comparație cu dimensiunile pămîntului, sau cazul unei particule foarte mici a unui corp în comparație cu întregul corp. Atunci se presupune că întreaga masă a corpului a cărui mărime se poate neglija, se reduce la limită, la un singur punct, astfel că la limită există un punct cu o masă oarecare, finită sau infinit mică, care se numește *punct material*. În prezentul curs de mecanică teoretică se va demonstra că orice mișcare a solidului constă dintr-o mișcare de translație și o mișcare de rotație a acestui corp în jurul centrului său de greutate, iar mișcarea de translație se determină cu ajutorul mișcării centrului său de greutate, care se produce astfel ca și cînd toată masa corpului ar fi concentrată în centrul său de greutate și toate forțele care acționează asupra corpului ar fi transportate prin translație în centrul său de greutate; în acest fel, centrul de greutate al solidului poate fi privit ca un punct material cu masă egală cu masa corpului. Am folosit aici noțiunea de masă și de centru de greutate, presupunînd că aceste noțiuni ne sînt deja cunoscute din cursul de fizică elementară.

Aceste două noțiuni convenționale: *solidul rigid* și *punctul material*, înlocuiesc, în mecanica teoretică, corpurile materiale reale, ușurînd în mare măsură studiul ei. Rezultatele obținute pe



această cale, sînt în general de așa natură încît ne dau o imagine asupra stării de repaus sau de mișcare a corpurilor reale; la nevoie, aceste rezultate pot fi puse la punct prin studiul deformațiilor. Aceste precizări, completează fără să infirme rezultatele obținute în mecanica teoretică.

§ 2. Direcția, sensul și mărimea forțelor. Din experiența zilnică, omul a observat că forța are o direcție, deoarece, de

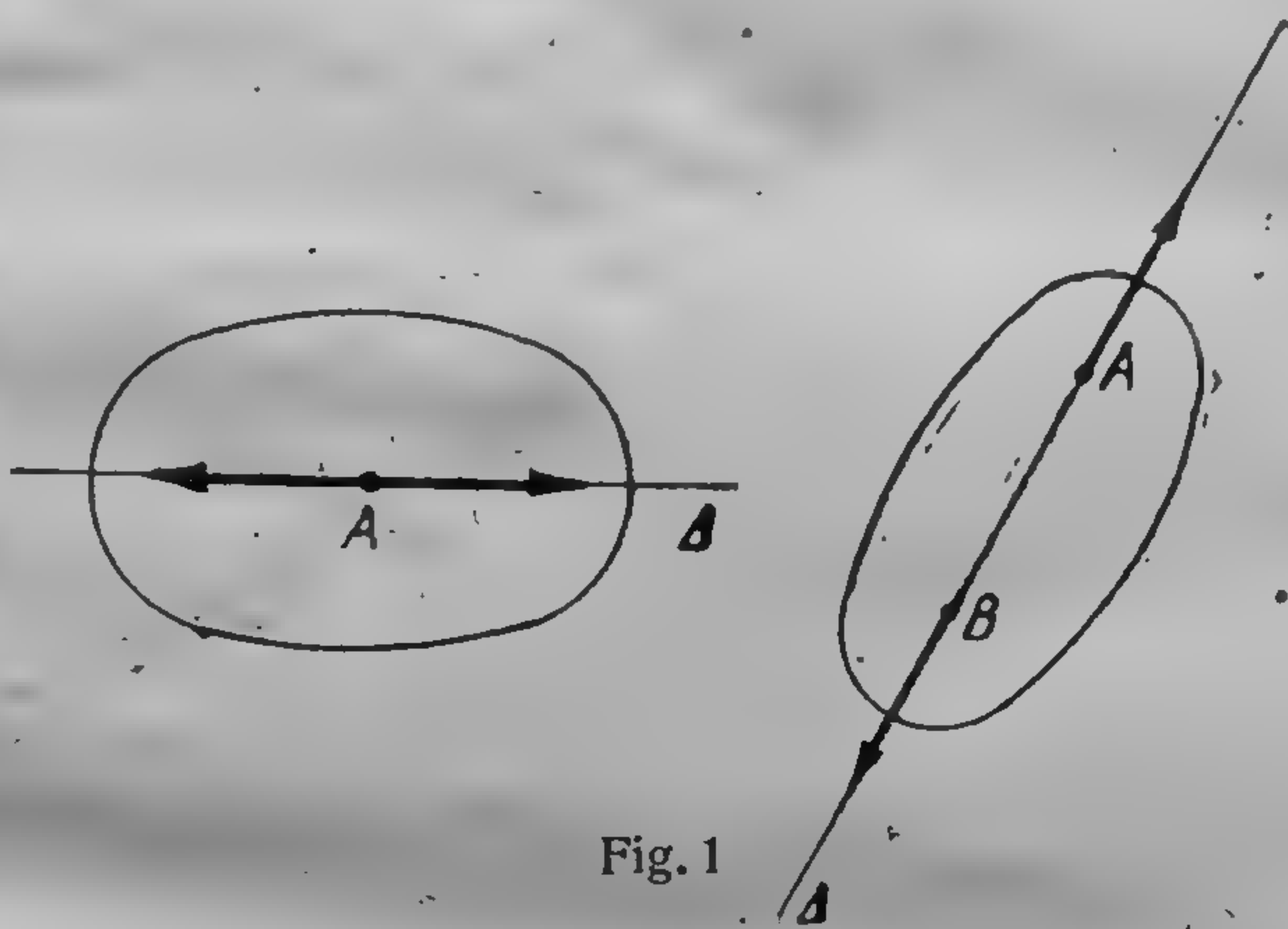


Fig. 1

exemplu, se poate trage un corp în direcția dorită, agățînd într-un punct al corpului, o sfoară de care se trage. Generalizînd și introducînd noțiuni abstracte, se poate emite ipoteza că forța este totdeauna aplicată de-a lungul unei drepte care trece printr-un anumit punct al corpului și acționează într-un anumit sens de-a lungul acestei drepte. Astfel s-au putut naște noțiunile de *suport* (*direcție de acțiune*) al forței și de *sens*.

Dacă două forțe acționînd de-a lungul unei drepte oarecare  $\Delta$  în sens opus, asupra unuia sau mai multor puncte ale solidului (fig. 1), nu schimbă starea de repaus sau de mișcare a acestuia, atunci vom spune că acele forțe sînt în *echilibru* și forțele vor fi numite *egale ca mărime*. De aici rezultă posibilitatea de a compara forțele între ele, după mărime. Fie forța AB aplicată în

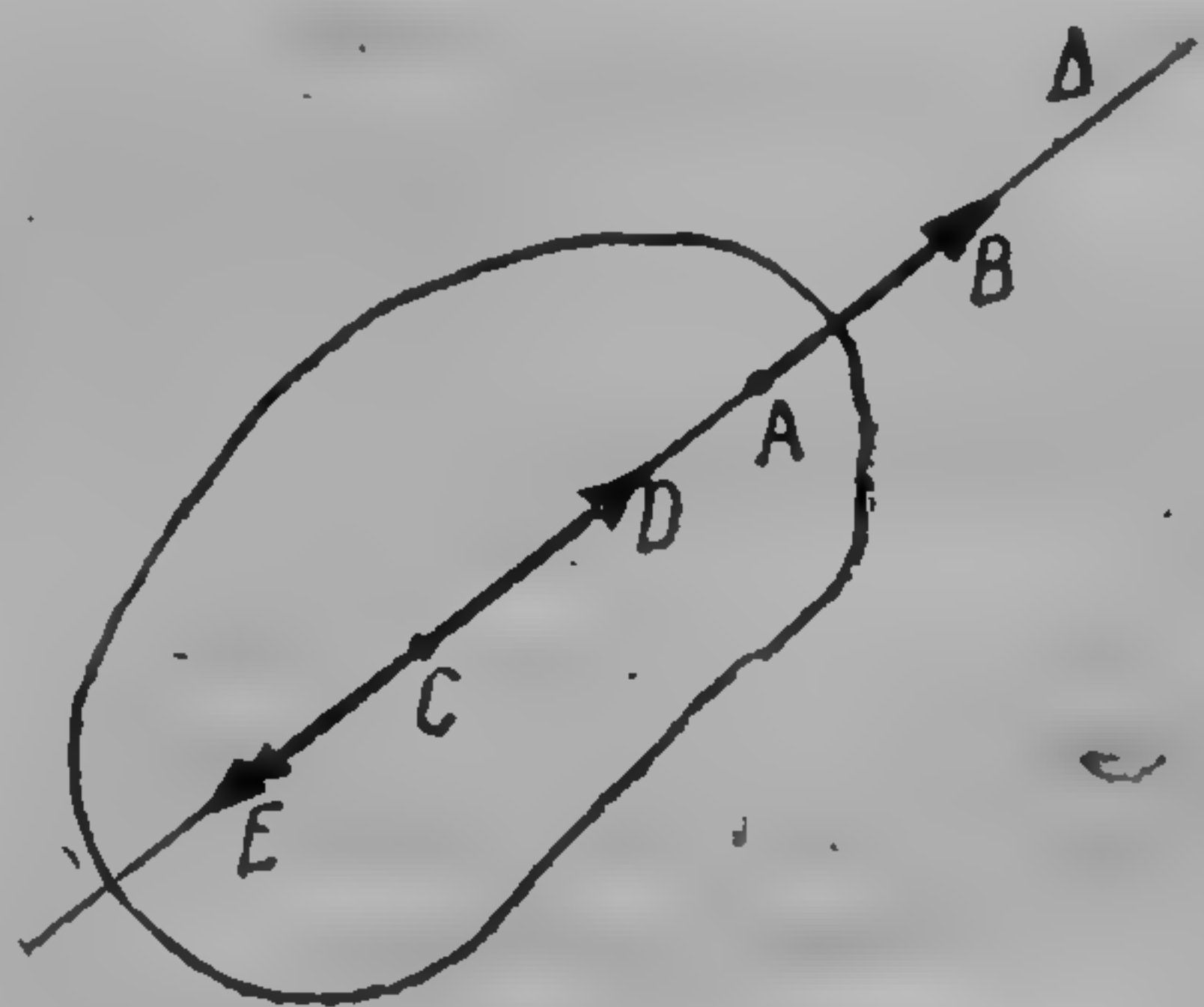


Fig. 2



punctul  $A$  al solidului și fie dreapta  $\Delta$  suportul acestei forțe (fig. 2). Într-un punct oarecare  $C$  al dreptei  $\Delta$  să aplicăm de-a lungul dreptei două forțe opuse  $CD$  și  $CE$ , egale ca mărime cu forța  $AB$ ; avem dreptul de a proceda astfel deoarece, după definiție, forțele  $CD$  și  $CE$  sînt în echilibru. Dar este evident că se poate considera după definiție că și forțele  $AB$  și  $CE$  sînt în echilibru și astfel rămîne numai o singură forță  $CD=AB$ , aplicată în punctul  $C$  al solidului, adică forța a fost mutată de-a lungul suportului ei, din punctul  $A$  în punctul  $C$ . De aici urmează că *în corpurile solide, punctul de aplicație al forței se poate muta în orice punct de pe suportul acestei forțe.*

Dacă punctul în care am mutat punctul de aplicație al forței de-a lungul suportului său, va fi situat în exteriorul solidului, atunci trebuie să presupunem că acest punct este legat cu solidul printr-o legătură imaginară perfect rigidă. De aceea, orice relație despre forțe aplicate asupra unui solid nu trebuie să fie în contradicție cu ipoteza că punctul de aplicație al forței, se poate deplasa în solid de-a lungul suportului forței. Dar din ipoteza că în solid forța se poate muta de-a lungul suportului ei, nu rezultă nici pe departe că prin aceasta se exclude însăși noțiunea de punct de aplicație al forței, în corpurile solide. Din contra, în fiecare caz în parte, forța are, în solide, un punct de aplicație precis. Astfel dacă ne imaginăm că doi oameni transportă o bară de care este atîrnată o găleată cu apă, atunci, în afară de greutatea proprie mai acționează asupra barei încă două forțe: de susținere cu mîinile predum și greutatea găleții cu apă; de altfel, primele două forțe sînt aplicate la capetele barei, unde bara este ținută cu mîinile, iar greutatea găleții cu apă este aplicată în punctul în care găleata atîrnă de bară.

Observațiile cele mai simple au determinat pe om să tragă concluzia că forța are nu numai direcție și sens ci și *mărime*. Astfel, de exemplu, fără a apela la mecanică, într-o discuție obișnuită se folosesc expresiile: a trage cu forță mare, a trage cu forță mică etc. Totuși, pentru cercetările științifice și tehnice, este necesar să se poată măsura cu precizie mărimea forței, stabilind în acest scop unități de măsură corespunzătoare.

Greutatea unui corp este o forță cu care venim mereu în contact. Să luăm un arc elicoidal vertical, îl fixăm la extremitatea de sus, iar la extremitatea de jos agățăm o sarcină și observăm alungirea arcului; dacă înlăturăm sarcina, arcul se contractă pînă la lungimea lui inițială. Dacă apoi, atîrnînd de arc o altă sarcină observăm că arcul s-a lungit tot atît cît s-a lungit și la



prima sarcină, înseamnă că greutatea ambelor sarcini sînt egale între ele, adică sînt egale între ele mărimile forțelor cu care acționează aceste sarcini asupra arcului. Atîrnarea concomitentă de arc a ambelor greutăți, va duce la o lungire dublă a arcului față de aceea rezultată din atîrnarea unei singure greutăți etc.

În acest fel se poate stabili în limite largi proporționalitatea dintre lungirea arcului și greutatea atîrnată. De aici rezultă posibilitatea construirii unui aparat cu ajutorul căruia să se poată măsura mărimea greutăților diferitelor sarcini, și, deci, și mărimea oricăror alte forțe care ar acționa asupra arcului aparatului. Un asemenea aparat este *dinamometrul cu arc*. Pentru ca măsurarea forțelor să se facă totdeauna și pretutindeni în același fel, trebuie să se aleagă pentru toate forțele, un același sistem de unități de măsură. Măsurătorile cu dinamometrul au dovedit că lungirea arcului sub acțiunea aceleiași greutăți, se micșorează puțin cînd ne îndreptăm de la poli spre ecuatorul pămîntului, de asemenea, cînd ne înălțăm deasupra scoarței pămîntului. De aceea, ca unitate practică de forță este luată mărimea greutății unui decimetru cub de apă distilată la temperatura de  $4^{\circ}\text{C}$ , la nivelul mării și la latitudinea de  $45^{\circ}$ . Vom observa că modificarea greutății acestei cantități de apă în alte locuri de pe suprafața globului este atît de neînsemnată, încît în problemele tehnice obișnuite această diferență este neglijată. Unitatea de măsură indicată a forței este *unitatea tehnică* a forței și poartă numele de *kilogram forță*. Stabilind unitatea de forță putem construi dinamometrul gradat care ne va indica valoarea oricărei forțe în kilograme forță.

Intrucît procedeul indicat aici pentru măsurarea forței se bazează pe echilibrul dintre forța aplicată și forța care se dezvoltă în arcul întins al dinamometrului, acest mod de măsurare se numește *măsurare statică*. Să observăm că acest mod de măsurare a forțelor nu se bazează pe definiția noțiunii de forță ci numai pe unele proprietăți ale forței arătate mai sus; în adevăr, încă nu ne-am ocupat de definiția propriu-zisă a forței, limitîndu-ne numai la analiza cîtorva proprietăți ale forțelor, care se manifestă în starea de echilibru. Alt mod de măsurare a forțelor cît și legătura dintre mișcare și forță, vor fi tratate de-abia în partea a treia a acestui curs de mecanică teoretică.

**§ 3. Paralelogramul și poligonul forțelor.** Să presupunem că asupra unui punct material  $A$  al unui corp acționează două forțe  $AB$  și  $AC$  cum se arată în fig. 3. Se naște întrebarea: nu s-ar putea ca cele două forțe  $AB$  și  $AC$  să fie înlocuite printr-una



singură, a cărei acțiune asupra corpului să aibă un efect identic cu efectul acțiunii forțelor  $AB$  și  $AC$ . Datorită lucrărilor lui Stevin (1548—1620) și mai ales ale lui Varignon (1654—1722) și Newton, a devenit clar că această problemă este totdeauna

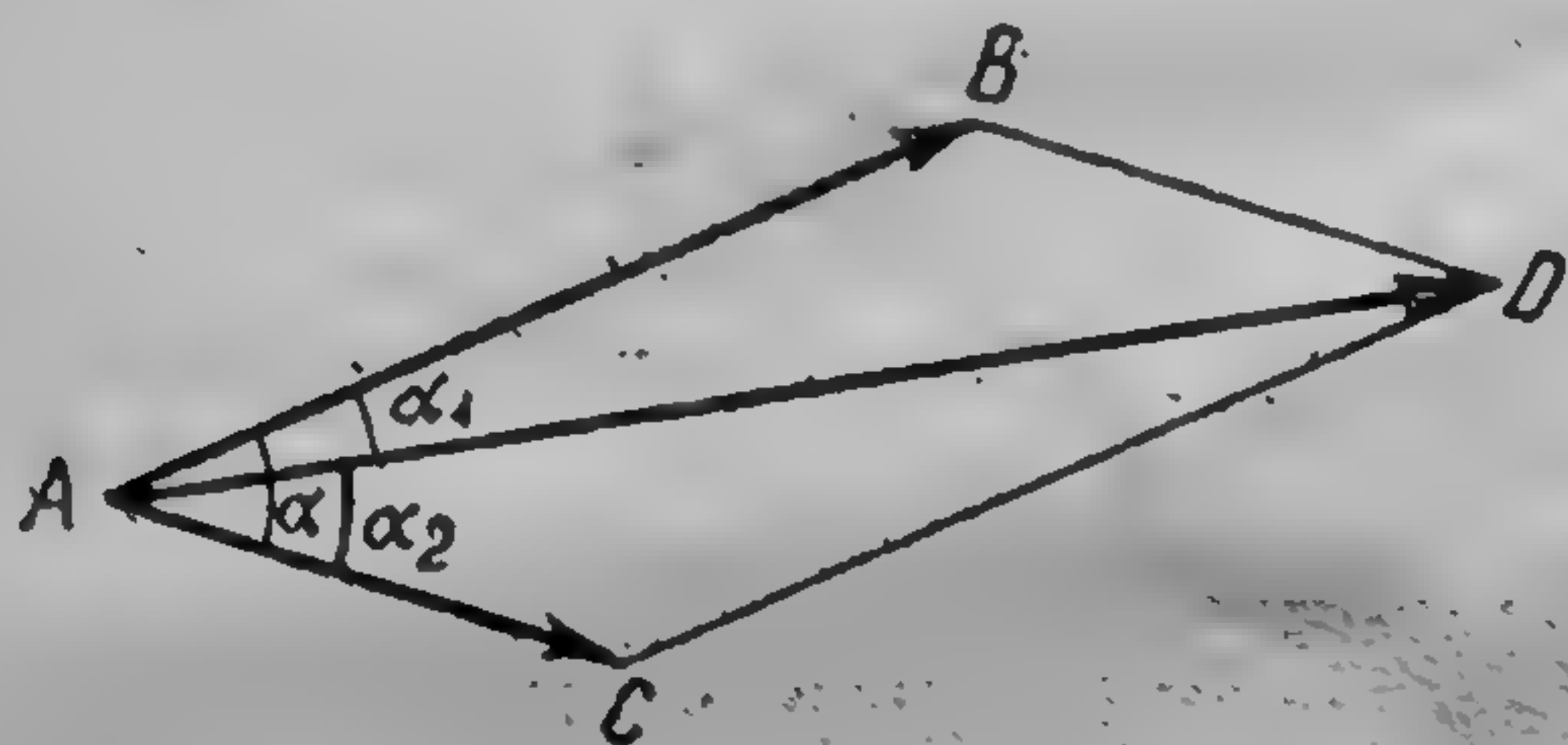


Fig. 3

rezolvabilă și anume unica forță care înlocuiește cele două forțe  $AB$  și  $AC$ , este forța  $AD$  îndreptată după diagonala paralelogramului construit cu forțele  $AB$  și  $AC$ . Această construcție a primit denumirea de *paralelogramul forțelor*.

Dacă unghiul dintre forțele  $AB$  și  $AC$  este  $\alpha$  atunci unghiul cu vârful în punctul  $B$  va fi egal cu  $\pi - \alpha$  și deci vom avea:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos(\pi - \alpha) = \\ &= AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Servindu-ne de formula (1.1) putem determina mărimea forței  $AD$  cu ajutorul mărimilor forțelor date  $AB$ ,  $AC$ , și al unghiului  $\alpha$  dintre ele. Din triunghiurile  $ABD$  și  $ACD$  avem:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{BD}{AD}, \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{CD}{AD}$$

sau

$$\sin \alpha_1 = \frac{AC}{AD} \sin \alpha, \quad \sin \alpha_2 = \frac{AB}{AD} \sin \alpha. \quad (1.2)$$

Servindu-ne de formulele (1.2) și cu ajutorul formulei (1.1) prin intermediul forțelor date  $AB$  și  $AC$  și unghiului  $\alpha$  dintre ele, se pot determina unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  formate de forța  $AD$  cu forțele  $AB$  și  $AC$ . Este folositor a nota două cazuri frecvente:

1) dacă  $\alpha = 0$ , atunci  $AD^2 = AB^2 + AC^2 + AB \cdot AC = (AB + AC)^2$  adică  $AD = AB + AC$ ;

2) dacă  $\alpha = \pi$ , atunci  $AD^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC = (AB - AC)^2$ , adică  $AD = |AB - AC|$ , unde liniile verticale arată că trebuie să se ia valoarea absolută a diferenței  $AB - AC$ .

De asemenea este obligatoriu ca totdeauna să avem:

$$AB + AC \geq AD \geq |AB - AC|. \quad (1.3)$$



Există multe demonstrații pur matematice a teoremei paralelogramului forțelor, dar în toate aceste demonstrații matematice, sint totdeauna admise unele ipoteze echivalente cu regula paralelogramului. Vom accepta fără demonstrație matematică legea paralelogramului forțelor, privind-o nu ca o teoremă matematică ci ca un principiu al științelor naturii care rezultă din experiență.

În practică, verificarea aceasta se poate face în felul următor: peste scripetii  $B$  și  $C$  (fig. 4) este trecut un fir la ale cărui capete sint atârinate greutatea  $P$  și  $Q$ ; în punctul  $A$  al firului este atârnată

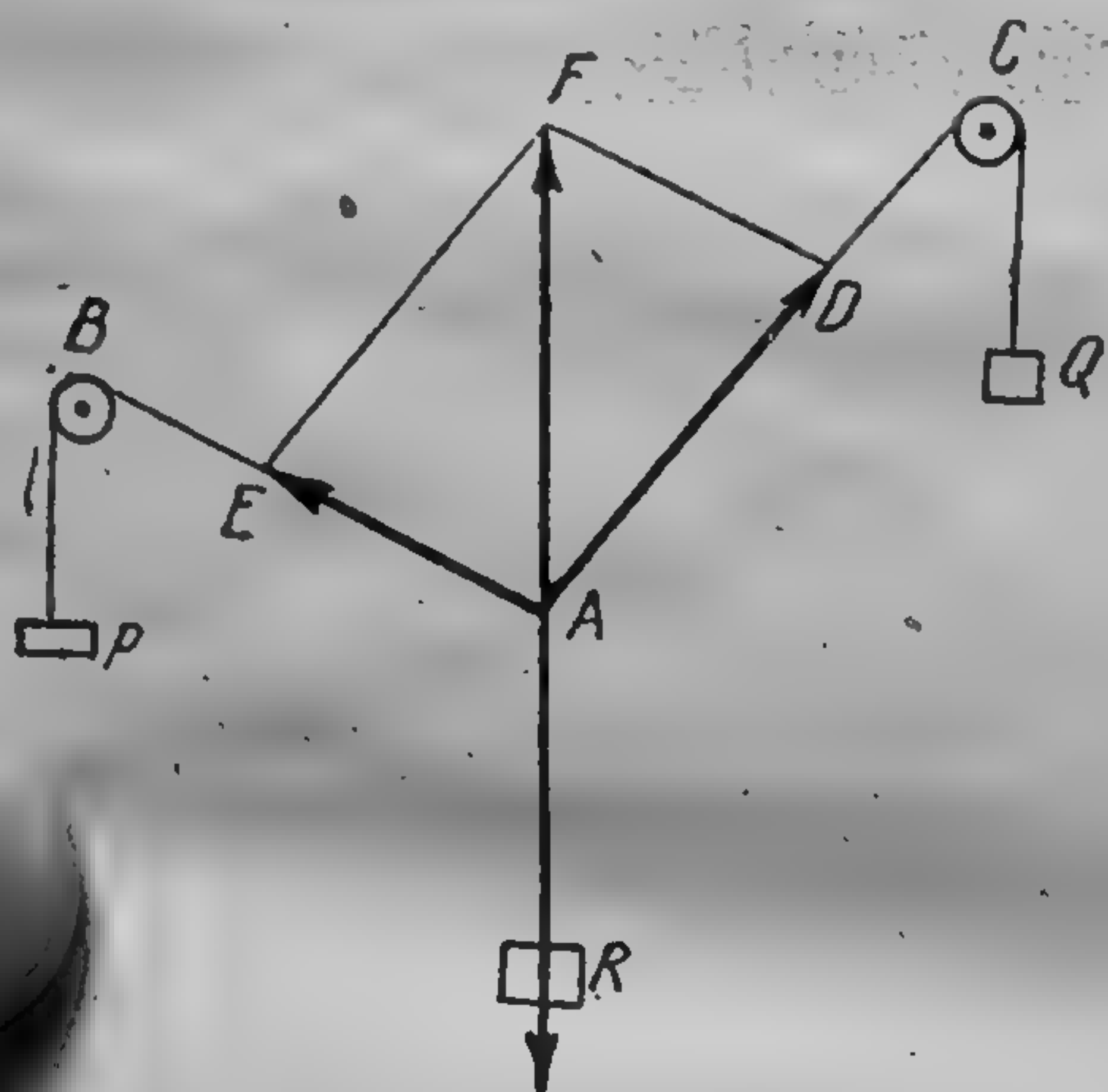


Fig. 4

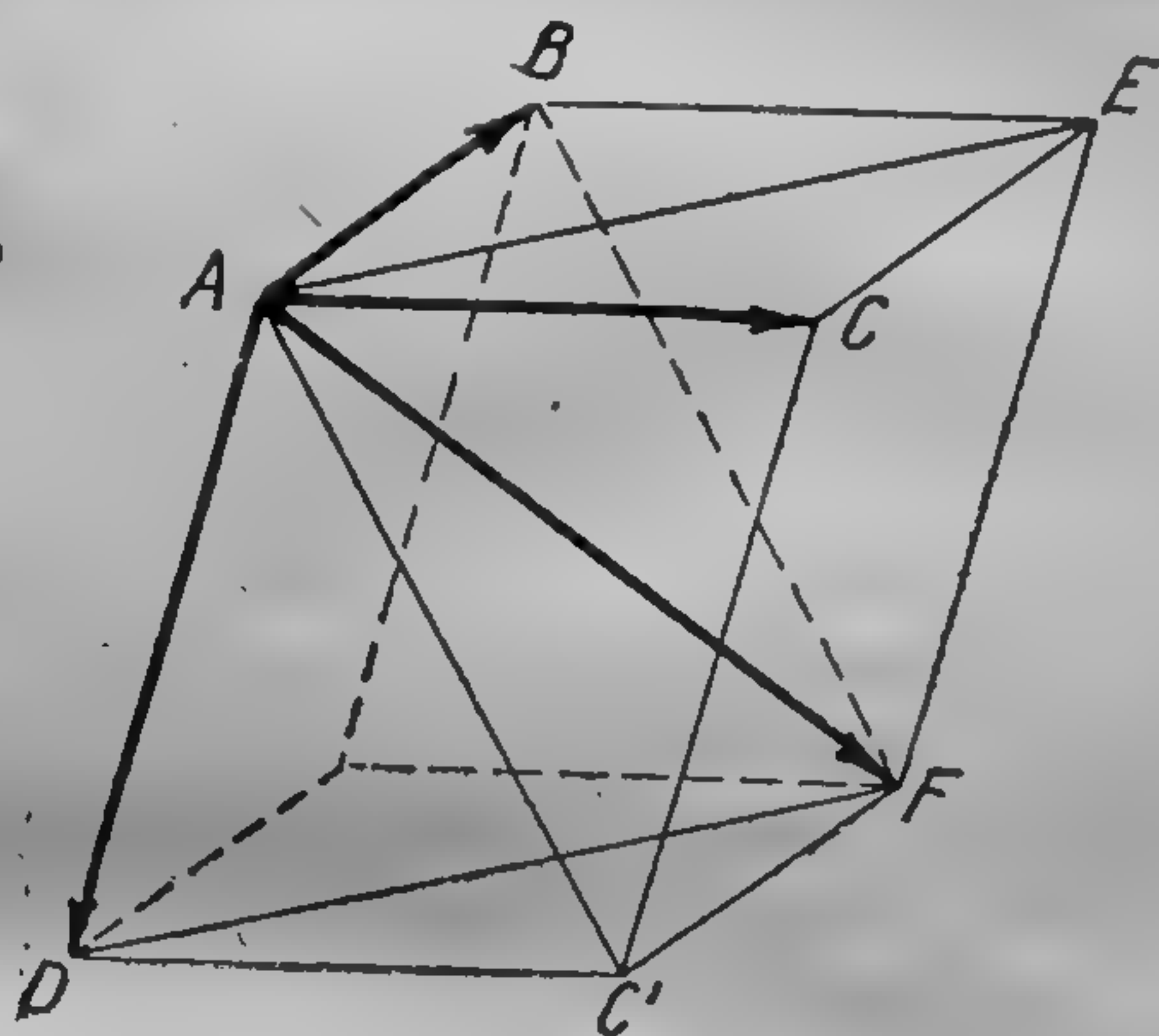


Fig. 5

o altă greutate oarecare  $R$ , astfel încât întregul sistem să fie în echilibru. Construind paralelogramul  $ADFE$ , ale cărui laturi reprezintă la o scară anumită greutatea  $P$  și  $Q$ , vom găsi că diagonala  $AF$  este îndreptată vertical în sus, în sens opus forței  $R$  și reprezintă, la scara adoptată, mărimea forței  $R$ . Așa și trebuie să fie; în adevăr, pentru ca punctul  $A$  să fie în echilibru, greutatea  $R$  trebuie să fie echilibrată de tensiunile din fire, egale cu greutatea  $P$  și  $Q$ , adică cele două forțe  $P$  și  $Q$  trebuie să se reducă la o singură forță egală și opusă forței  $R$ , această forță fiind forța  $AF$  având direcția diagonalei paralelogramului. Se neglijează greutatea firului.

Dacă asupra punctului  $A$  acționează de exemplu trei forțe  $AB$ ,  $AC$  și  $AD$ , atunci ele pot fi înlocuite cu o singură forță  $AF$ , înlocuind inițial forțele  $AB$  și  $AC$  cu o singură forță  $AE$  și apoi înlocuind forțele  $AE$  și  $AD$  cu forța  $AF$  (fig. 5). Același rezultat se va obține compunând forțele  $AB$ ,  $AC$  și  $AD$  în altă ordine. De



exemplu, dacă vom lua inițial forțele  $AD$  și  $AC$ , diagonală paralelogramului construit pe ele va fi segmentul  $AC'$ ; construind apoi paralelogramul cu forțele  $AC'$  și  $AB$ , vom obține aceeași forță  $AF$ . Diferitele ordine în care se pot compune aceste forțe sînt următoarele:

$$\begin{array}{ll} (AB, AC, AD); & (AB, AD, AC); \\ (AC, AB, AD); & (AC, AD, AB); \\ (AD, AB, AC); & (AD, AC, AB); \end{array}$$

toate aceste șase combinații conduc la aceeași forță rezultantă  $AF$ . În acest fel cînd compunem trei forțe  $AB, AC, AD$ , și obținem o singură forță  $AF$  putem aplica regulile de permutare. De asemenea din cele precedente ne putem convinge că regulile de combinare, și anume:

$$(AB, AC), AD; AB, (AC, AD); AC, (AB, AD),$$

sînt aplicabile. Acest lucru se exprimă pe scurt prin legea *independenței acțiunii forțelor*, adică efectul fiecărei forțe, nu influențează mărimile și direcțiile forțelor care acționează simultan cu ea. Deoarece ambele proprietăți indicate (comutativitate și distributivitate) caracterizează operația adunării, procedeul obținerii unei singure forțe  $AF$ , din cele trei forțe  $AB, AC$  și  $AD$ , aplicate în punctul comun  $A$ , a primit denumirea de *adunare geometrică*.

Din fig. 5 se poate deduce ușor că forța  $AF$  este diagonală paralelipipedului construit pe cele trei forțe date  $AB, AC$  și  $AD$ ; de aceea, acest procedeu de obținere a forței  $AF$  din trei forțe date se numește uneori *regula paralelipipedului*. Tot din fig. 5 se deduce că în loc de a construi întregul paralelipiped este suficient să se construiască, de exemplu, linia frîntă  $ABEF$ , ale cărei laturi sînt respectiv egale și paralele cu forțele date și să se închidă poligonul cu segmentul de dreaptă  $AF$ , care va reprezenta rezultatul adunării geometrice a celor trei forțe date, aplicate în punctul  $A$ . Acest procedeu de a construi forța  $AF$  se numește *regula poligonului forțelor*. Adunarea geometrică se bazează pe regula poligonului forțelor și se extinde natural asupra oricărui număr de forțe aplicate în același punct; ea se poate exprima în felul următor: *pentru a aduna geometric mai multe forțe aplicate în același punct, se va construi o linie frîntă ale cărei laturi vor fi egale și paralele cu forțele date; atunci segmentul care închide această linie frîntă va reprezenta suma geometrică a tuturor forțelor date sau forța rezultantă*. Regula



adunării geometrice al cărei caz particular este regula paralelogramului și pe baza căreia efectul rezultantei forțelor ce acționează simultan asupra unui corp material este echivalent cu efectul obținut prin aplicarea separată în același punct a forțelor componente, nu este o teoremă matematică, ci un principiu al științelor naturii care rezultă din experiență.

În mecanică trebuie rezolvată adeseori problema inversă și anume aceea a descompunerii unei forțe în mai multe forțe aplicate în același punct. Problema se rezolvă cel mai simplu prin utilizarea poligonului forțelor la care forța care trebuie descompusă va fi segmentul de închidere; dar fără condiții suplimentare;

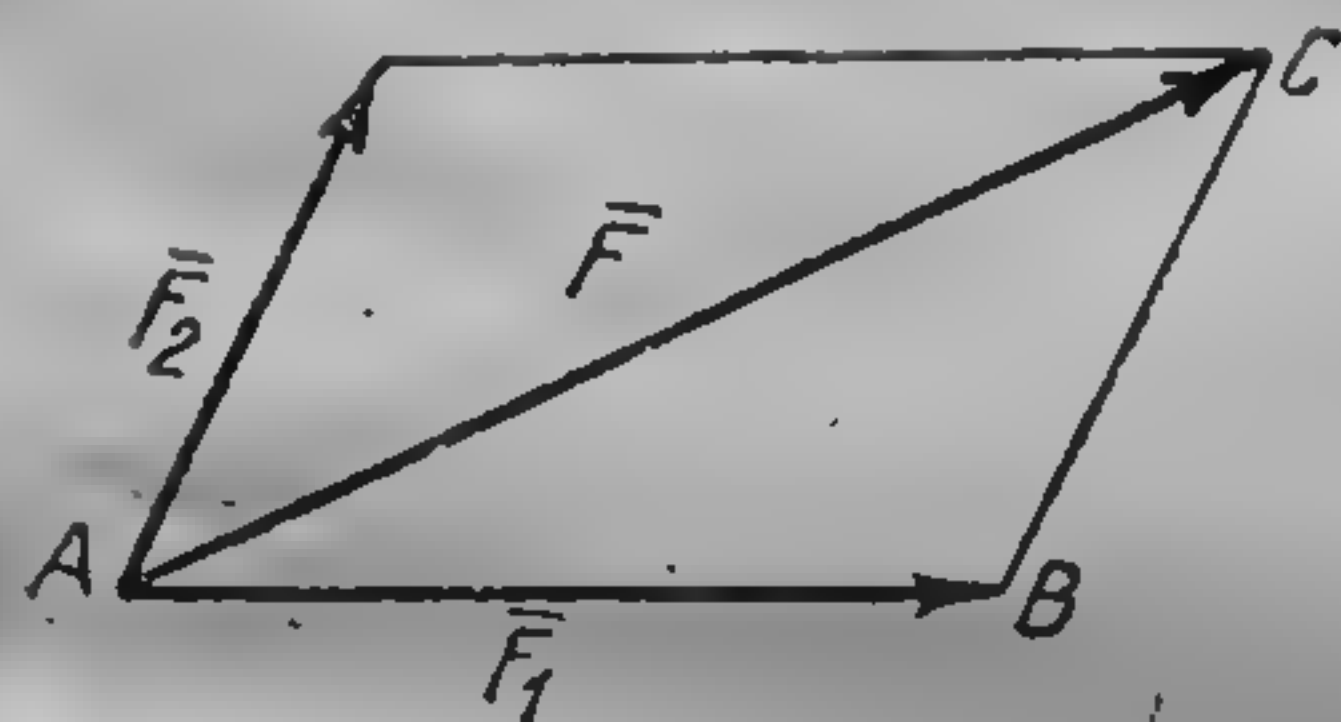


Fig. 6

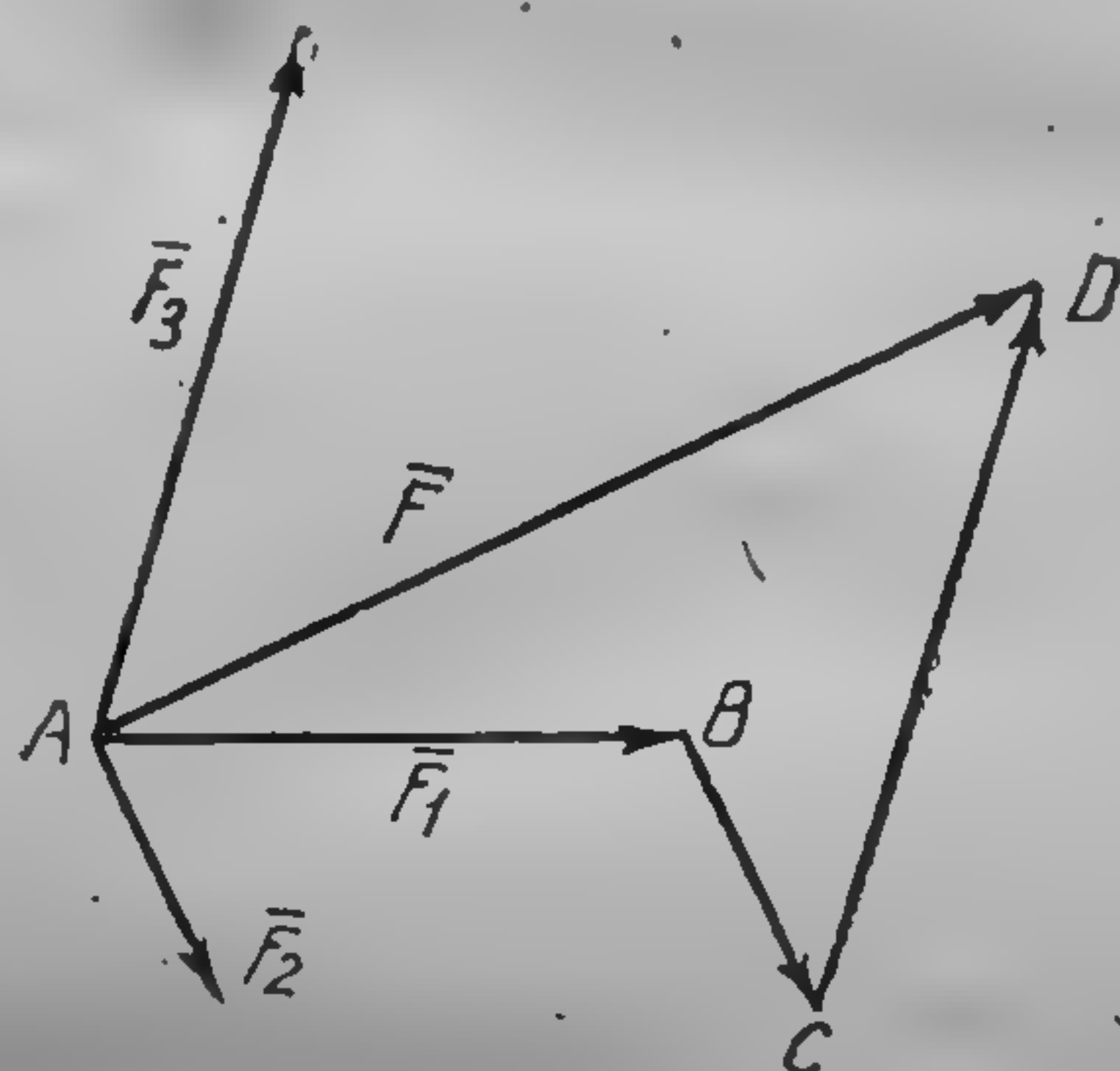


Fig. 7

oare orice problemă de acest fel va fi nedeterminată. De exemplu, se cere ca forța  $\vec{F}$ , aplicată în punctul A, să fie descompusă în două forțe. Pentru rezolvarea acestei probleme se construiește linia frântă  $ABC$  formată din două laturi care se sprijină pe forța  $\vec{F}$ , după cum se arată în fig. 6; laturile  $AB$  și  $BC$  ale acestei linii frante reprezintă cele două forțe căutate,  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ . Deoarece pe o latură dată  $\vec{F}$  se pot construi o infinitate de triunghiuri  $ABC$ , problema propusă admite o infinitate de soluții. Pentru ca problema să fie determinată trebuie puse condiții suplimentare prin care se poate obține un triunghi  $ABC$  și numai unul singur. Pentru aceasta este suficient, de exemplu, de a da în afară de latura  $\vec{AC} = \vec{F}$  și lungimile laturilor  $AB$  și  $BC$ . Un grad și mai mare de nedeterminare va avea problema descompunerii forței  $\vec{F}$  în trei forțe aplicate în același punct, deoarece în acest caz va fi necesar să se construiască linia frântă  $ABCD$ , care poate să nu fie plană (fig. 7). Problema descompunerii forței  $\vec{F}$  în trei forțe devine determinată dacă, de exemplu, s-ar indica forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$



ca mărime și direcție, adică laturile  $AB$  și  $BC$  ale liniei frînte  $ABCD$ ; problema mai poate fi determinată dacă se indică direcțiile celor trei forțe  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  și  $\vec{F}_3$ , deoarece atunci problema revine la construirea paralelipipedului cu o diagonală dată, fiind cunoscute muchiile lui.

Din cele expuse, urmează că forțele sînt cantități caracterizate prin mărime, direcție și sens și căroră li se aplică regula adunării geometrice.

**§ 4. Definiția mărimilor scalare și vectoriale.** În mecanica teoretică există, în afară de forțe, multe alte mărimi care se caracterizează prin valori numerice, direcție și sens și căroră li se aplică regula adunării geometrice; astfel sînt, de exemplu, momentul unei forțe, momentul cuplului de forțe, viteza, cantitatea de mișcare etc. Toate proprietățile lor comune și teoremele generale care se referă la ele fac parte din teoria generală despre vectori.

Vom introduce următoarea definiție:

*Mărimile care se caracterizează prin valoare numerică, direcție și sens și căroră li se aplică regula adunării geometrice, se numesc vectori.*

Pentru ca o mărime să fie vector, ultima condiție este obligatorie; astfel, de exemplu, mai departe la § 93, se va vedea că rotațiile finite pot fi reprezentate prin segmente care au lungime și direcție. Totuși, aceste segmente nu sînt vectori deoarece la adunarea rotațiilor finite, suma lor se schimbă dacă se modifică ordinea termenilor, adică adunarea lor nu este o adunare geometrică. Dimpotrivă forțele sînt vectori, deoarece s-a văzut în § 2 și 3, că forțele se caracterizează prin mărime, direcție și sens și lor li se aplică regula adunării geometrice. Mai jos se va demonstra că momentul forței, viteza liniară, accelerația liniară, viteza unghiulară etc. sînt de asemenea vectori. Vom reprezenta vectorii prin segmente de dreaptă cu săgeți la capete, săgeți care indică sensul vectorului (fig. 8). Vom observa din definiția vectorului dată mai sus că deplasarea vectorului, paralel cu el însuși, dintr-un punct din spațiu în alt punct, nu creează în general un nou vector; astfel segmentele din fig. 9 reprezintă, în general, unul și același vector. Totuși, există vectori a căror mutare este mai mult sau mai puțin limitată. Pentru a specifica că vectorul considerat poate fi transportat paralel cu el însuși, în orice punct din spațiu, acest fel de vector se numește *vector liber*. Cu vectorii se pot efectua operații algebrice, diferențiale și integrale; regulile



corespunzătoare lor se studiază în *calculul vectorial*. În cursul de față regulile operațiilor cu vectorii se vor expune acolo unde va fi necesar pentru înțelegerea anumitor paragrafe.

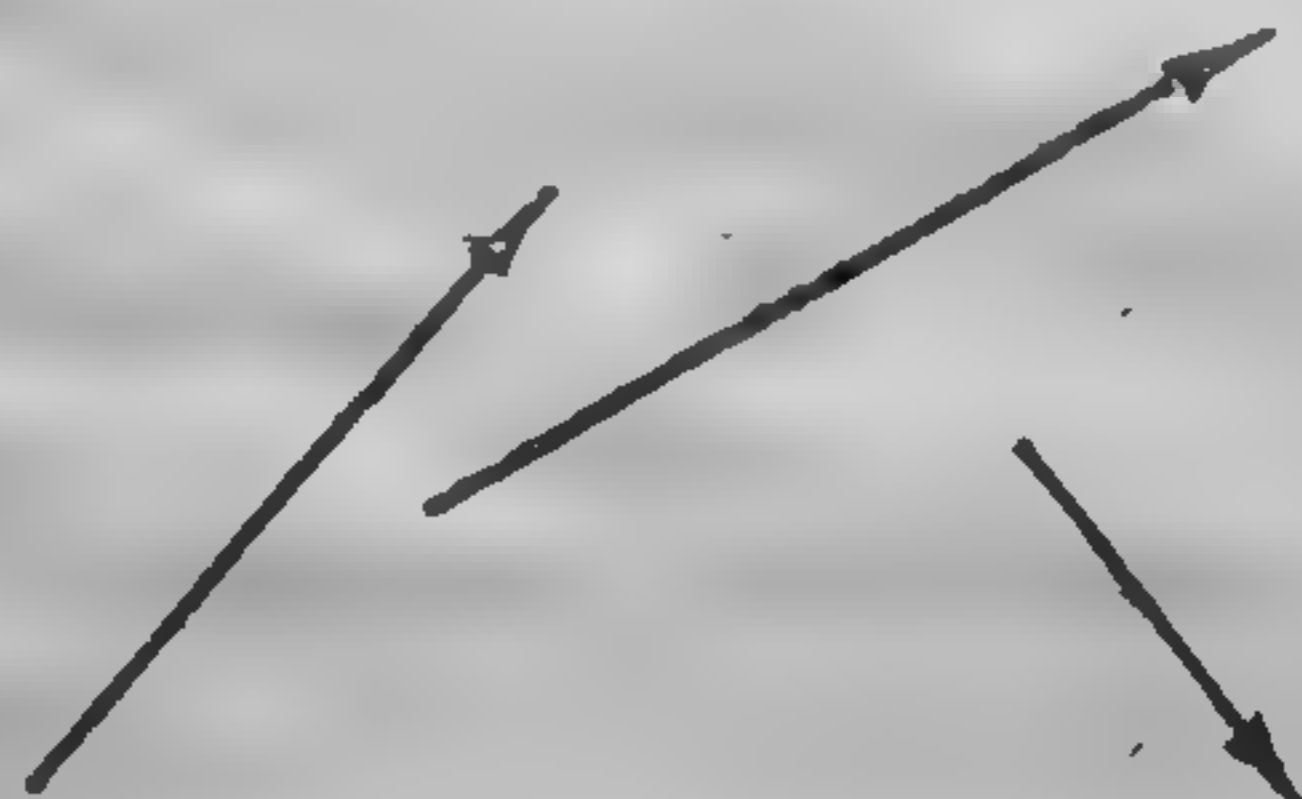


Fig. 8

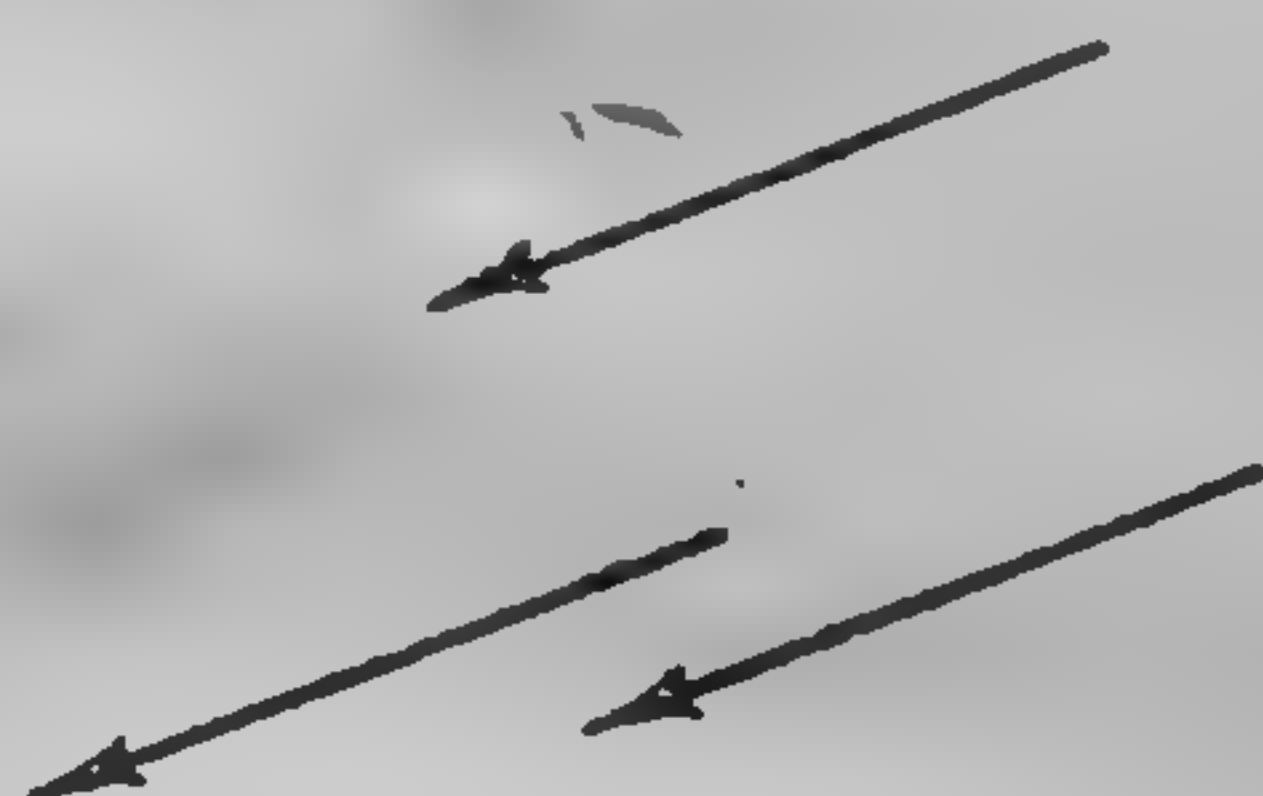


Fig. 9

Orice mărimi caracterizate numai prin valoarea lor numerică proprie se numesc *scalari*, sau *mărimi scalare*. De exemplu, temperatura și tensiunea electrică etc. sînt mărimi scalare.

Vom nota vectorii fie cu o literă  $\vec{a}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{g}$  etc., fie cu două litere barate  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ , ..., prima literă  $A$ ,  $C$ , ... reprezentînd originea  $B$ ,  $D$ , ... iar a doua extremitatea vectorului.

Se poate lua în considerație numai mărimea vectorului fără a ține seamă de orientarea lui; exprimată într-o anumită unitate

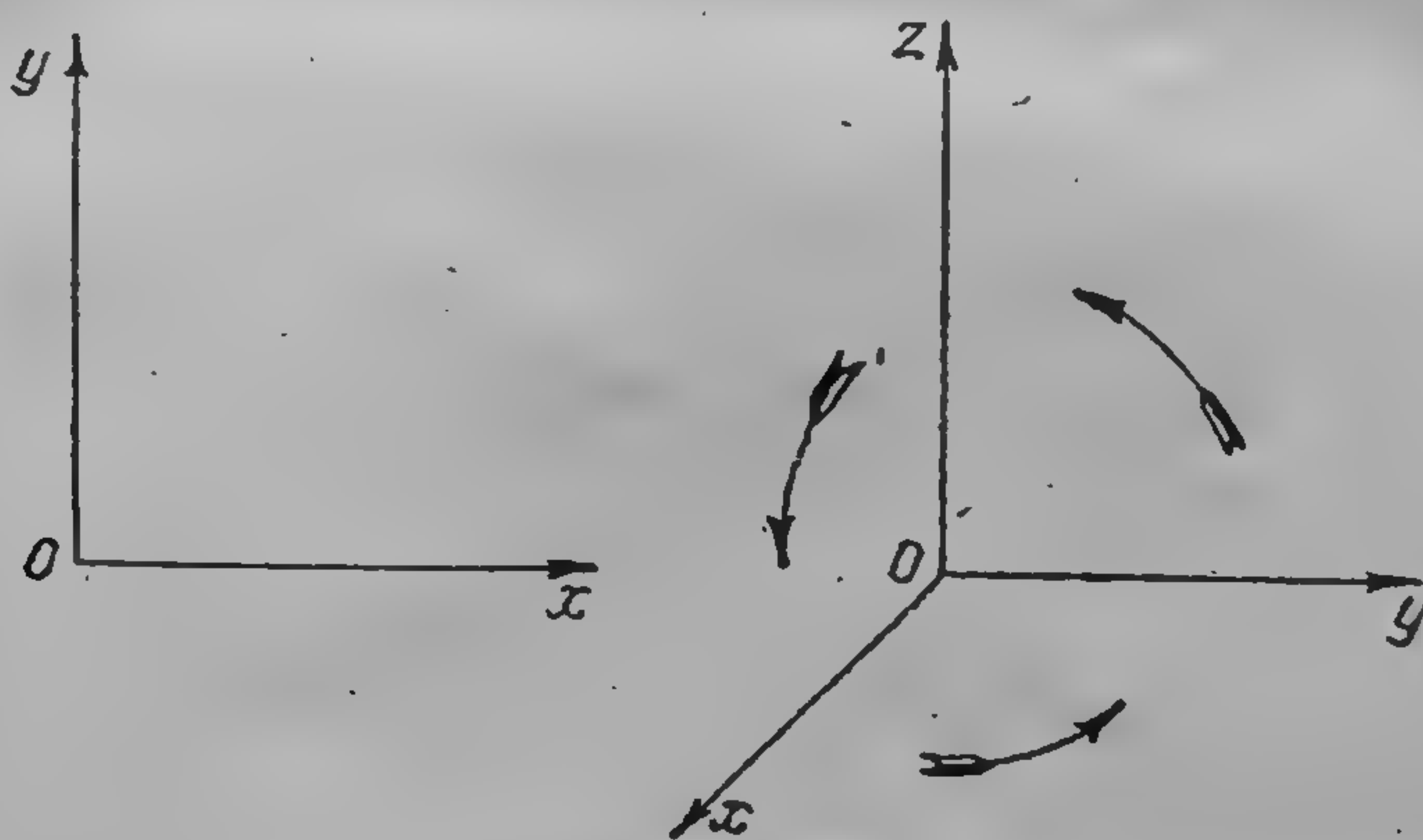


Fig. 10

de măsură, ea va fi reprezentată printr-un număr aritmetic și va fi o mărime scalară; vom numi *modul* mărimea vectorului și vom nota modulul vectorului cu aceeași literă ca și vectorul, dar încadrat cu linii verticale sau prin aceeași literă nebarată. În



acest fel vectorul  $\bar{a}$  are modulul  $|\bar{a}|$  sau  $a$ . Vectorul a cărui mărime este egală cu unitatea va fi numit *vector unitar* sau *versor* și îl vom nota cu litere barate, cu un zero mic în dreapta literei, în partea de sus. De exemplu, vectorul unitar având direcția vectorului  $\bar{a}$ , se va nota cu  $\bar{a}^0$ . Este clar că orice vector poate

fi reprezentat ca un vector unitar de aceeași direcție înmulțit cu modulul acestui vector  $\bar{F} = \bar{F}^0 F = F \bar{F}^0$ .

În cursul de mecanică vom folosi continuu axe de coordonate. Acest sistem de axe de coordonate va fi în general un sistem de axe de coordonate ortogonale, dispuse așa cum se arată în fig. 10. Dacă vom conveni că sensul pozitiv de rotație în jurul direcției pozitive a axei este acela contrar acelor de ceasornic, atunci în al doilea desen din fig. 10, vedem că rotirea pozitivă în jurul

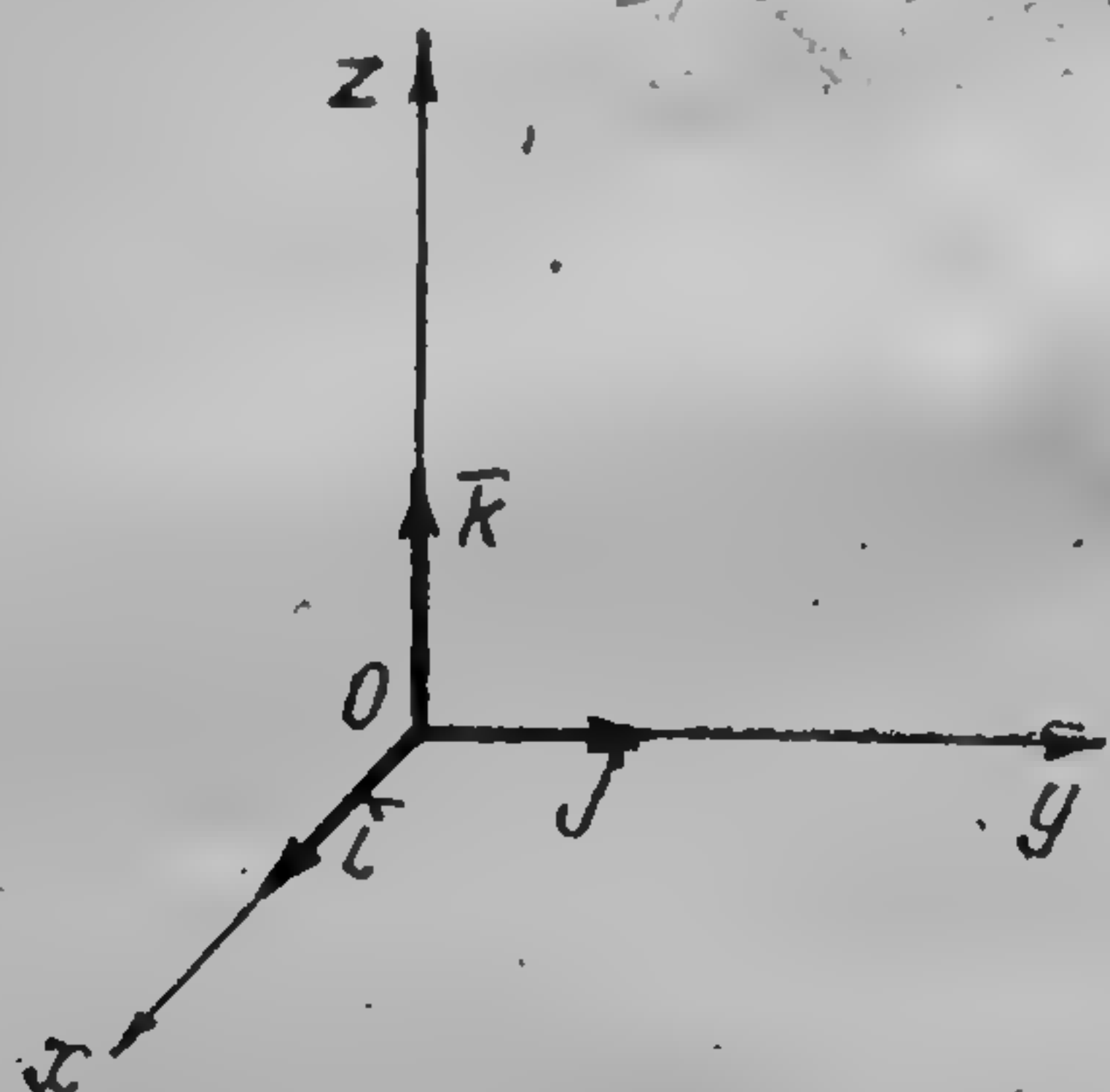


Fig. 11

axei  $Oz$ , mută axa  $Ox$  în axa  $Oy$ , așa cum se indică în desen prin săgeată, ș.a.m.d. prin permutări circulare; pentru sistemul plan al axelor de coordonate reprezentate în desenul din stînga al fig. 10, axa a treia  $Oz$  ar fi trebuit să fie trasă perpendicular pe suprafața desenului, în direcția cititorului.

Vectorii unitari a căror direcție coincide respectiv cu direcțiile pozitive ale axelor  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ , îi vom nota prin  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  și  $\bar{k}$  (fig. 11).

§ 5. Proiecția unui vector pe o axă. Să considerăm un vector oarecare  $\bar{a}$  și o dreaptă infinită  $\Delta$ ; vom lua unul din cele două sensuri ale acestei drepte ca pozitiv și vom lua dreapta  $\Delta$  ca axă (fig. 12). Fie vectorul  $\bar{a} = \overline{AB}$ . Să ducem prin

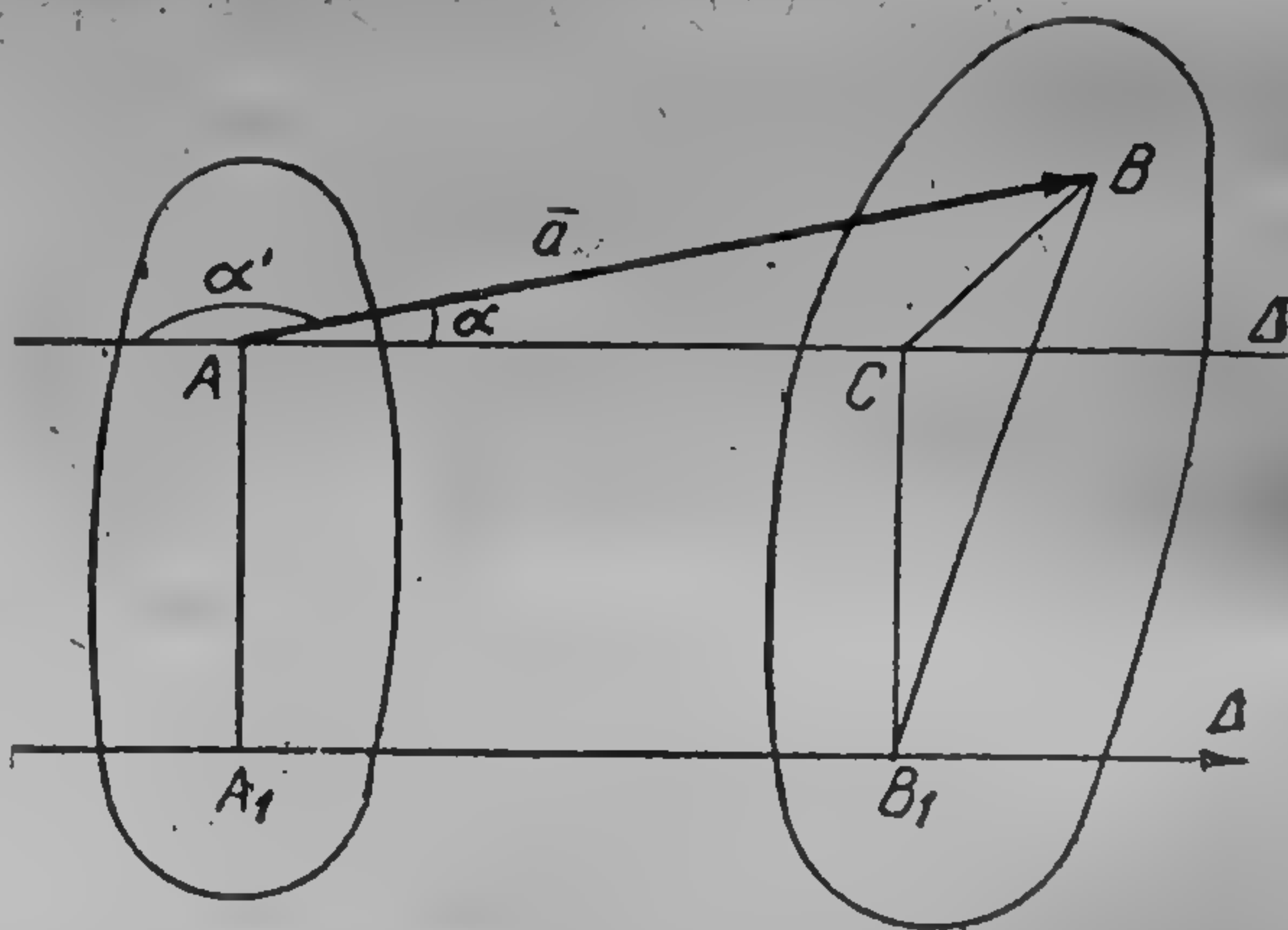


Fig. 12



originea  $A$  și prin extremitatea  $B$  a vectorului  $\overline{AB}$  două plane perpendiculare pe axa  $\Delta$ . Aceste plane vor tăia pe axa  $\Delta$  segmentul  $A_1B_1$ . Dacă sensul de la  $A_1$  spre  $B_1$  coincide cu sensul pozitiv al axei  $\Delta$ , atunci vom considera segmentul  $A_1B_1$  ca pozitiv; dacă însă sensul de la  $A_1$  spre  $B_1$  este contrar sensului pozitiv al axei  $\Delta$  atunci vom considera segmentul  $A_1B_1$  ca negativ. Astfel, lungimea segmentului  $A_1B_1$  în condițiile arătate mai sus, se poate reprezenta totdeauna printr-un *număr algebric*. Este clar că se mai poate obține segmentul  $A_1B_1$ , coborînd din originea  $A$  și extremitatea  $B$  a vectorului  $\overline{AB}$ , perpendicularele  $AA_1$  și  $BB_1$  pe axa  $\Delta$ . Lungimea acestui segment  $A_1B_1$  considerată ca număr algebric se numește *proiecția vectorului  $\overline{AB}$  pe axa  $\Delta$* . Astfel vom ajunge la următoarea definiție:

*Proiecția unui vector pe o axă oarecare este egală ca modul, cu lungimea segmentului de pe axă cuprins între perpendicularele coborîte din extremitățile vectorului pe acea axă; semnul proiecției este pozitiv dacă orientarea segmentului coincide cu aceea a axei și negativ în cazul contrar.*

Nu este greu de arătat cum se calculează proiecția vectorului pe o axă. Ducem prin punctul  $A$  dreapta  $\Delta'$  paralelă cu axa  $\Delta$  (fig. 12); această dreaptă va întretaia planul ce trece prin punctul  $B$  și este perpendicular pe axa  $\Delta$ , într-un punct  $C$ . După proprietățile segmentelor paralele cuprinse între plane paralele, avem:

$$AC = A_1B_1.$$

Observăm că nu este necesar ca vectorul  $\overline{AB}$  și axa  $\Delta$  să fie coplanare. Din triunghiul dreptunghi  $ACB$ , cu unghiul drept în punctul  $C$  avem  $AC = AB \cos \alpha$ , unde în cazul din fig. 12 unghiul  $\alpha$  este ascuțit. În acest fel obținem proiecția  $A_1B_1 = AB \cos \alpha$  semnul proiecției depinzînd de unghiul  $\alpha$ . Dacă direcția pozitivă a axei  $\Delta$  ar fi opusă, atunci unghiul dintre vectorul  $\overline{AB}$  și direcția pozitivă a axei  $\Delta$  ar fi egal cu  $\alpha'$ ; în acest caz proiecția vectorului  $\overline{AB}$  pe axa  $\Delta$  ar fi egală cu  $-A_1B_1$ , deoarece:

$$AB \cos \alpha' = -AB \cos \alpha = -AC = -A_1B_1.$$

Astfel se ajunge la următoarea regulă:

*Pentru a obține proiecția unui vector pe o axă, se va înmulți modulul vectorului cu cosinusul unghiului format de direcția acelui vector cu direcția axei, după sensul pozitiv.*



Aceeași regulă se mai poate exprima și astfel:

Pentru a obține proiecția unui vector pe o axă, se va înmulți modulul acelui vector cu cosinusul unghiului ascuțit format de vector și axă și se va lua rezultatul cu semnul plus, dacă direcția vectorului formează un unghi ascuțit cu sensul pozitiv al axei; iar dacă direcția vectorului formează cu sensul pozitiv al axei un unghi obtuz, rezultatul se va lua cu semnul minus.

Deosebit de important este cazul proiecției vectorului pe axele ortogonale  $Oxyz$ . Vom nota proiecția vectorului  $\vec{a}$  pe axele

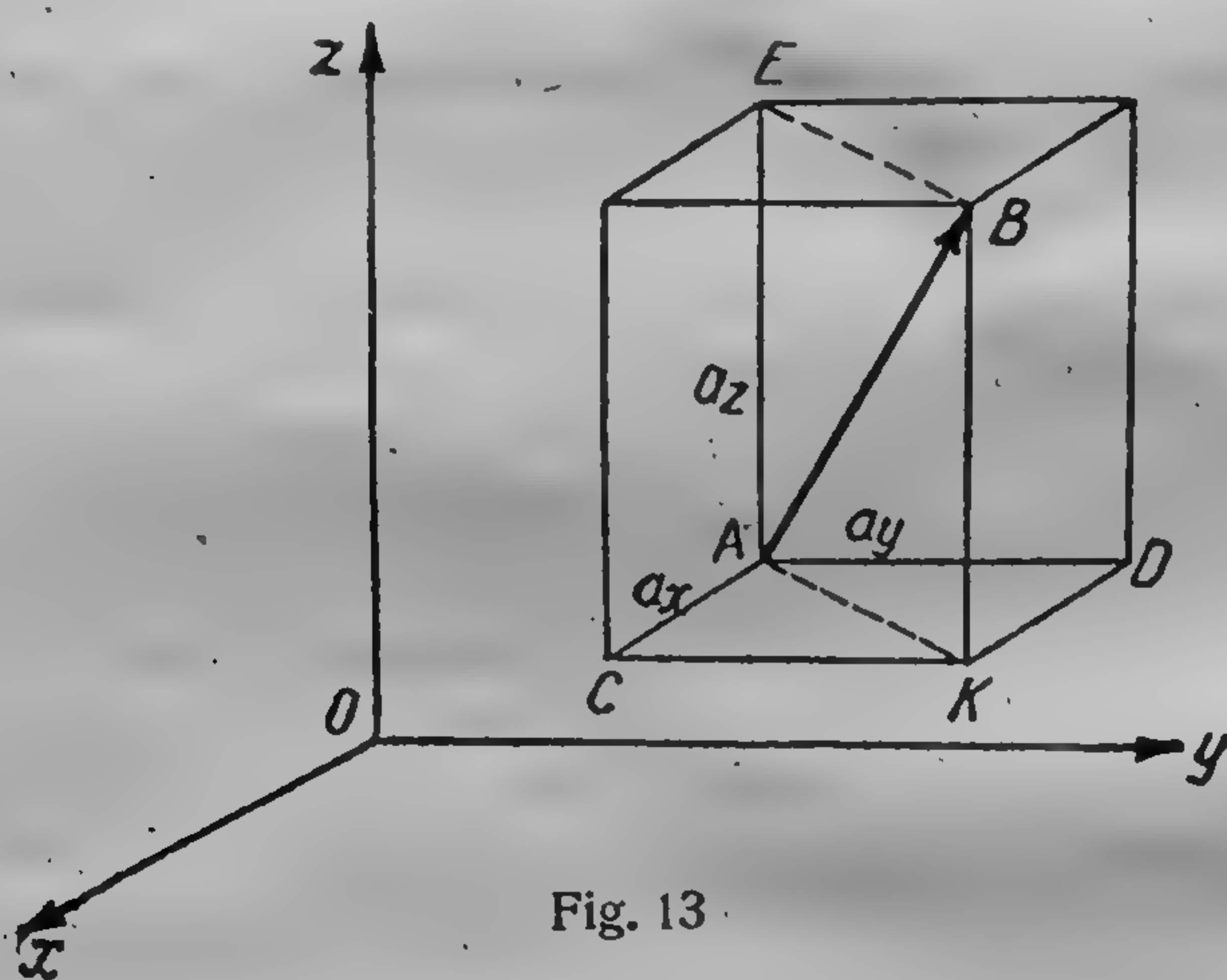


Fig. 13

$Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$  respectiv prin  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ . Fie un vector oarecare  $\vec{AB} = \vec{a}$ . Ducem din punctul A semidrepte paralele cu axele de coordonate în sensurile pozitive ale axelor și notăm cu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  unghiurile vectorului  $\vec{AB}$  formate cu aceste semidrepte; este clar că unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sînt unghiuri formate de

vectorul  $\vec{AB}$  cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (fig. 13). De asemenea este clar că, dacă vreunul din unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  va fi ascuțit sau obtuz, în toate cazurile muchiile paralelipipedului dreptunghi  $ACKDBE$  vor fi egale cu valoarea absolută a proiecției vectorului  $\vec{a}$  pe axele de coordonate. Astfel vom obține:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a \cos \alpha, \\ a_y &= a \cos \beta, \\ a_z &= a \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

de unde:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{a}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{a}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$



Deoarece modulul  $a$  este prin definiție pozitiv și proiecțiile  $a_x, a_y, a_z$  sînt mărimi algebrice, din formulele (1.5) se obțin cosinuşii unghiurilor vectorului cu axele coordonatelor, inclusiv semnul.

Dar pătratul diagonalei paralelipipedului dreptunghi este egal cu suma pătratelor muchiilor lui, și deci, avem:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

sau

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (1.6)$$

unde radicalul urmează să fie luat cu semnul pozitiv. Astfel rezultă că:

*Modulul unui vector este egal cu valoarea absolută a rădăcinii pătrate din suma pătratelor proiecțiilor vectorului pe axele ortogonale de coordonate.*

Din relațiile (1.5) și ținînd seama de egalitățile (1.6), vom avea:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (1.7)$$

adică: suma pătratelor cosinuşilor unghiurilor formate de vector cu cele trei axe ortogonale este egală cu 1.

**§ 6. Adunarea și scăderea vectorilor.** Conform definiției vectorilor dată la § 4, pentru vectori trebuie să se folosească regula adunării geometrice, care s-a dat pentru forțe. De aceea definirea reciprocă a operației adunării vectorilor din definirea aceleiași operații pentru forțe (§ 3) ne duce la următoarea definiție:

Dacă vom duce o linie frîntă astfel ca prima ei latură să fie egală și paralelă cu primul vector, a doua latură a ei să aibă originea la extremitatea primei laturi a liniei frînte și să fie egală și paralelă cu cel de-al doilea vector etc., atunci segmentul care își are originea în originea acestei linii frînte și extremitatea la extremitatea ei, este suma geometrică a vectorilor dați, iar operația obținerii sumei geometrice se numește adunare geometrică.

Am văzut mai sus în § 3 al acestui capitol, că această operație se poate numi adunare deoarece i se aplică regulile adunării (de comutativitate și asociațivitate) și deoarece ea are ca rezultat tot un vector, adică o mărime cu aceeași dimensiune.

Adunarea geometrică se notează în modul următor:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots = \sum_n \vec{a}_n. \quad (1.8)$$



Vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$  se numesc *termenii sumei geometrice* sau *vectorii componenți*, iar vectorul  $\vec{a}$  este numit *sumă geometrică* sau *vector rezultat*.

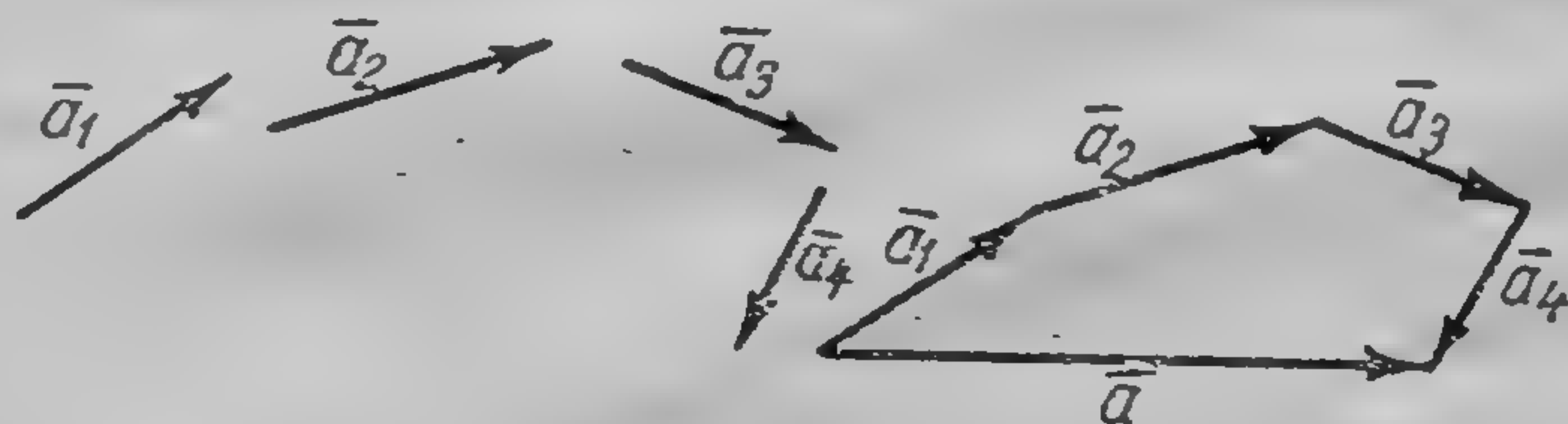


Fig. 14

Fig. 14 reprezintă un caz de adunare geometrică a patru vectori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ . Dacă originea și extremitatea liniei frânse coincid, atunci vom avea  $\vec{a} = 0$ .

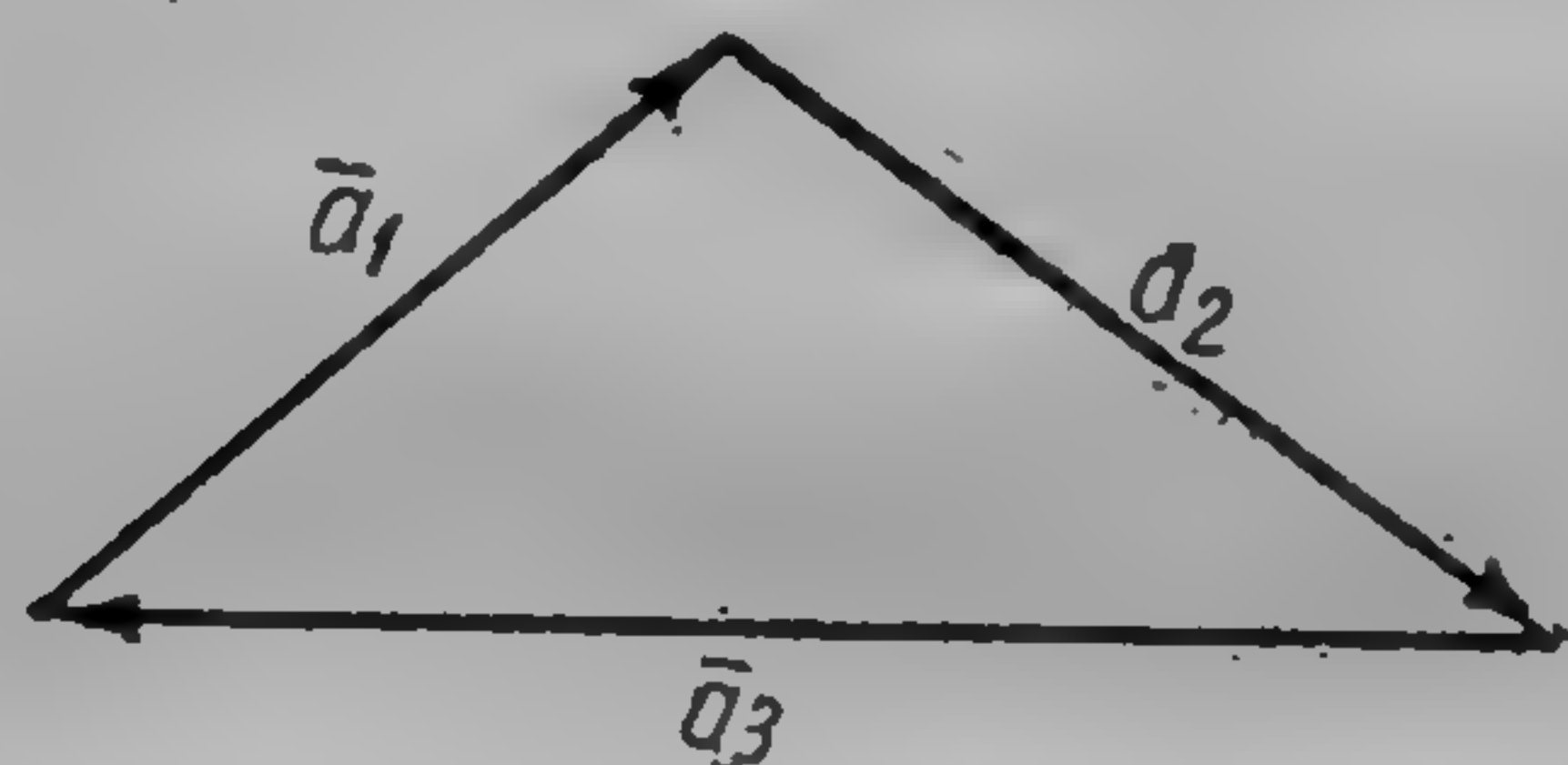


Fig. 15

Pentru trei vectori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  egalitatea  $\vec{a} = 0$  este posibilă numai în cazul când cei trei vectori formează un triunghi (fig. 15). Deoarece triunghiul este o figură plană, se deduce că suma a trei vectori

poate fi egală cu zero numai în cazul când toți vectorii sînt sau în același plan sau pot fi mutați paralel cu ei înșiși într-un același plan.

Este evident că regula paralelogramului este un caz particular a regulii generale a adunării vectorilor.

Deoarece linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte, este evident că:

$$a \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

semnul egalității avînd loc numai în cazul când toți vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$  vor fi paraleli între ei și îndreptați în același sens.

Următoarea reprezentare a vectorilor prin vectori unitari se va întîlni continuu în tot parcursul acestui curs de mecanică.

Să considerăm fig. 13. Găsim:

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CK} + \vec{KB} = \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE}.$$

Deoarece  $AC = a_x$ ,  $AD = a_y$ ,  $AE = a_z$ , introducînd vectorii unitari  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  și  $\vec{k}$  vom obține:

$$\vec{AC} = \vec{i}a_x, \quad \vec{AD} = \vec{j}a_y, \quad \vec{AE} = \vec{k}a_z,$$

adică

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z. \quad (1.9)$$



Să calculăm, spre exemplu, suma geometrică sau vectorul rezultat  $\bar{a}$ , a patru vectori  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{a}_3$  și  $\bar{a}_4$  și s-o proiectăm pe o axă oarecare  $\Delta$  (fig. 16). Deoarece proiecția vectorului  $\bar{a}$  este egală cu  $A_1E_1$ , vom avea:

$$A_1E_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 - E_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1,$$

deci:

*Proiecția vectorului rezultat pe o axă oarecare este egală cu suma algebrică a proiecțiilor vectorilor compoziți pe aceeași axă.*

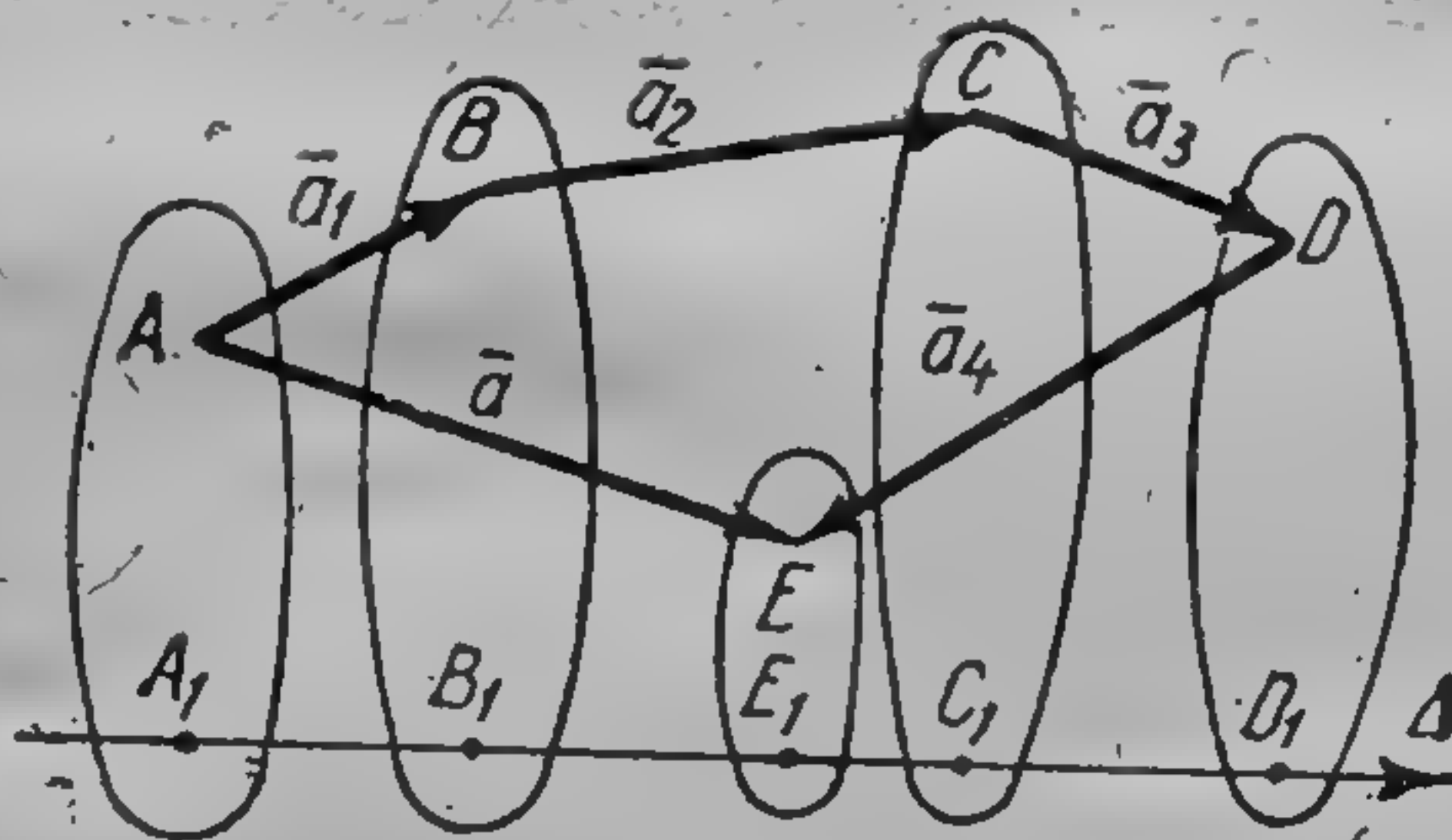


Fig. 16

Luăm ca axă  $\Delta$  succesiv axele de coordonate  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$  al sistemului de axe de coordonate ortogonale  $Oxyz$ ; atunci din formulele (1.8) și ținând seamă de regula precedentă vom obține:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + a_{4x} + \dots = \sum_n a_{nx}, \\ a_y &= a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} + a_{4y} + \dots = \sum_n a_{ny}, \\ a_z &= a_{1z} + a_{2z} + a_{3z} + a_{4z} + \dots = \sum_n a_{nz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Aplicînd formula (1.5) vom obține:

$$a = \sqrt{\left(\sum_n a_{nx}\right)^2 + \left(\sum_n a_{ny}\right)^2 + \left(\sum_n a_{nz}\right)^2}. \quad (1.11)$$

Formulele (1.10) se mai pot obține și în modul următor. Avem

$$\bar{a} = i\bar{a}_x + j\bar{a}_y + k\bar{a}_z,$$

$$\bar{a}_1 = i\bar{a}_{1x} + j\bar{a}_{1y} + k\bar{a}_{1z},$$

$$\bar{a}_2 = i\bar{a}_{2x} + j\bar{a}_{2y} + k\bar{a}_{2z},$$

de unde

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots = i\bar{a}_{1x} + j\bar{a}_{1y} + k\bar{a}_{1z} + i\bar{a}_{2x} + j\bar{a}_{2y} + k\bar{a}_{2z} + \dots$$



Deoarece vectorii  $\bar{i}a_{1x}, \bar{i}a_{2x} \dots$  sînt paraleli între ei, fiind dispuși de-a lungul unei drepte și anume a axei  $Ox$ , putem aduna algebric proiecțiile  $a_{1x}, a_{2x} \dots$  prin urmare:

$$\bar{i}a_{1x} + \bar{i}a_{2x} + \dots = \bar{i}(a_{1x} + a_{2x} + \dots).$$

Deci, vom obține:

$$\bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z = \bar{i}(a_{1x} + a_{2x} + \dots) + \bar{j}(a_{1y} + a_{2y} + \dots) + \bar{k}(a_{1z} + a_{2z} + \dots).$$

De aici egalînd între ei vectorii cu aceleași direcții vom reveni la formulele (1.10).

Din fig. 13 în baza definiției sumei geometrice avem:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CK} + \overline{KB}.$$

Aceasta înseamnă că dacă proiecția unui vector pe o axă se consideră ca vector, atunci componentele vectorului pe trei axe ortogonale coincid cu proiecțiile vectorului pe aceste axe. Este ușor să ne convingem de faptul că această coincidență are loc numai într-un sistem ortogonal de coordonate, în general însă *proiecția unui vector pe o axă și componenta vectorului după această axă — sînt cantități diferite.*

În adevăr, fie, de exemplu, două forțe  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  aplicate în punctul  $O$  care formează între ele unghiul  $\alpha$  și au rezultanta  $\bar{F}$ . Pentru a obține această rezultantă, forțele  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  trebuie compuse după regula paralelogramului, a cărei diagonală va reprezenta rezultanta  $\bar{F}$ . Dacă unghiul  $\alpha$  este ascuțit rezultă evident că proiecțiile rezultantei pe direcțiile componentelor vor fi mai

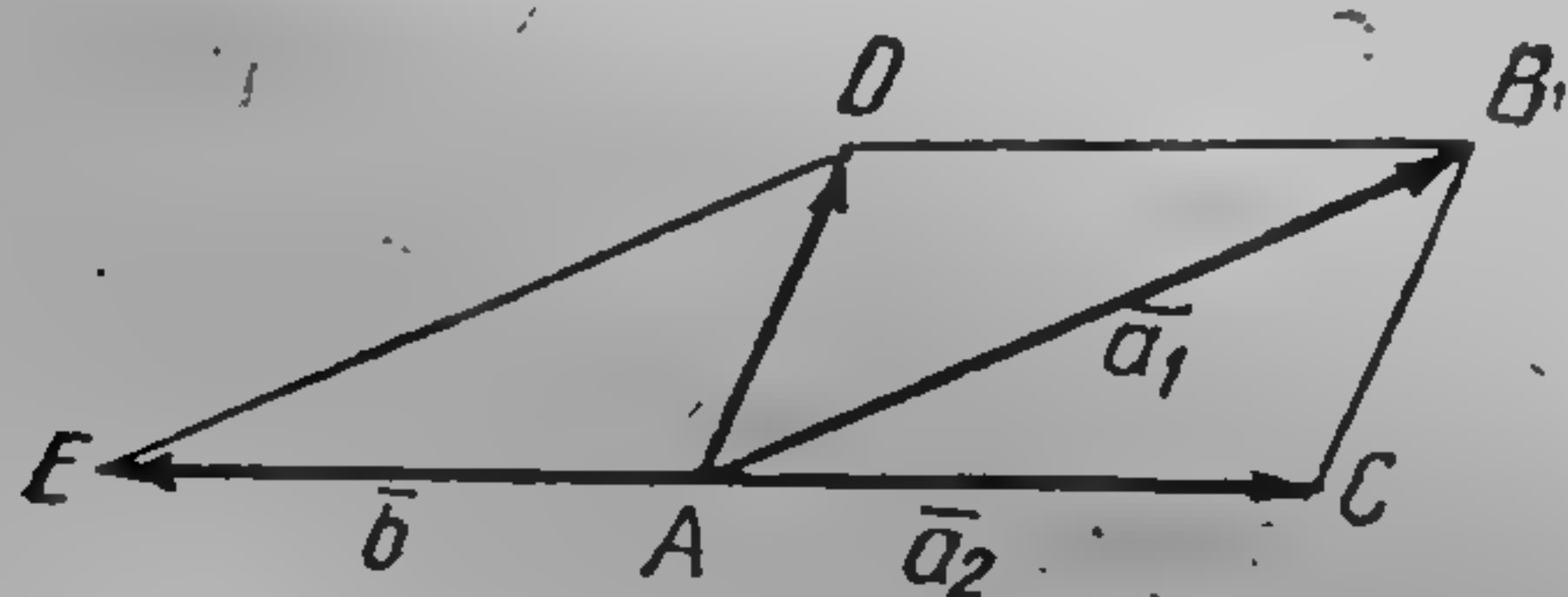


Fig. 17

mari decît aceste componente; dacă însă unghiul  $\alpha$  este obtuz, aceste proiecții vor fi mai mici decît componentele respective, putînd surveni și cazul cînd una din proiecții, deși mai mare în valoare absolută decît componenta, va fi dirijată în sens opus acestei com-

ponente. Dacă însă unghiul  $\alpha$  va fi drept, atunci proiecțiile rezultantei vor coincide atît ca mărime, cît și ca sens cu componentele, ceea ce și confirmă ipoteza emisă mai înainte.

Definind adunarea geometrică a vectorilor nu este greu de definit și scăderea geometrică a vectorilor ca operație inversă adunării. Să presupunem că se cere să se efectueze scăderea vec-



torilor  $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ . Construim vectorul  $\vec{b}$ , opus vectorului  $\vec{a}_2$ , adică vectorul care are același modul și aceeași direcție dar sens opus și anume, dacă  $\vec{a}_2 = \vec{AC}$ , atunci vom lua  $\vec{b} = \vec{AE}$ , unde  $AE = AC$  (fig. 17). Vom dovedi că dacă  $\vec{a}_1 = \vec{AB}$ , atunci

$$\vec{AD} = \vec{a}_1 + \vec{b} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2,$$

adică vectorul  $\vec{AD}$  reprezintă diferența căutată a vectorilor  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$ . Ca să demonstrăm aceasta ne bazăm pe faptul că scăderea este operația inversă adunării adică suma dintre diferență și scăzător trebuie să ne dea pe descăzut; trebuie deci să avem:

$$\vec{AD} + \vec{AC} = \vec{AB};$$

din fig. 17 se deduce că ultima egalitate are în adevăr loc. Astfel definită, scăderea este corectă și noi obținem modul de reprezentare al unui vector opus unui vector dat cu ajutorul schimbării semnului vectorului dat. Prin urmare, dacă avem expresia

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 - \vec{a}_4 - \vec{a}_5 + \dots$$

ea poate fi reprezentată sub forma

$$\vec{a}_1 + (-\vec{a}_2) + \vec{a}_3 + (-\vec{a}_4) + (-\vec{a}_5) + \dots$$

adică se poate reduce operația de scădere la aceea de adunare a vectorilor înlocuind vectorii care se scad  $\vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ , prin vectorii de sens contrar  $-\vec{a}_2, -\vec{a}_4, -\vec{a}_5$ .

Este ușor de văzut că folosind reprezentarea vectorilor după formula (1.9) vom reduce ușor scăderea vectorilor la scăderea proiecțiilor lor.

**§ 7. Reprezentarea vectorială și analitică a forțelor.** În § 4 ne-am ocupat de vectorul liber, care se poate deplasa paralel cu el însuși, fixând originea lui în orice punct din spațiu. În ceea ce privește forța, am văzut în § 2 că într-un solid absolut rigid, forța poate fi mutată dar numai în lungul suportului ei; vom afla în capitolele următoare ale cursului de statică (§ 39), că deplasarea forței paralel cu ea însăși (translația) este imposibilă fără a adăuga forțe suplimentare. Celelalte definiții și teoreme date, din teoria vectorilor, pot fi însă extinse direct și asupra forțelor. De aceea, o dată cu vectorii liberi, vom studia și acei vectori a căror deplasare paralelă cu ei înșiși este restrânsă și anume vom studia vectorii care pot să ațunece numai de-a lungul suportului lor ca și forțele aplicate asupra unui solid. Acest fel



de vectori poartă denumirea de *vectori alunecători* (*vectori glisanți*). Din această definiție rezultă că: *o forță aplicată unui solid rigid, este un vector alunecător*.

Deoarece într-un solid absolut rigid forța este un vector alunecător, iar exemplul cel mai simplu de vector este segmentul de dreaptă, vom reprezenta ca în § 2 fiecare forță, aplicată unui solid absolut rigid, cu un segment de dreaptă (cu săgeată) avînd aceeași direcție și același sens cu forța; lungimea acestui segment o vom lua la o anumită scară, egală cu modulul vectorului forță reprezentat. Acest segment cu săgeată poate fi deplasat în lungul drepte care coincide cu direcția segmentului, în orice punct al acestei drepte.

Pretutindeni în această carte vom nota vectorul forță prin  $\vec{F}$ . Dacă însă vom avea nu o singură forță ci mai multe, atunci la notarea fiecărei forțe vom adăuga literei  $\vec{F}$  un indice corespunzător forței studiate. Pentru reprezentarea rezultantei cîtorva forțe, ne vom folosi ca pentru o singură forță de litera  $\vec{F}$ , fără indice. Astfel, de exemplu, dacă în punctul  $A$  al corpului sînt aplicate cîteva forțe  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ , atunci rezultanta o vom nota prin  $\vec{F}$ , deci vom avea:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_n \vec{F}_n. \quad (1.12)$$

Deoarece forța nu poate fi mutată în afara suportului ei, pentru determinarea completă a forței, este necesar să se indice o dată cu mărimea forței și suportul ei, și anume este suficient să se indice un punct oarecare al suportului. Vom introduce un nou tip de vector creat prin deplasarea rectilinie dintr-un punct în altul. Fie date două puncte  $A$  și  $B$ ; este clar că deplasarea rectilinie  $\overline{AB}$  din punctul  $A$  în punctul  $B$  are modul, direcție și sens. Nu este greu de văzut de asemenea că și deplasările se compun după legea adunării geometrice, deoarece vom avea  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ , adică deplasarea în lungul liniei frînte  $ABC$  se poate înlocui prin deplasarea rectilinie  $\overline{AC}$ ; este evident că toate proprietățile adunării geometrice expuse la § 3 sînt aplicabile și la adunarea deplasărilor rectilinii. Astfel, deplasarea rectilinie este în adevăr un vector. Să considerăm un punct oarecare  $O$  în spațiu și să notăm pozițiile celorlalte puncte din spațiu prin deplasările rectilinii care trebuie efectuate pentru a trece din punctul  $O$  în punctele considerate. Prin urmare ajungem la un nou tip de vectori cu originea dată; astfel de vectori se numesc



vectori legați. Originea vectorului legat nu se poate muta în alt punct al spațiului. În mecanica teoretică vom avea de-a face cu toate cele trei tipuri de vectori: vectori liberi, alunecători și legați. Pentru a putea indica suportul forței vom lua pe acest suport un punct oarecare  $A$  pe care îl vom uni cu un punct oarecare din spațiu  $O$ , prin vectorul  $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ . Cunoscând vectorii  $\vec{F}$  și  $\vec{r}$ , vom cunoaște precis forța. Pentru mai multe forțe  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  și  $\vec{F}_3$ , ... vom avea vectorii  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_3$ , ...

Să examinăm acum sistemul fix de axe de coordonate ortogonale  $Oxyz$  cu originea într-un punct oarecare din spațiu  $O$ . Vom nota proiecțiile vectorului forței  $\vec{F}$  pe coordonatele  $Oxyz$  prin  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ; deci după formula (1.9), vom avea:

$$\vec{F} = iX + jY + kZ. \quad (1.13)$$

În cazul mai multor forțe  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ , ... după aceeași formulă (1.9), obținem:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= iX_1 + jY_1 + kZ_1, \\ \vec{F}_2 &= iX_2 + jY_2 + kZ_2, \\ \vec{F}_3 &= iX_3 + jY_3 + kZ_3, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Notînd coordonatele punctului  $A$  în raport cu axele  $Oxyz$  prin  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , avem:

$$\vec{r} = ix + jy + kz, \quad (1.15)$$

și pentru vectorii  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_3$ , ... prin analogie avem:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= ix_1 + jy_1 + kz_1, \\ \vec{r}_2 &= ix_2 + jy_2 + kz_2, \\ \vec{r}_3 &= ix_3 + jy_3 + kz_3, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Din formulele (1.6) și (1.5) deducem:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (1.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{F}, \\ \cos \beta &= \frac{Y}{F}, \\ \cos \gamma &= \frac{Z}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$



Aplicînd la formula (1.12) formulele (1.10) vom găsi pentru proiecțiile forței rezultante, expresiile ce urmează:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \sum_n X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum_n Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots = \sum_n Z_n. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Înlocuind aceste expresii în formula (1.17) vom obține:

$$F = \left( \sum_n X_n \right)^2 + \left( \sum_n Y_n \right)^2 + \left( \sum_n Z_n \right)^2. \quad (1.20)$$

Este evident că cosinușii directori ai unghiurilor suportului forței  $\vec{F}$ , cu axele de coordonate, sînt determinați cu ajutorul formulei (1.18); de aceea, cunoscînd coordonatele  $(x, y, z)$  ale punctului prin care trece suportul forței și folosind geometria analitică se poate oricînd scrie ecuația suportului forței  $\vec{F}$ .

§ 8. Exemple. 1. Vectorul  $\vec{a}$  formează cu cele trei axe ale sistemului ortogonal de coordonate unghiurile  $\alpha$  egale între ele; să se determine acest unghi  $\alpha$ .

Deoarece suma pătratelor cosinușilor unghiurilor vectorilor cu axele de coordonate este egală cu 1, trebuie ca:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha = 1$$

adică  $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . De aici găsim că:  $\alpha = 54^\circ 44' 8''$  și  $\alpha = 125^\circ 15' 52''$ .

2. Trei vectori liberi  $\vec{a}_1 (1, -2, 3)$ ;  $\vec{a}_2 (-4, 5, 8)$ ;  $\vec{a}_3 (-2, 1, 0)$  sînt dați prin proiecțiile lor pe axele ortogonale de coordonate  $Oxyz$ . Să se determine un al patrulea vector  $\vec{a}_4$ , astfel încît rezultanta celor patru vectori să fie egală cu zero.

Deoarece avem  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = 0$ , rezultă:

$$1 - 4 - 2 + a_{4x} = 0, \quad -2 + 5 + 1 + a_{4y} = 0, \quad 3 + 8 + 0 + a_{4z} = 0;$$

deci, vom avea:

$$a_{4x} = 5, \quad a_{4y} = -4, \quad a_{4z} = -11.$$

Astfel obținem:

$$a_4 = \sqrt{5^2 + 4^2 + 11^2} = \sqrt{162},$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{162}}, \quad \cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{162}}, \quad \cos \gamma = \frac{-11}{\sqrt{162}}.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$$a_4 = 12,728,$$

$$\alpha = 66^\circ 52' 08'', \quad \beta = 108^\circ 19' 00'', \quad \gamma = 149^\circ 47' 46''.$$



3. Pe o dreaptă orizontală sînt fixate două dispozitive de prindere  $A$  și  $B$ , la distanța  $l$  între ele. În dispozitivele de prindere sînt fixate capetele unui fir flexibil, a cărui lungime între punctele  $A$  și  $B$  este egală cu  $2l$ . Pe fir se poate rostogoli fără frecare un scripete mobil de care este atînat un corp; greutatea corpului și a scripetelui este egală cu  $P$ . Să se găsească poziția de echilibru a scripetelui și tensiunea firului în această poziție. Greutatea firului este atît de mică față de greutatea  $P$  încît poate fi neglijată.

În rezolvarea cu ajutorul mecanicii teoretice a problemelor care se referă la un sistem material oarecare, se introduce destul de frecvent condiția ca anumite părți ale acestui sistem să se considere fără greutate. Datorită acestei condiții se pot face simplificări apreciabile scoțînd în evidență partea esențială în rezolvarea problemelor. Astfel, de exemplu, în problema de mai sus, tensiunea firului depinde desigur și de greutatea, lui proprie, dar evaluarea părții de tensiune care depinde de greutatea firului este prea complicată și chiar inaccesibilă pentru cei cărora li se adresează cartea, deoarece studiul echilibrului firului nu este expus aici. Totuși, fără a efectua vreun calcul este clar că dacă greutatea  $P$  întrece cu mult greutatea firului, partea principală a tensiunii firului depinde de greutatea  $P$  și nu de greutatea firului. Astfel, neglijînd greutatea firului, nu introducem în calcule o eroare prea mare și simplificăm totodată în mare măsură problema. În § 3, la expunerea modului de verificare experimentală a regulii paralelogramului, am făcut deja o simplificare analogă; în paragrafele următoare vom recurge uneori la asemenea simplificări.

Să presupunem că dimensiunile scripetelui pot fi neglijate în comparație cu lungimea firului; atunci, dacă se notează cu  $C$  centrul roții scripetelui și vom deplasa scripetele lăsînd firul întins, locul geometric al punctului  $C$  va fi o elipsă cu focarele în punctele  $A$  și  $B$ . Este evident, că cea mai joasă poziție a punctului  $C$  se află la capătul axei verticale a elipsei cînd vom avea  $CA=CB=l$ . Sub influența greutății  $P$ , scripetele trebuie să ajungă în poziția cea mai joasă cînd vom avea  $CA=CB$ ; în acest caz triunghiul  $ABC$  va deveni echilateral, deci cu unghiurile egale cu  $60^\circ$ . De aceea, asupra elementului de fir vor acționa în punctul  $C$  de-a lungul lui  $CA$  și  $CB$ , tensiuni egale, a căror mărime necunoscută încă o vom nota cu  $T$ . Este evident că se pot înlocui aceste tensiuni după regula paralelogramului, care în cazul de față devine romb, cu o singură rezultantă; această rezultantă va fi îndreptată de-a lungul diagonalei rombului, vertical în sus și pătratul ei va fi egal cu  $T^2 + T^2 + 2TT \cos 60^\circ = 3T^2$ . Ca să existe echilibru, această rezultantă trebuie să fie egală cu  $P$ , adică trebuie să aibă loc egalitatea  $T\sqrt{3}=P$ , de unde  $T=\frac{P}{\sqrt{3}}$ . Observăm că dacă se proiectează rezultanta  $P$  pe direcția  $CA$  sau  $CB$ , obținem:  $P \cos 30^\circ = \frac{P\sqrt{3}}{2}$ .

În acest fel componentele forței  $P$  sînt egale cu  $\frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{P\sqrt{3}}{3}$ , iar proiecțiile forței  $P$  pe direcțiile componentelor sînt egale cu  $\frac{P\sqrt{3}}{2}$ . Acest lucru confirmă încă o dată faptul că proiecțiile și componentele unui vector nu sînt în general egale între ele (v. § 6).



## CAPITOLUL II

### MOMENTUL UNEI FORȚE ȘI PRODUSUL VECTORIAL

§ 9. Bazele fizice ale introducerii momentului forței. Din fizica elementară ne este cunoscut că pentru cercetarea condițiilor de echilibru a pîrghiei, este necesar să se țină seamă

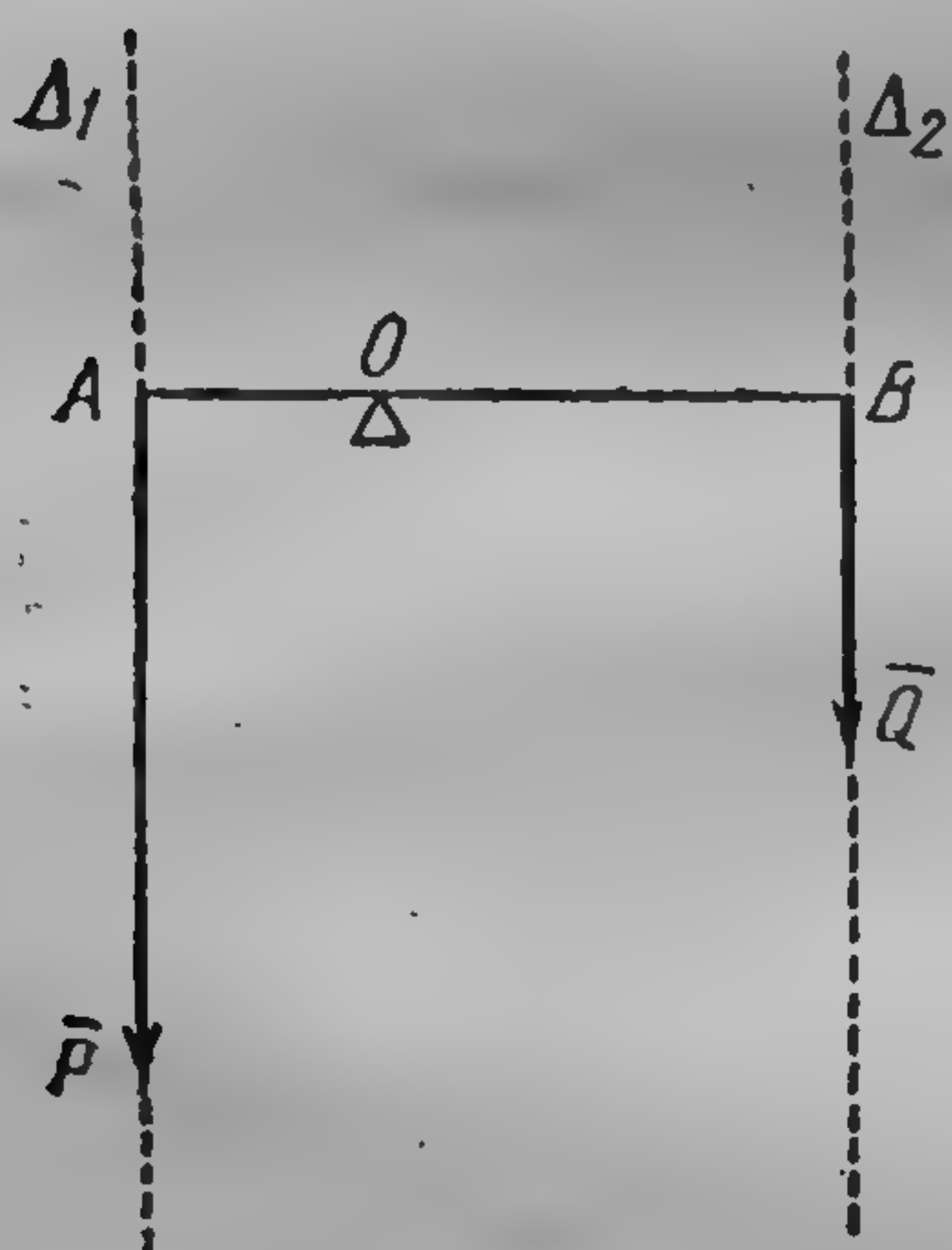


Fig. 18

nu numai de mărimea forțelor care acționează asupra pîrghiei ci și de distanța de la punctul de sprijin al pîrghiei la suporturile acestor forțe.

În adevăr, să studiem de exemplu pîrghia de ordinul întîi  $AOB$  formată dintr-o bară perfect rigidă  $AOB$ , cu punctul de sprijin  $O$ , la ale cărei capete  $A$  și  $B$  sînt aplicate perpendicular pe bara  $AB$  forțele  $\bar{P}$  și  $\bar{Q}$  (fig. 18). Fie  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  suporturile forțelor  $\bar{P}$  și  $\bar{Q}$ . În punctul  $O$  pîrghia are un punct de sprijin, adică pîrghia se poate roti în jurul punctului  $O$ , fără să poată aluneca în lungul ei. Să amintim că perpendicularele  $OA$  și  $OB$

coborîte din punctul de sprijin  $O$  pe suporturile  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  ale forțelor  $\bar{P}$  și  $\bar{Q}$  se numesc brațele pîrghiei. Din fizica elementară se cunoaște că, condiția de echilibru a pîrghiei de ordinul întîi considerate se poate exprima în felul următor:

*Pentru ca pîrghia de ordinul întîi să fie în echilibru, punctul său de sprijin trebuie să împartă distanța dintre punctele de aplicație a forțelor în părți invers proporționale cu mărimea acestora.*



Astfel, trebuie să avem:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{Q}{P},$$

sau

$$P \cdot OA = Q \cdot OB.$$

Dacă suportul  $\Delta_1$  al forței  $\bar{P}$  nu este perpendicular pe dreapta  $OA$ , cum este reprezentat, de exemplu, în fig. 19, atunci putem descompune forța  $P$  în componenta  $\bar{P}'$ , perpendiculară pe dreapta  $OA$  și componenta  $\bar{P}''$ , îndreptată de-a lungul dreptei  $OA$ . De-

oarece pîrghia nu poate aluneca în lungul ei, componenta  $\bar{P}''$  nu poate avea vreo influență asupra echilibrului pîrghiei, acțiunea ei fiind anulată de reacțiunea orizontală născută în punctul de sprijin  $O$ , și din forța  $\bar{P}$  rămîne a fi luată în calcul numai o singură componentă  $\bar{P}'$ , aplicată în punctul  $A$  și perpendiculară

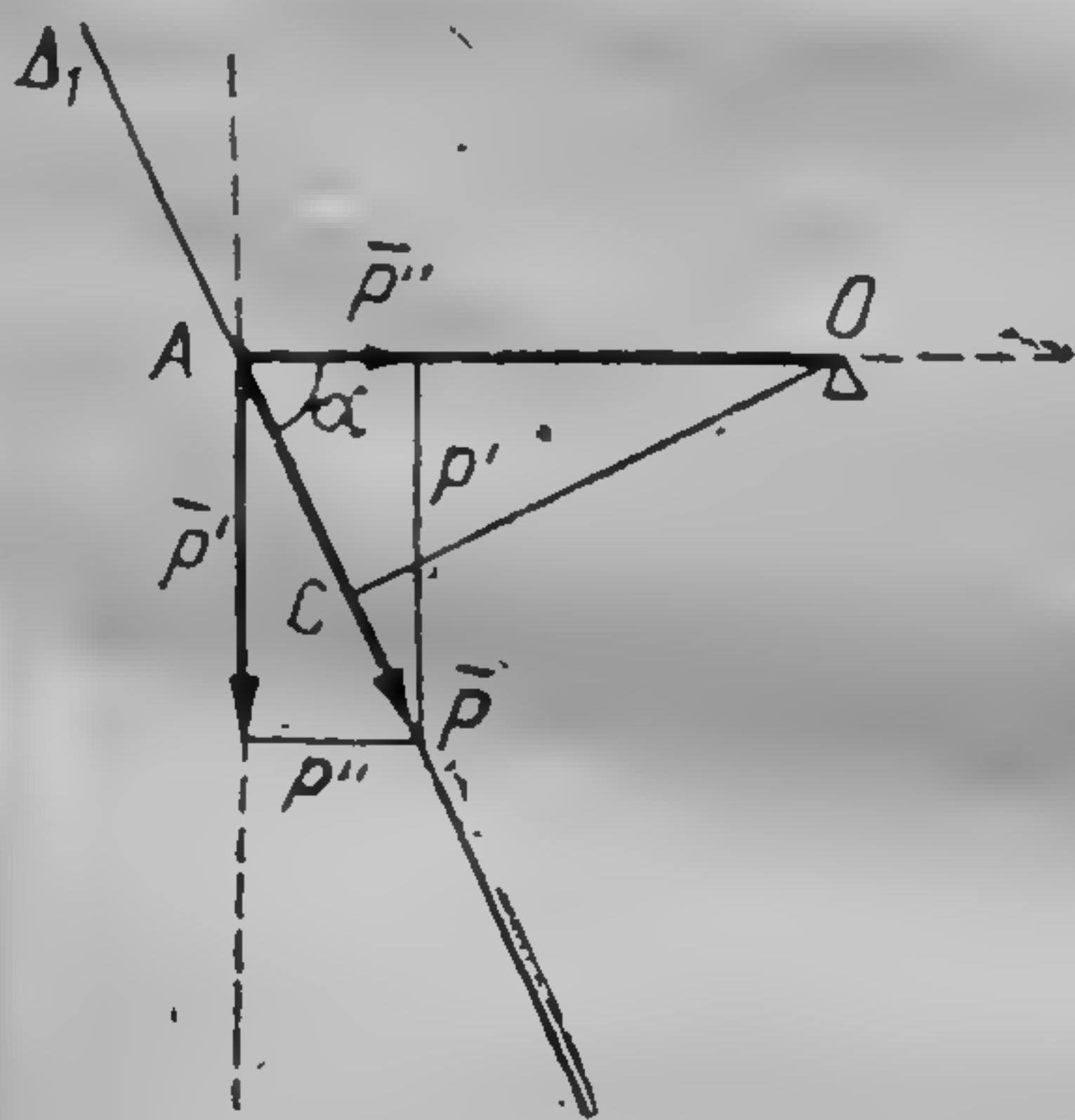


Fig. 19

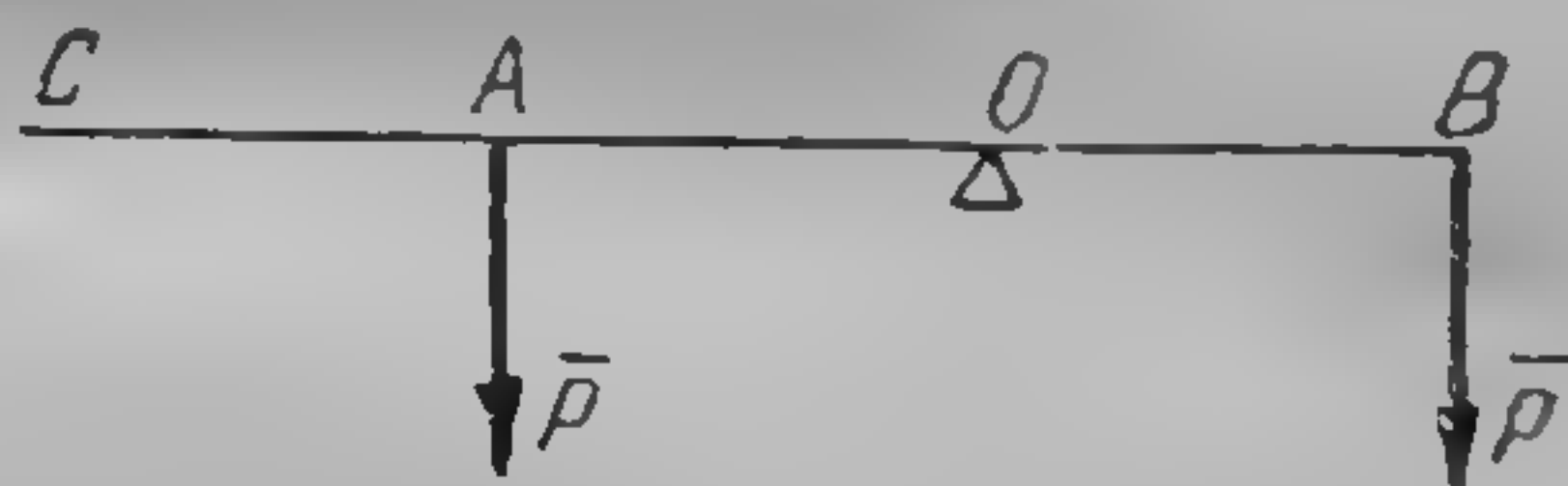


Fig. 20

pe dreapta  $OA$ . Astfel, în acest caz, în locul produsului  $P \cdot OA$  trebuie pus în partea stîngă a ultimei relații produsul  $P' \cdot OA$ . Notînd cu  $\alpha$  unghiul dintre dreapta  $OA$  și forța  $\bar{P}$ , este ușor de dedus că  $P' = P \sin \alpha$  și partea stîngă a ultimei egalități se poate înlocui cu produsul  $P \cdot OA \sin \alpha$ . Deoarece  $OA \sin \alpha = OC$  este egal cu lungimea perpendicularei coborîtă din  $O$  pe dreapta  $\Delta_1$  sau egal cu brațul pîrghiei, noi tragem concluzia că și în cazul cel mai general, pentru echilibrul pîrghiei de ordinul întîi, este necesar ca produsele forțelor cu brațele, respectiv din stînga și din dreapta să fie egale între ele. Nu e greu să ne convingem că același lucru se petrece și la pîrghia de ordinul al doilea. În acest fel în condiția de echilibru a pîrghiilor nu intervin direct mărimile forțelor ci produsul forțelor cu brațele respective; echilibrul se va menține, de exemplu, micșorînd forța, dar mărin-



în același timp brațul astfel încît produsul forței cu brațul respectiv să rămînă constant. Dacă însă acest produs se va mări pentru un capăt oarecare al pîrghiei, pîrghia se va roti în jurul punctului său de sprijin.

Această condiție de echilibru a pîrghiei era cunoscută încă din antichitate. Vom cita aici raționamentul care aparține lui Arhimede (secolul III î.e.n.).

Din experiența zilnică se poate considera ca evident că două forțe egale  $\bar{P}$ , aplicate la capetele  $A$  și  $B$  ale pîrghiei cu brațe egale  $AOB$ , lasă pîrghia în echilibru (fig. 20); acest fapt se poate explica prin aceea că cele două forțe  $\bar{P}$  aplicate în punctele  $A$  și  $B$ , se reduc la o singură forță  $2\bar{P}$ , aplicată în punctul  $O$ , care apasă numai pîrghia spre punctul său de sprijin, dar nu o poate roti. Să luăm  $AC=AO$  și să înlocuim forța  $\bar{P}$  aplicată în punctul  $A$  prin două forțe egale cu  $\frac{\bar{P}}{2}$  și aplicate în punctele  $O$  și  $C$ , ceea ce este posibil deoarece conform celor expuse pînă acum, ambele forțe se reduc la o singură forță  $\bar{P}$  aplicată în punctul  $A$ . Dar forța  $\frac{\bar{P}}{2}$ , aplicată, în  $O$ , apasă doar pîrghia în punctul de sprijin  $O$  și prin urmare nu influențează asupra echilibrului pîrghiei. În acest fel rămîn numai forțele  $\bar{P}$  în punctul  $B$  și  $\frac{\bar{P}}{2}$  în punctul  $C$ , sub a căror acțiune pîrghia trebuie să fie în echilibru; de unde se vede că:

$$\frac{P}{2} \cdot OC = P \cdot OB.$$

Acest mod de raționare se poate continua și mai departe.

**§ 10. Momentul unei forțe în raport cu un punct.** În acest fel, din studiul echilibrului pîrghiei a reieșit nevoia de a se studia o dată cu forțele și produsul modulului forțelor cu brațele respective. Generalizînd puțin cele expuse considerăm o forță  $\bar{F}$  și un punct oarecare  $O$  din spațiu; coborîm din punctul  $O$  o perpendiculară pe suportul forței  $\bar{F}$  și fie  $d$  lungimea acestei perpendiculare. Convenim să examinăm produsele  $Fd$ , considerîndu-le ca modulele unor vectori. Pentru a clarifica această posibilitate trebuie să demonstrăm că în primul rînd produsele  $Fd$  pot fi considerate ca modulele unor mărimi care au direcție în spațiu



și în al doilea rând că aceste mărimi se pot aduna geometric. Ca să ne convingem de primul fapt vom reveni la pîrghie și ne vom referi, de exemplu, la fig. 18. Deoarece forța  $\bar{P}$  tinde să producă o rotație în jurul punctului  $O$  în sens contrar acelor unui ceasornic și forța  $\bar{Q}$  în sensul acelor unui ceasornic, atunci, conform condiției expuse la sfîrșitul § 4, pentru forța  $\bar{P}$ , sensul pozitiv al axei de rotație perpendiculare pe planul desenului va fi către fața cititorului, iar pentru forța  $\bar{Q}$  va fi invers. Să convenim să construim în sensul pozitiv al axei de rotație un segment care reprezintă simbolic, la o anumită scară, produsul  $Fd$ . În acest fel vom obține segmente, care reprezintă simbolic produsele  $Fd$  și care au direcții determinate în spațiu. Ca să ne convingem că aceste segmente sînt vectori, rămîne să arătăm că ele se pot aduna geometric. Pentru aceasta să considerăm un punct oarecare  $O$  și o serie de forțe coplanare  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$ . Să construim pentru aceste forțe, prin procedeul arătat mai sus, segmente cu lungimile  $F_1d_1, F_2d_2, F_3d_3, \dots$ ; toate aceste segmente vor avea o origine comună  $O$ . Deoarece toate aceste construcții sînt convenționale, putem impune acestor segmente încă o condiție nouă care nu este în contradicție cu cele anterioare, și anume, să admitem că aceste segmente se pot aduna geometric. Avantajul introducerii acestei noi condiții va reieși clar din cele ce vor urma. Astfel, mai departe, la expunerea teoremelor lui Varignon (§§ 21, 23 și 24) a momentului cuplului de forțe (§ 25), a adunării cuplurilor de forțe (§ 36) la reducerea unui sistem general de forțe la un sistem mai simplu (§§ 47 și 48) etc., vom vedea că suma geometrică a acestor segmente convenționale are importanță în mecanică și ne vom convinge că ea simplifică în mare măsură expunerea a foarte multe capitole nu numai din statică ci și din cinematică și dinamică. Segmentele astfel definite au lungimi, direcții și sensuri și ele se pot aduna geometric. Deci aceste segmente sînt vectori. Acești vectori au căpătat denumirea de *momente ale forțelor în raport cu punctul  $O$* . Suma geometrică a momentelor forțelor se numește *moment rezultat al sistemului de forțe*. Vom nota vectorul-moment al forței prin  $\bar{M}$ . Tot ce s-a spus anterior, se poate rezuma în definiția generală a momentului unei forțe în raport cu un punct.

*Momentul forței în raport cu un punct este un vector așind ca origine punctul dat; modulul acestui vector este egal cu produsul modulului forței cu lungimea perpendicularei coborîtă din*



punctul dat pe suportul forței; momentul forței este dirijat perpendicular pe planul determinat de suportul forței și punctul dat și este orientat astfel încât un observator care stă în lungul vectorului să vadă forța rotind planul în sens contrar acelor de ceasornic.

Din această definiție urmează că momentul forței este un vector legat.

Introducând noțiunea de moment al unei forțe putem exprima mai simplu condiția de echilibru a pîrghiei. Deoarece această condiție de echilibru constă în faptul că modulul momentului

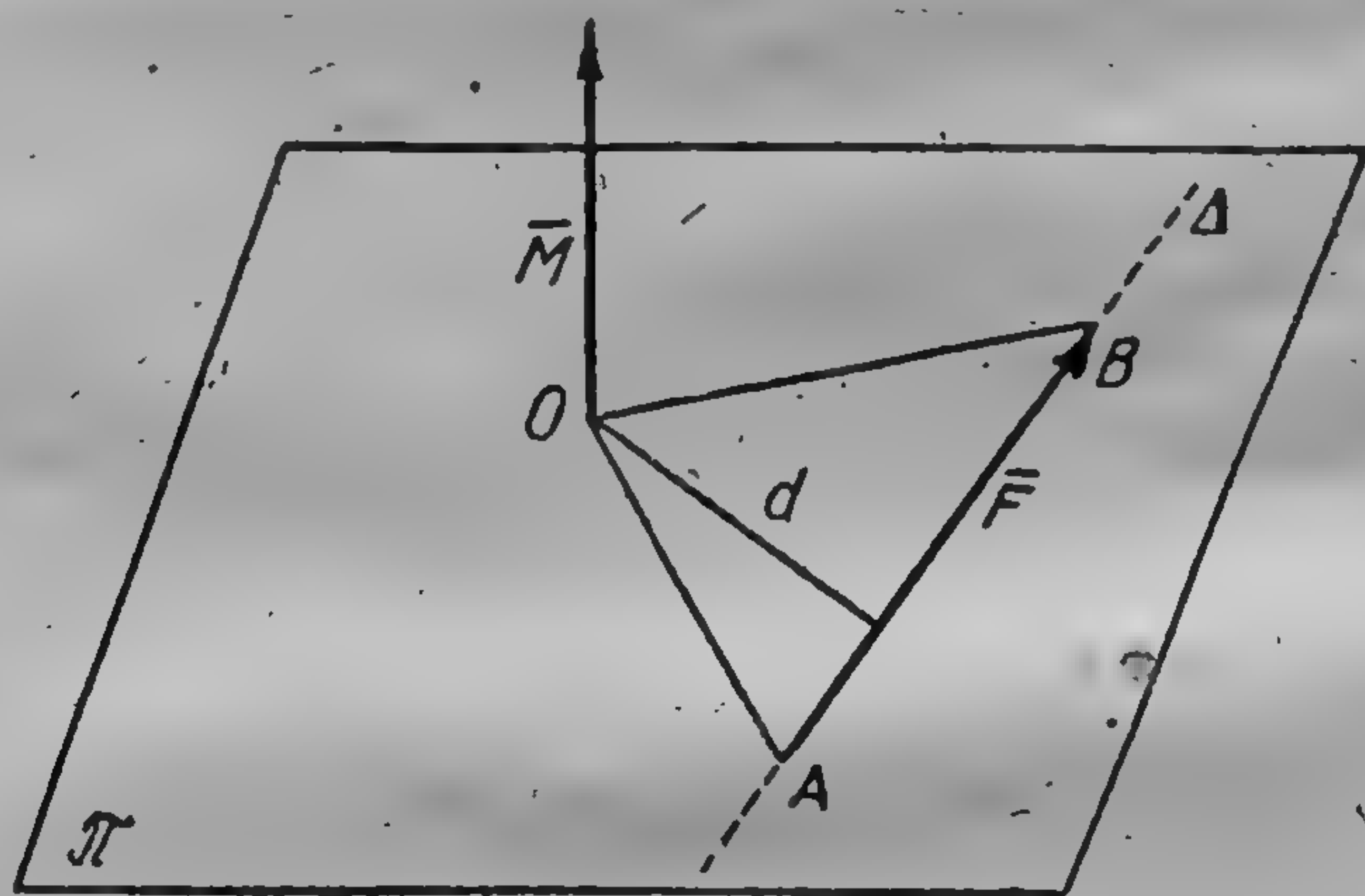


Fig. 21

forței  $\vec{P}$  în raport cu punctul  $O$  (fig. 18), este egal cu modulul momentului forței  $\vec{Q}$  în raport cu același punct  $O$ , iar vectorii-moment au sensuri opuse, atunci o altă exprimare mai simplă și mai concisă a condiției de echilibru a pîrghiei este: că, pentru echilibrul pîrghiei, momentul rezultat, în raport cu punctul de sprijin al ambelor forțe aplicate pîrghiei, trebuie să fie egal cu zero. În fig. 21 sînt reprezentate: punctul  $O$ , forța  $\vec{F}$ , planul  $\pi$  care trece prin  $\vec{F}$  și  $O$ , momentul  $\vec{M}$ ; se vede că momentul  $\vec{M}$  este orientat conform definiției. Pentru modulul vectorului  $\vec{M}$  avem  $M = Fd$ . Vom preciza încă o dată că această reprezentare a momentului printr-un segment este pur convențională, ca și reprezentarea forței printr-un segment de dreaptă. Vom avea  $Fd = 2 \cdot \text{aria } \triangle AOB$ , iar modulul  $M$  poate să reprezinte mărimea suprafeței  $Fd$  numai în mod convențional, dacă vom conveni să



reprezentăm unitatea de suprafață printr-o anumită unitate de lungime.

Triunghiul  $OAB$  se numește triunghiul momentelor. Este evident că suprafața acestui triunghi nu se va schimba dacă vom deplasa forța de-a lungul suportului ei  $\Delta$ ; astfel, definiția momentului nu este în contradicție cu proprietatea că forța aplicată unui solid absolut rigid este un vector alunecător. Este evident de asemenea, că în raport cu orice punct care se găsește pe suportul forței, momentul forței va fi egal cu zero.

§ 11. Momentul unei forțe în raport cu o axă. Să considerăm o axă oarecare  $D$  și o forță  $\vec{F}$  (fig. 22). Pe axa  $D$  să luăm arbi-

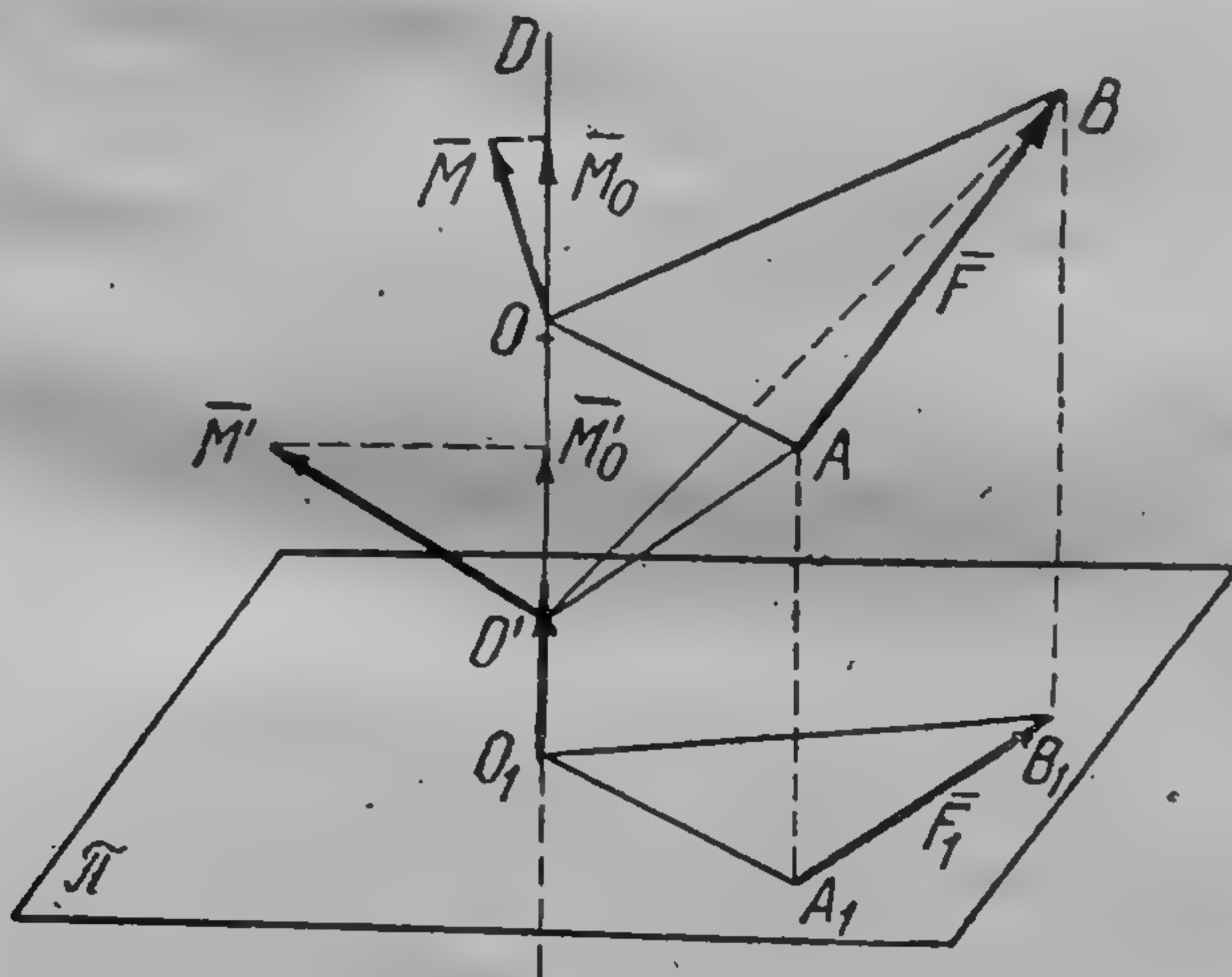


Fig. 22

trar două puncte  $O$  și  $O'$  și să considerăm momentele  $\vec{M}$  și  $\vec{M}'$  ale forței  $\vec{F}$  în raport cu aceste puncte  $O$  și  $O'$ . Evident că suprafețele triunghiurilor  $OAB$  și  $O'AB$  în general nu vor fi egale între ele, așa că  $M \neq M'$ . Să proiectăm momentul  $\vec{M}$  și momentul  $\vec{M}'$  pe axa  $D$ , vom obține proiecțiile  $\vec{M}_0$  și  $\vec{M}_0'$ . Să demonstrăm că întotdeauna  $M_0 = M_0'$ .

In adevăr avem:

$$M_0 = M \cos(\widehat{\vec{M}, D})$$

$$M_0' = M' \cos(\widehat{\vec{M}', D}).$$



Ducem printr-un punct oarecare  $O_1$  de pe dreapta  $D$  planul  $\pi$  perpendicular pe dreapta  $D$ . Deoarece vectorul  $\vec{M}$  este perpendicular pe planul triunghiului  $OAB$ , iar vectorul  $\vec{M}'$  este perpendicular pe planul triunghiului  $O'AB$ , unghiurile dintre dreapta  $D$  și vectorii  $\vec{M}$  și  $\vec{M}'$  sînt egale cu unghiurile dintre planul  $\pi$  și planurile triunghiurilor  $OAB$  și  $O'AB$  și vom avea:

$$M_0 = 2 \text{ aria } \Delta OAB \cos(\widehat{\vec{M}, D}) = 2 \text{ aria } \Delta O_1 A_1 B_1,$$

$$M'_0 = 2 \text{ aria } \Delta O'AB \cos(\widehat{\vec{M}', D}) = 2 \text{ aria } \Delta O_1 A_1 B_1,$$

adică  $M_0 = M'_0$ ; ceea ce trebuie demonstrat. Astfel proiecția momentului unei forțe, în raport cu un punct oarecare de pe o axă, pe această axă, nu depinde de poziția punctului dat pe axă. De aici rezultă următoarea definiție:

*Momentul unei forțe în raport cu o axă, este proiecția pe acea axă a momentului forței în raport cu orice punct de pe axă.*

Este bine să fie menționat următorul caz care se întâlnește des în practică și anume cazul cînd forța este situată într-un plan perpendicular pe axă. Luînd atunci ca punct al axei pentru construirea vectorului moment, urma acestei axe pe planul dat, vom găsi că triunghiul momentului va fi și el cuprins în planul considerat; momentul forței va avea ca suport această axă, iar înălțimea triunghiului momentelor va coincide cu distanța de la suportul forței pînă la axă. Prin urmare:

*Dacă forța este situată într-un plan perpendicular pe axă, atunci modulul momentului forței în raport cu axa este egal cu produsul modulului forței cu distanța dintre suportul forței și axă.*

Pentru ca momentul unei forțe în raport cu o axă să fie egal cu zero, este necesar ca momentul forței, luat în raport cu orice punct de pe axă, să fie perpendicular pe acea axă. Evident că, pentru aceasta, este necesar ca axa și triunghiul momentelor să se găsească în același plan sau cu alte cuvinte:

*Pentru ca momentul unei forțe în raport cu o axă să fie egal cu zero, este necesar ca forța și axa să fie coplanare.*

În cele ce urmează vom întîlni momentele unei forțe în raport cu puncte și axe; drept punct vom lua adesea originea  $O$  a coordonatelor și drept axe — axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  ale sistemului ortogonal de coordonate  $Oxyz$ .

În practică, pentru calculul momentului forței în raport cu o axă se folosește de obicei proprietatea, că momentul forței  $\vec{F}$  în



raport cu o axă (fig. 22) este egal cu momentul proiecției ei  $\bar{F}_1$  pe planul  $\pi$  — perpendicular pe axă — în raport cu axa dată.

§ 12. Produsul vectorial. Înlocuind în definiția momentului unei forțe, vectorul forță printr-un alt vector oarecare, de exemplu, prin vectorul cantității de mișcare, vom obține momentul cantității de mișcare etc. Toate aceste momente, au o întreagă serie de proprietăți generale care se pot studia cu ajutorul produsului vectorial.

Fie dați doi vectori liberi,  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ . Să mutăm acești vectori într-un punct arbitrar  $A$  din spațiu și să construim pe ei paralelogramul  $ABDC$  așa cum se arată în fig. 23. Dintre cele două fețe ale planului paralelogramului vom considera pozitivă acea față

pe care trebuie să stăm, pentru ca trecând de la primul vector  $\bar{a}$ , la al doilea vector  $\bar{b}$ , să ne deplasăm în sens pozitiv, adică în sens contrar acelor de ceasornic. În locul acestei construcții se mai poate utiliza și următoarea: prin extremitatea vectorului  $\bar{a}$ , ducem al doilea vector  $\bar{b}$ , astfel încât originea vectorului  $\bar{b}$  să

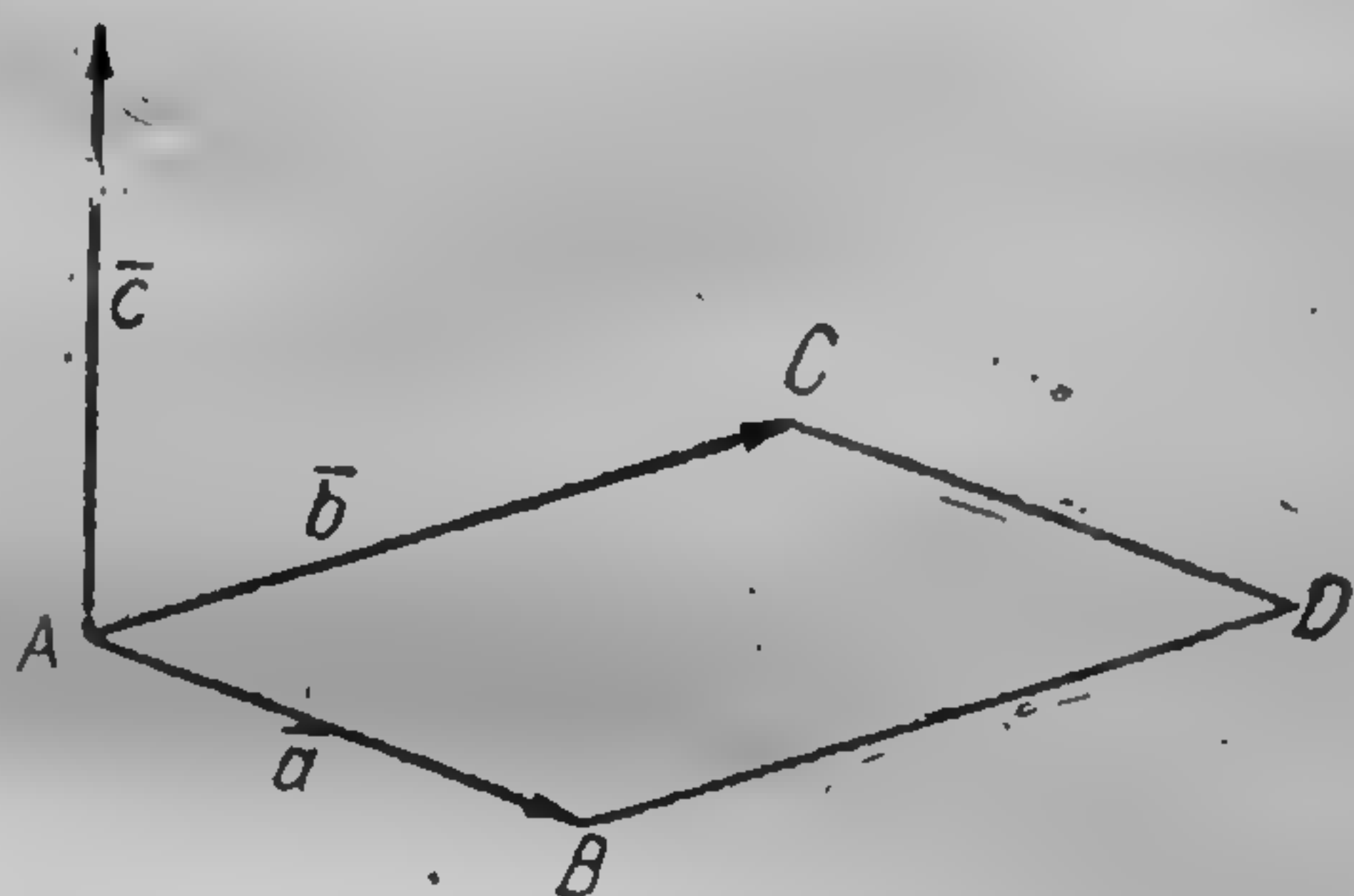


Fig. 23

coincidă cu extremitatea primului vector și completăm linia frântă obținută  $ABD$  cu două laturi pînă obținem paralelogramul  $ABDC$ . Vom considera ca pozitivă acea față a planului paralelogramului, care va rămîne în partea mîinii stîngi, dacă vom ocoli acea suprafață mișcîndu-ne la început de-a lungul primului vector și apoi de-a lungul celui de al doilea vector. Acest al doilea mod de construcție va fi folosit mai jos la § 13, la reprezentarea momentului forței printr-un produs vectorial. Dacă considerăm  $\bar{b}$  primul vector și  $\bar{a}$  al doilea vector, atunci partea pozitivă va deveni cealaltă față a planului paralelogramului. Determinăm aria paralelogramului  $ABDC$  și convenim s-o reprezentăm în mod simbolic prin segmentul  $\bar{c}$  avînd lungimea egală cu aria paralelogramului și construindu-l în partea pozitivă a planului paralelogramului, perpendicular pe suprafața



paralelogramului (reprezentăm unitatea de suprafață printr-o anumită unitate de lungime). Impunem segmentelor  $\vec{c}$  astfel formate, încă o nouă condiție, aceea că ele pot fi adunate geometric; această nouă condiție nu este în contradicție cu definiția segmentului  $\vec{c}$ , și mai jos, în acest paragraf va fi clarificat sensul acestor adunări. În același timp se va lămurii de asemenea că operația de obținere a segmentului  $\vec{c}$  din vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , are proprietați caracteristice înmulțirii. De aceea segmentul  $\vec{c}$  va fi un vector, iar modul de obținere a vectorului  $\vec{c}$  din vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se numește *înmulțire vectorială*; înmulțirea vectorială se notează cu semnul  $\times$ :

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}. \quad (2.1)$$

Vectorul  $\vec{c}$  se numește *produsul vectorial* al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Așadar *produsul vectorial a doi vectori, este vectorul al cărui modul este egal cu aria paralelogramului construit pe acești vectori și care este dirijat perpendicular pe planul acestui paralelogram, dinspre partea pozitivă a lui.*

Deoarece, din cauza schimbării ordinii vectorilor se schimbă partea pozitivă a planului paralelogramului, vom avea:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}; \quad (2.2)$$

într-adevăr vectorul  $\vec{b} \times \vec{a}$  este egal ca modul cu vectorul  $\vec{a} \times \vec{b}$  dar dirijat în sens contrar.

Se știe din trigonometrie că aria paralelogramului este egală cu produsul laturilor lui înmulțit cu sinusul unghiului format de ele. De aceea, notînd unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  prin  $\varphi$  vom avea:

$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi \quad (\pi \geq \varphi \geq 0). \quad (2.3)$$

De aici rezultă că produsul vectorial a doi vectori paraleli este egal cu zero pentru că pentru ei: sau  $\varphi = 0$ , dacă sînt dirijați în același sens sau  $\varphi = \pi$  dacă sînt dirijați în sens contrar. Reciproc:

*Dacă produsul vectorial a doi vectori este egal cu zero, atunci acești vectori sînt paraleli între ei.*

Dacă modulele  $a$  și  $b$  ale vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sînt egale între ele, iar vectorii sînt perpendiculari între ei, atunci  $|\vec{a} \times \vec{b}| = a^2$ .



Aplicând aceste reguli la vectorii unitari  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , vom obține formulele:

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0, \quad \bar{j} \times \bar{j} = 0, \quad \bar{k} \times \bar{k} = 0; \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{i} \times \bar{j} &= -\bar{j} \times \bar{i} = \bar{k}, \\ \bar{j} \times \bar{k} &= -\bar{k} \times \bar{j} = \bar{i}, \\ \bar{k} \times \bar{i} &= -\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Formulele (2.5) rezultă din considerentul că modulele vectorilor  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  sînt egale cu unitatea, prin urmare produsul  $\bar{i} \times \bar{j}$  are modulul egal cu aria pătratului construit pe vectorii unitari  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$ , adică egal cu unitatea; el este dirijat în sensul pozitiv al axei  $Oz$ .

Vedem că pentru produsul vectorial regula comutativității este aplicabilă în afară de semn, deoarece prin schimbarea ordinii factorilor, produsul vectorial are același modul și aceeași direcție, dar își schimbă semnul.

În continuare vom dovedi că produsul vectorial este distributiv. Totodată, produsele vectoriale se vor aduna geometric și prin aceasta se confirmă că produsul vectorial  $\bar{c}$  este în adevăr un vector.

Tot ceea ce s-a expus anterior, îndreptățește denumirea de *produs vectorial* care este dată operației de obținere a vectorului  $\bar{c}$  din vectorii  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ , conform formulei (2.1).

Pentru a dovedi că produsul vectorial este distributiv să considerăm trei vectori oarecare  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$  și  $\bar{b}$  și să demonstrăm că

$$\bar{a}_1 \times \bar{b} + \bar{a}_2 \times \bar{b} = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \times \bar{b}.$$

Pentru simplificare introducem notațiile:

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{d}, \quad \bar{a}_1 \times \bar{b} = \bar{c}_1, \quad \bar{a}_2 \times \bar{b} = \bar{c}_2, \quad \bar{d} \times \bar{b} = \bar{c};$$

cu aceste notații relația precedentă apare sub forma:

$$\bar{c}_1 + \bar{c}_2 = \bar{c}.$$

Să examinăm mai întâi cazul cînd cei trei vectori  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$  și  $\bar{b}$  nu sînt paraleli cu același plan. Să-i mutăm într-un punct oarecare din spațiu  $A$  și să construim pe ei paralelipipedul



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 24). Ducem un plan perpendicular pe muchia  $AA_1$  a paralelipipedului. La intersecția cu muchiile paralelipipedului el formează o secțiune perpendiculară  $LMNP$  care este un paralelogram cu laturile  $h_1$  și  $h_2$  și diagonala  $H$ . Să rotim acest paralelogram în planul său cu  $90^\circ$  în jurul punctului  $L$  în

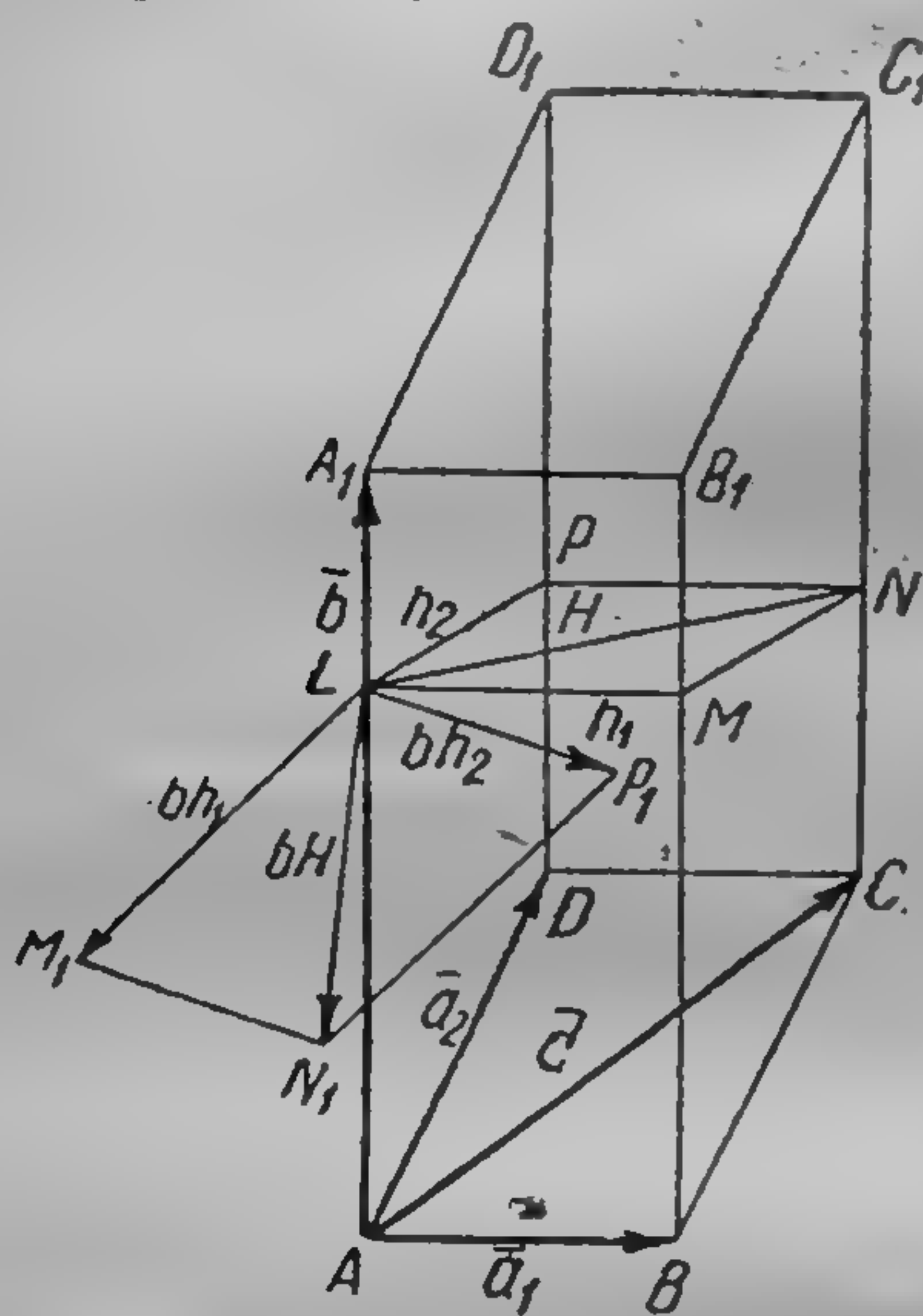


Fig. 24

sensul către cititor; atunci segmentele  $h_1$ ,  $h_2$  și  $H$  vor avea direcția produselor vectoriale  $\vec{a}_1 \times \vec{b}$ ,  $\vec{a}_2 \times \vec{b}$  și  $\vec{d} \times \vec{b}$ . Fără a schimba orientarea laturilor acestui paralelogram rotit, să mărim lungimea laturilor lui de  $b$  ori, ca să avem  $LM_1 = bh_1$ ,  $LP_1 = bh_2$  și

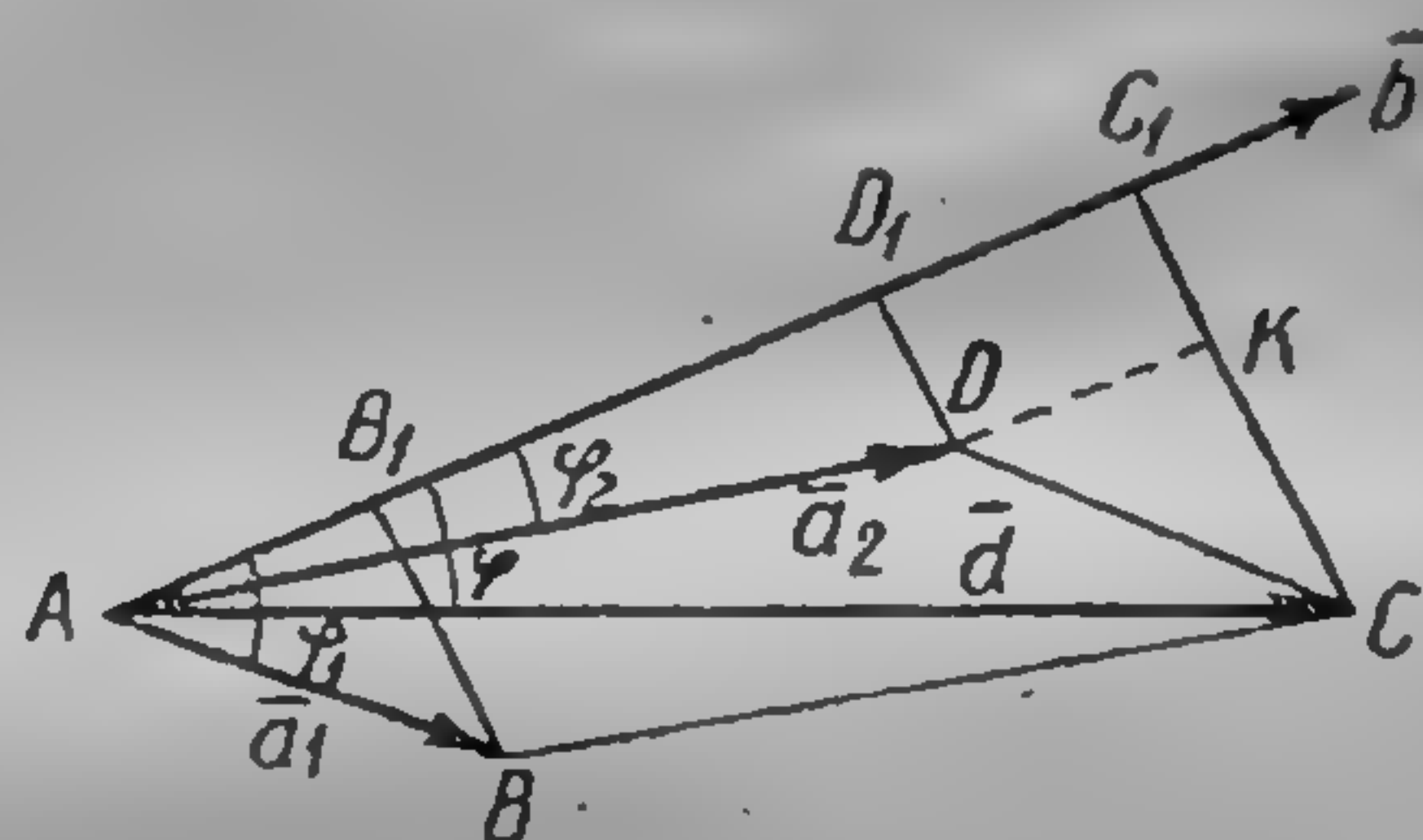


Fig. 25

$LN_1 = bH$ . Deoarece modulele vectorilor  $\vec{c}_1$ ,  $\vec{c}_2$ ,  $\vec{c}$ , sînt respectiv:  $c_1 = \text{aria } ABB_1A_1 = bh_1$ ,  $c_2 = \text{aria } ADD_1A_1 = bh_2$ ,  $c = \text{aria } ACC_1A_1 = bH$ , vedem că segmentele  $LM_1$ ,  $LP_1$  și  $LN_1$  vor reprezenta ca mărime, ca direcție și sens vectorii  $\vec{c}_1$ ,  $\vec{c}_2$  și  $\vec{c}$ , prin urmare relația  $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$  este demonstrată.

Presupunem acum că cei trei vectori  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  și  $\vec{b}$  sînt paraleli cu același plan; atunci, mutîndu-i într-un punct oarecare din spațiu, vom vedea că acești trei vectori sînt în același plan și de aceea nu mai putem construi paralelipipedul pomenit anterior. Totuși, nu este greu de demonstrat, că în acest caz produsul vectorial este distributiv. În adevăr, presupunem că am mutat cei trei vectori  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  și  $\vec{b}$  într-un punct  $A$ , cum se arată în fig. 25. Construind vectorii  $\vec{a}_1 \times \vec{b}$ ,  $\vec{a}_2 \times \vec{b}$  și  $\vec{d} \times \vec{b}$  în punctul  $A$ , vom găsi că toți acești vectori vor fi perpendiculari pe planul desenului și,



prin urmare, egalitatea vectorială se reduce în acest caz la o relație scalară și anume  $c_1 + c_2 = c$ . Dar noi avem:

$$c_1 = a_1 b \sin \varphi_1, \quad c_2 = a_2 b \sin \varphi_2, \quad c = db \sin \varphi;$$

de aceea, relația  $c_1 + c_2 = c$  devine

$$a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 = d \sin \varphi.$$

Din fig. 25 rezultă că

$$CC_1 = CK + KC_1 = BB_1 + DD_1,$$

dar

$$a_1 \sin \varphi_1 = BB_1 = KC, \quad a_2 \sin \varphi_2 = DD_1 = C_1K, \quad d \sin \varphi = CC_1,$$

și teorema este demonstrată. Nu este greu să ne convingem de valabilitatea teoremei și în acele cazuri când vectorul  $\vec{b}$  este de cealaltă parte a vectorilor  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  sau între ei. În acest fel în toate cazurile avem:

$$\vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}. \quad (2.6)$$

Schimbînd ordinea factorilor, obținem:

$$-\vec{b} \times \vec{a}_1 - \vec{b} \times \vec{a}_2 = -\vec{b} \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2),$$

sau

$$\vec{b} \times \vec{a}_1 + \vec{b} \times \vec{a}_2 = \vec{b} \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2). \quad (2.7)$$

Repetînd același procedeu care se folosește la deducerea regulii înmulțirii a două polinoame între ele din regula înmulțirii unui polinom cu un monom, vom avea:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}. \quad (2.8)$$

Este evident că suma situată în partea dreaptă a formulei (2.8) este o sumă geometrică.

Este ușor de văzut că dacă  $m$  și  $n$  sînt scalari, atunci trebuie să avem

$$\vec{a} m \times \vec{b} n = (\vec{a} \times \vec{b}) m \cdot n. \quad (2.9)$$

Bazîndu-ne pe formulele (2.8) și (2.9) nu este greu să se obțină expresia produsului vectorial a doi vectori, cînd acești vectori sînt exprimați prin vectorii unitari  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . În adevăr fie dat:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \quad \vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z.$$



Aplicînd formulele (2.8) și (2.9) vom obține

$$\begin{aligned}\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= (\bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z) \times (\bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z) = \\ &= (\bar{i} \times \bar{i})a_xb_x + (\bar{i} \times \bar{j})a_xb_y + (\bar{i} \times \bar{k})a_xb_z + (\bar{j} \times \bar{i})a_yb_x + (\bar{j} \times \bar{j})a_yb_y + \\ &+ (\bar{j} \times \bar{k})a_yb_z + (\bar{k} \times \bar{i})a_zb_x + (\bar{k} \times \bar{j})a_zb_y + (\bar{k} \times \bar{k})a_zb_z.\end{aligned}$$

De aici în baza formulelor (2.4) și (2.5) vom obține:

$$\bar{c} = \bar{i}(a_yb_z - a_zb_y) + \bar{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \bar{k}(a_xb_y - a_yb_x). \quad (2.10)$$

Exprimînd vectorul  $\bar{c}$  prin aceiași vectori unitari  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , după formula

$$\bar{c} = \bar{i}c_x + \bar{j}c_y + \bar{k}c_z,$$

vom ajunge la formulele care reprezintă proiecțiile produsului vectorial a doi vectori pe axele de coordonate și anume:

$$\left. \begin{aligned}c_x &= a_yb_z - a_zb_y, \\ c_y &= a_zb_x - a_xb_z, \\ c_z &= a_xb_y - a_yb_x.\end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Formula (2.10) mai poate fi prezentată simbolic și în felul următor:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

Expresia care se găsește în partea dreaptă a formulei (2.12) și este reprezentată printr-o tabelă simbolică plasată între două linii verticale, se numește *determinant*. Cantitățile care intervin în tabelă se numesc *elementele determinantului*; elementele care stau în același șir orizontal formează *linii* iar elementele care compun un șir vertical formează *coloane*. Tăind oricare linie sau coloană, de exemplu prima linie și prima coloană vom obține determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}$$

care se numește *mincrul* determinantului (2.12), în raport cu elementul  $\bar{i}$ . Convenim să dezvoltăm determinantul cu două linii și două coloane după următoarea formulă:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (2.13)$$



După aceasta este ușor de dat următoarea regulă de dezvoltare a determinantului (2.12) care duce la formula (2.10):

Pentru a dezvolta determinantul (2.12), trebuie să înmulțim primul element al primei linii cu minorul său, apoi să scădem produsul elementului al doilea din prima linie cu minorul său și la rezultat să adăugăm produsul dintre elementul al treilea al primei linii cu minorul său. (În partea dreaptă a formulei (2.10) elementul al doilea are semnul plus, întrucât semnul minus este introdus în interiorul parantezei).

§ 13. Momentul unei forțe ca produs vectorial. Momentul unei forțe în raport cu un punct așa cum s-a definit la § 10, este ușor de interpretat ca un produs vectorial.

În adevăr, fie forța  $\vec{F}$  și se cere să se găsească momentul ei în raport cu punctul  $O$ . Pentru aceasta construim triunghiul momentelor  $OAB$  și vom numi vectorul  $\vec{OA}$  care unește punctul dat  $O$  cu originea  $A$  a vectorului forță  $\vec{F}$ , vectorul de pozi-

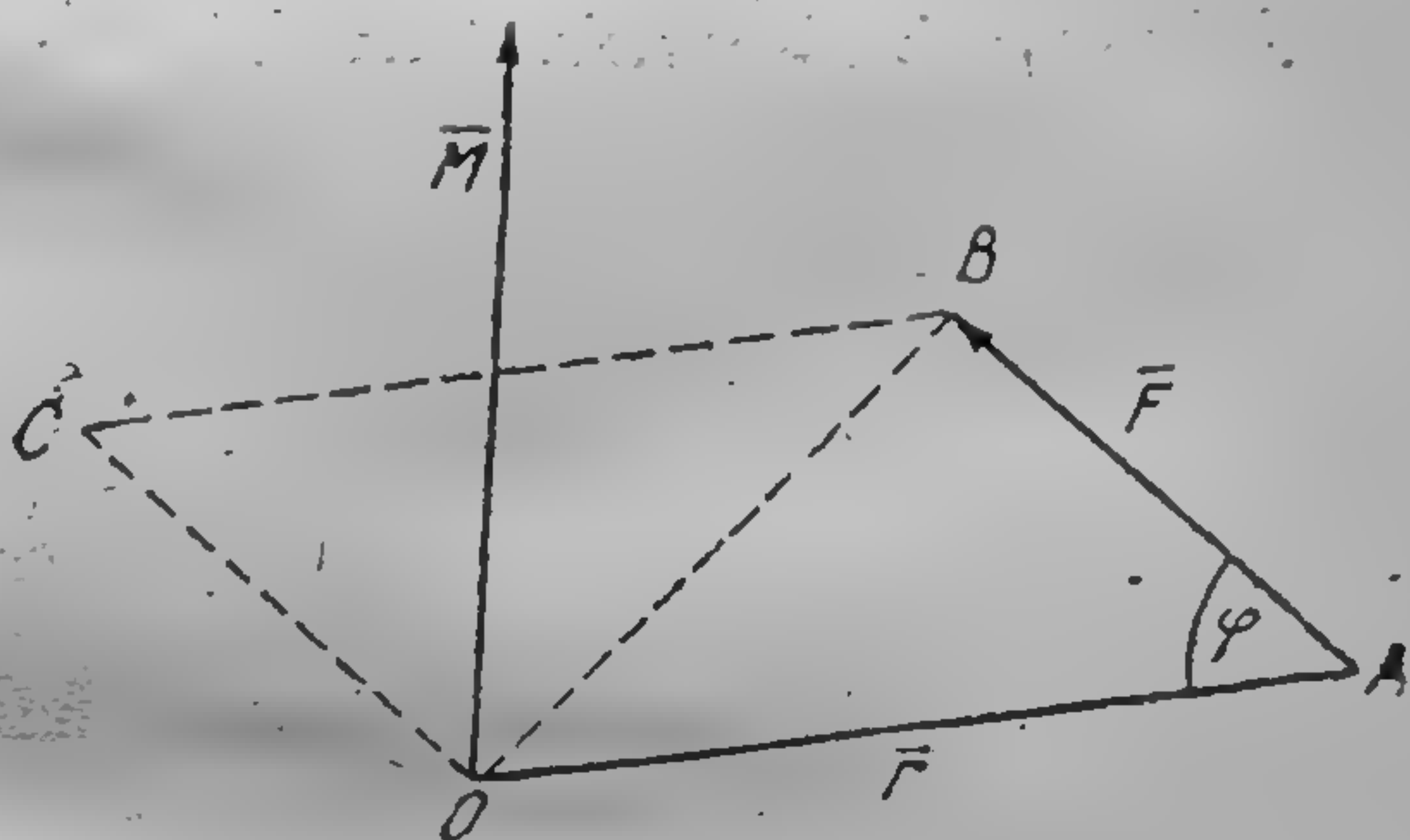


Fig. 26

ție  $\vec{r}$  al punctului  $A$  (fig. 26). Efectuând produsul vectorial  $\vec{r} \times \vec{F}$ , după regula stabilită la § 12 vom vedea ușor că acest produs vectorial reprezintă ca mărime, direcție și sens vectorul-moment  $\vec{M}$ , adică

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.14)$$

Formula (2.14) nu este în contradicție cu definiția forței ca vector alunecător. În adevăr, să deplasăm forța pe suportul ei într-un alt punct  $A'$  și vom nota vectorul care unește punctul  $O$  cu  $A'$  prin  $\vec{r}'$ . Deoarece  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{AA'}$ , momentul în raport cu punctul  $O$  al forței  $\vec{F}$  aplicată în punctul  $A'$ , va fi

$$\vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{AA'}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{AA'} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

deoarece  $\vec{AA'} \times \vec{F} = 0$ . Vom sublinia că în mecanică sîntem nevoiți să determinăm nu numai momentele forțelor ci și momentele altor vectori; toate aceste momente se calculează după formula (2.14).



Să notăm proiecțiile vectorului  $\bar{M}$  pe axele de coordonate  $M_x, M_y$  și  $M_z$ , atunci

$$\bar{M} = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z. \quad (2.15)$$

Aplicînd formulele (1.12), (1.15) și (2.12) vom obține pentru momentul  $\bar{M}$  al forței  $\bar{F}$  în raport cu originea coordonatelor  $O$ , următoarea expresie:

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

Referindu-ne la formula (2.15) și dezvoltînd determinantul din formula (2.16) după formula (2.10), vom găsi:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yZ - zY, \\ M_y &= zX - xZ, \\ M_z &= xY - yX. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Formulele (2.17) reprezintă proiecțiile  $M_x, M_y$  și  $M_z$  ale momentului  $\bar{M}$  pe axele de coordonate, adică în baza § 11 momentele forței  $\bar{F}$  în raport cu axele  $Ox, Oy$  și  $Oz$ .

Prin analogie cu formulele (1.17) și (1.18) vom obține:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos a, \quad M_y = M \cos b, \quad M_z = M \cos c, \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \\ \cos a &= \frac{M_x}{M}, \quad \cos b = \frac{M_y}{M}, \quad \cos c = \frac{M_z}{M}. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Din formulele (2.17) rezultă că:

$$M_x X + M_y Y + M_z Z = 0. \quad (2.19)$$

Relația (2.19) arată că egalitățile (2.17) nu pot fi considerate ca trei ecuații independente cu trei necunoscute  $x, y$ , și  $z$ , adică din cele trei ecuații (2.17) cu forța dată  $\bar{F}$  și momentul ei  $\bar{M}$  nu se poate determina un singur punct  $A(x, y, z)$ . Acest lucru este perfect normal, deoarece forța  $\bar{F}$  este un vector alunecător și ecuațiile (2.17) sînt de fapt ecuațiile suportului forței  $\bar{F}$ .

Exact la fel avem:

$$xM_x + yM_y + zM_z = 0. \quad (2.20)$$



De aici rezultă că din cele trei ecuații (2.17) nu se poate determina o singură forță  $\vec{F}$ , când ne este dat momentul  $\vec{M}$  și punctul  $A(x, y, z)$ . În adevăr, notînd unghiul  $OAB$  (fig. 26) prin  $\varphi$ , vom obține:

$$M = Fr \sin \varphi,$$

adică

$$F \sin \varphi = \frac{M}{r}.$$

Astfel se vede că pentru a determina modulul forței  $\vec{F}$  trebuie să cunoaștem unghiul  $\varphi$ .

Uneori este necesar să se determine momentul forței în raport cu un punct oarecare  $O'$  cu coordonatele  $(x', y', z')$  altul decît originea  $O$  a coordonatelor. Notînd momentul forței  $\vec{F}$  în raport cu punctul  $O'$  prin  $\vec{M}'$  și proiecțiile lui prin  $M'_x, M'_y, M'_z$  avem:

$$\vec{M}' = iM'_x + jM'_y + kM'_z.$$

Presupunem

$$\vec{O'A} = \vec{r}';$$

atunci după formula (2.14) obținem:

$$\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F}.$$

Unind punctul  $O$  cu punctul  $O'$  prin vectorul  $\vec{d} = \vec{OO'}$  (fig. 27) avem:

$$\vec{d} = ix' + jy' + kz';$$

mai departe avem:

$$\vec{d} + \vec{r}' = \vec{r},$$

sau

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}.$$

De aici obținem:

$$\vec{M}' = (\vec{r} - \vec{d}) \times \vec{F}.$$

(2.21)

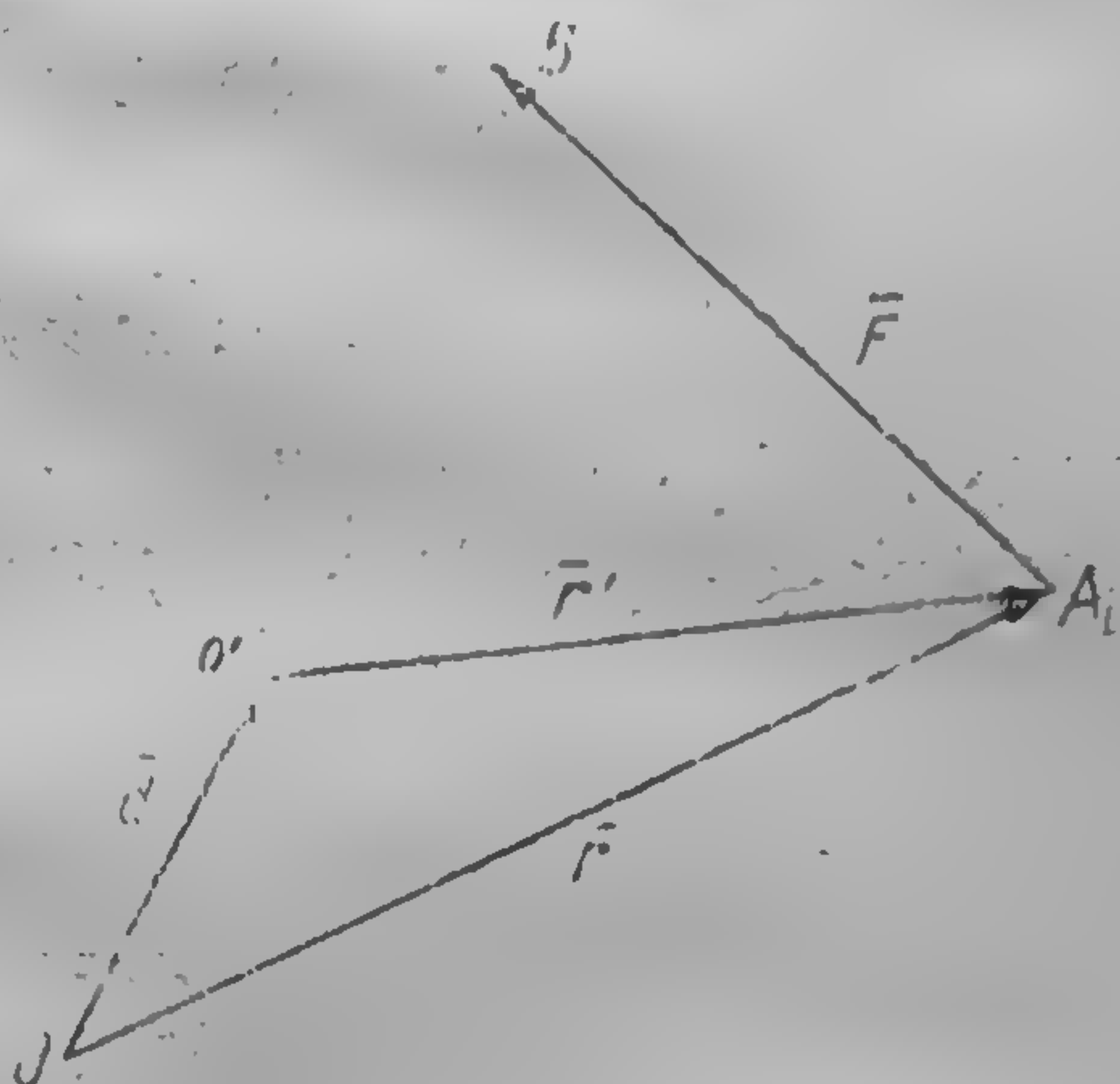


Fig 27.



Aplicând la membrul drept al acestei relații formula (2.6) și ținând seama de formula (2.14), vom avea:

$$\bar{M}' = \bar{M} - \bar{d} \times \bar{F}. \quad (2.22)$$

Astfel:

Momentul forței în raport cu punctul  $O'$  este egal cu momentul forței în raport cu punctul  $O$  minus momentul în raport cu punctul  $O$  al acestei forțe mutate paralel cu ea însăși în punctul  $O'$ .

Dacă avem  $\bar{d} \parallel \bar{F}$ , atunci din formula (2.22) rezultă că  $\bar{M}' = \bar{M}$ ; prin urmare momentul forței nu variază dacă se mută punctul, în raport cu care se calculează momentul, de-a lungul unei drepte paralele cu forța.

Vom da acum expresiile analitice ale formulelor vectoriale obținute. Astfel, din formula (2.21) vom avea:

$$\bar{M}' = \bar{i}M'_x + \bar{j}M'_y + \bar{k}M'_z = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x-x' & y-y' & z-z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

adică

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= (y-y')Z - (z-z')Y, \\ M'_y &= (z-z')X - (x-x')Z, \\ M'_z &= (x-x')Y - (y-y')X. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Din formula (2.22) vom obține:

$$\bar{i}M'_x + \bar{j}M'_y + \bar{k}M'_z = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

sau

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= M_x - (y'Z - z'Y), \\ M'_y &= M_y - (z'X - x'Z), \\ M'_z &= M_z - (x'Y - y'X). \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Din formulele (2.25) rezultă că  $M'_x = M_x$ ,  $M'_y = M_y$  și  $M'_z = M_z$  adică  $\bar{M}' = \bar{M}$  dacă

$$y'Z - z'Y = 0, \quad z'X - x'Z = 0, \quad x'Y - y'X = 0$$

adică dacă

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z}.$$



Aceasta este ecuația dreptei care trece prin punctul  $O$  și este paralelă cu  $F$ . În adevăr, prin deplasarea punctului  $O'$  pe această dreaptă, momentul  $\bar{M}$  în raport cu punctul  $O'$  nu trebuie să varieze deoarece, prin deplasarea vârfului unui triunghi de-a lungul unei drepte paralele cu baza, suprafața triunghiului nu variază și triunghiul rămâne în același plan.

Este evident că dacă forța se găsește în planul  $Oxy$  și căutăm momentul  $\bar{M}$  al forței în raport cu un punct din același plan, de exemplu în raport cu punctul  $O$ , vectorul  $\bar{M}$  va fi paralel cu axa  $Oz$  și vom obține:

$$\bar{M} = \bar{k}M_z = \bar{k}(xY - yX). \quad (2.26)$$

Pentru un alt punct  $O'$  cu coordonatele  $(x', y')$  avem

$$\bar{M}' = \bar{k}M_z - \bar{k}(x'Y - y'X). \quad (2.27)$$

§ 14. Exemple. Proiecțiile forței  $\bar{F}$  pe axele sistemului de coordonate ortogonale  $Oxyz$ , le vom scrie  $\bar{F}(X, Y, Z)$ , iar coordonatele punctului de aplicație  $A$ , al forței, le vom nota  $A(x, y, z)$ .

4. Se dă forța  $\bar{F}(2, 3, 4)$  cu punctul de aplicație  $A(-1, -5, 6)$ . Să se găsească momentul  $\bar{M}(M_x, M_y, M_z)$  al acestei forțe, în raport cu originea coordonatelor. Avem:

$$\begin{aligned} M_x &= yZ - zY = -5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = -38, \\ M_y &= zX - xZ = 6 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 16, \\ M_z &= xY - yX = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 7. \end{aligned}$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{38^2 + 16^2 + 7^2} = \sqrt{1749}, \\ \cos a &= \frac{-38}{\sqrt{1749}}, \quad \cos b = \frac{16}{\sqrt{1749}}, \quad \cos c = \frac{7}{\sqrt{1749}}. \end{aligned}$$

Efectuând calculele se va obține:

$$M = 41,821, \quad a = 155^\circ 19' 02'', \quad b = 67^\circ 30' 23'', \quad c = 80^\circ 21' 52''.$$

5. Să se determine momentul resultant în raport cu originea  $O$  al sistemului de forțe  $\bar{F}_1(1, 2, 3)$ ,  $\bar{F}_2(3, 4, 6)$ ,  $\bar{F}_3(6, 7, 8)$  cu punctele de aplicație  $A_1(0, 0, 1)$ ,  $A_2(3, 0, 0)$ ,  $A_3(3, 2, 1)$ . Vom avea:

$$\begin{aligned} M_{1x} &= y_1Z_1 - z_1Y_1 = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2, & M_{1y} &= z_1X_1 - x_1Z_1 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 1, \\ M_{2x} &= y_2Z_2 - z_2Y_2 = 0 \cdot 6 - 0 \cdot 4 = 0, & M_{2y} &= z_2X_2 - x_2Z_2 = 0 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = -18, \\ M_{3x} &= y_3Z_3 - z_3Y_3 = 2 \cdot 8 - 1 \cdot 7 = 9, & M_{3y} &= z_3X_3 - x_3Z_3 = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 8 = -18, \\ M_{1z} &= x_1Y_1 - y_1X_1 = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 0, \\ M_{2z} &= x_2Y_2 - y_2X_2 = 3 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 12, \\ M_{3z} &= x_3Y_3 - y_3X_3 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 6 = 9. \end{aligned}$$



Deoarece prima forță  $F_1$  trece prin punctul  $A_1$  care se găsește pe axa  $Oz$ , momentul ei  $M_{1z}$  în raport cu axa  $Oz$  trebuie să fie egal cu zero; deoarece a doua forță  $F_2$  trece prin punctul  $A_2$  care se găsește pe axa  $Ox$ , momentul ei  $M_{2x}$  în raport cu axa  $Ox$  trebuie să fie egal cu zero; egalitatea cu zero a acestor două momente rezultă și din calculele precedente. De aici, pentru proiecția momentului resultant, găsim:

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} = -2 + 0 + 9 = 7,$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} = 1 - 18 - 18 = -35,$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = 0 + 12 + 9 = 21.$$

Prin urmare avem:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{7^2 + 35^2 + 21^2} = \sqrt{1715},$$

și

$$\cos a = \frac{7}{\sqrt{1715}}, \quad \cos b = \frac{-35}{\sqrt{1715}}, \quad \cos c = \frac{21}{\sqrt{1715}}.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$$M = 41,413; \quad a = 80^\circ 16' 07''; \quad b = 147^\circ 41' 18''; \quad c = 59^\circ 31' 47''.$$

6. Cosinuşii unghiurilor a doi vectori liberi  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  cu axele ortogonale  $Oxyz$  sînt respectiv  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  și  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ; să se găsească sinusul unghiului  $\varphi$  dintre vectorii  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  ( $\pi \geq \varphi \geq 0$ ). Deplasăm vectorii  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  paralel cu ei înșiși într-un punct oarecare  $A$  din spațiu fie  $\vec{a}_1^0$  și  $\vec{a}_2^0$  vectorii lor unitari; este evident că proiecțiile vectorilor  $\vec{a}_1^0$  și  $\vec{a}_2^0$  pe axele de coordonate vor fi respectiv egale cu  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  și  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ . Să formăm produsul vectorial  $\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0$ ; el va fi egal:

$$\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \vec{i}(\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) + \vec{j}(\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2) + \vec{k}(\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2).$$

Deoarece

$$|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0| = 1 \cdot 1 \sin \varphi = \sin \varphi,$$

rezultă de aici:

$$\sin \varphi = \sqrt{(\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2)^2 + (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2)^2 + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2}.$$



### CAPITOLUL III

## LEGATURI ȘI REACȚIUNI. PRODUS SCALAR

§ 15. Despre diferitele tipuri de forțe. În paragrafele precedente la examinarea și descrierea proprietăților forțelor, ne-am imaginat un fir tixat într-un punct oarecare al unui corp de care se trage, sau o bară rigidă cu care se împinge corpul și așa mai departe. De aici am ajuns la reprezentarea forței ca vector care se poate desena ca un segment de dreaptă. Însă, observațiile asupra diferitelor fenomene din natură și rațiunea ne conving că reprezentarea forței este mult mai complexă și anume, forțele pot fi împărțite în trei tipuri: *forțe de volum*, *forțe distribuite pe o suprafață* și *forțe concentrate*. Se numește forță de volum acea forță care este răspândită în întregul volum al corpului, de exemplu, forța greutateii. În adevăr, nu există nici cea mai mică particică a unui corp greu care să nu aibă greutate și deci, asupra căreia să nu se aplice forța greutateii. Forța distribuită pe o suprafață este acea forță care se aplică în punctele de pe suprafața corpului, de exemplu, forța de frecare. În sfârșit, forță concentrată se numește forța aplicată într-un punct al corpului. La fel ca și punctele, curbele și suprafețele geometrice, forțele concentrate și cele distribuite pe o suprafață sînt pure abstracții; reale sînt numai forțele de volum. Totuși, studiul forțelor concentrate și al celor distribuite pe o suprafață este tot atît de rațional în mecanică ca și studiul punctelor, curbelor și suprafețelor în geometrie. Dealtfel, în acest curs vom presupune clară ideea de forță concentrată și pornind de la aceasta vom împărți suprafața sau volumul în elemente infinit de mici asupra cărora se aplică cîte o forță concentrată, apoi trecînd la limită vom ajunge la forțele distribuite pe o suprafață sau la cele de volum.

§ 16. Legăturile și reacțiunile introduse de ele. Dacă un punct material se poate deplasa în orice direcție sau dacă un corp poate executa orice mișcare de translație și de rotație,



atunci se spune că punctul material sau corpul este *liber*. Dacă însă el nu poate executa orice fel de mișcare, se spune că este supus anumitor legături. De exemplu, o mărgea înșirată pe un fir se poate deplasa numai în lungul lui; deci, mărgeaua este supusă la o legătură. Dacă, de exemplu, un punct trebuie să rămână pe o suprafață, atunci punctul este supus la o legătură realizată de această suprafață. O ușă care se mișcă în balamale este limitată în mișcările ei de legăturile realizate prin fixarea a două puncte de pe ușă în balamale. Dacă corpul sau punctul nu pot părăsi legătura, atunci legătura se numește *bilaterală*, astfel, de exemplu, este cazul mărgelei trasă pe fir sau cazul ușii care se mișcă în balamale. Dacă însă, corpul sau punctul, prin anumite mișcări poate să părăsească legătura într-o direcție, atunci legătura se numește *unilaterală*. De exemplu, o piatră așezată pe o masă, se poate deplasa pe suprafața mesei, nu poate pătrunde în masă, dar se poate ridica, de pe masă, și, prin această mișcare, poate părăsi legătura. Prin urmare, piatra așezată pe masă este supusă unei legături unilaterale. Trebuie subliniat că noi considerăm legăturile, din punct de vedere fizic, indestructibile, și de aceea nu socotim posibilă o mișcare prin care piatra ar pătrunde în scândura mesei.

Să considerăm o masă care stă pe o pardoseală orizontală. Din cauza greutateii ei, picioarele mesei apasă pardoseala și conform principiului acțiunii și reacțiunii, pardoseala apasă cu aceeași forță fiecare picior al mesei. Dacă masa nu ar avea greutate, ea nu ar apăsa pe pardoseală și prin urmare nici pardoseala nu ar acționa asupra picioarelor mesei. Așezînd pe masă o greutate oarecare, vom modifica presiunea picioarelor mesei pe pardoseală și deci și forțele cu care acționează pardoseala asupra picioarelor mesei se vor modifica. De aici tragem concluzia: dacă asupra unui corp sau punct material în repaus supus la legături, acționează forțe, atunci corpul sau punctul va acționa asupra legăturilor și la rîndul lor legăturile vor acționa asupra corpului sau punctului. Aceste forțe de reacțiune ale legăturilor se numesc *forțe de legătură sau reacțiuni*. Există reacțiuni numai atunci cînd *sub acțiunea forțelor efective aplicate*, corpul sau punctele materiale în repaus acționează asupra legăturilor; în- dată ce acțiunea forțelor asupra corpurilor sau asupra punctelor materiale, aflate în repaus dispăre, dispăre în același timp și reacțiunea.

Forțele aplicate asupra unui corp material, datorită cărora corpul material acționează asupra legăturilor — și legăturile



dezvolta reacțiuni — se numesc *forțe active*; reacțiunile, însă se mai numesc și *forțe pasive*, pentru că existența lor este condiționată de prezența forțelor active, de care depinde, în general mărimea, direcția și sensul lor.

În unele cazuri este posibil să se găsească imediat reacțiunile ca: mărime, direcție și sens. Să examinăm, de exemplu, un punct material greu pe un plan orizontal. Este evident că forța cu care acel punct apasă pe plan este egală, dar de sens contrar, cu aceea cu care planul apasă asupra punctului; astfel, reacțiunea produsă de plan este egală ca mărime și direcție dar de sens contrar cu greutatea punctului. Vom sublinia că presiunea punctu-

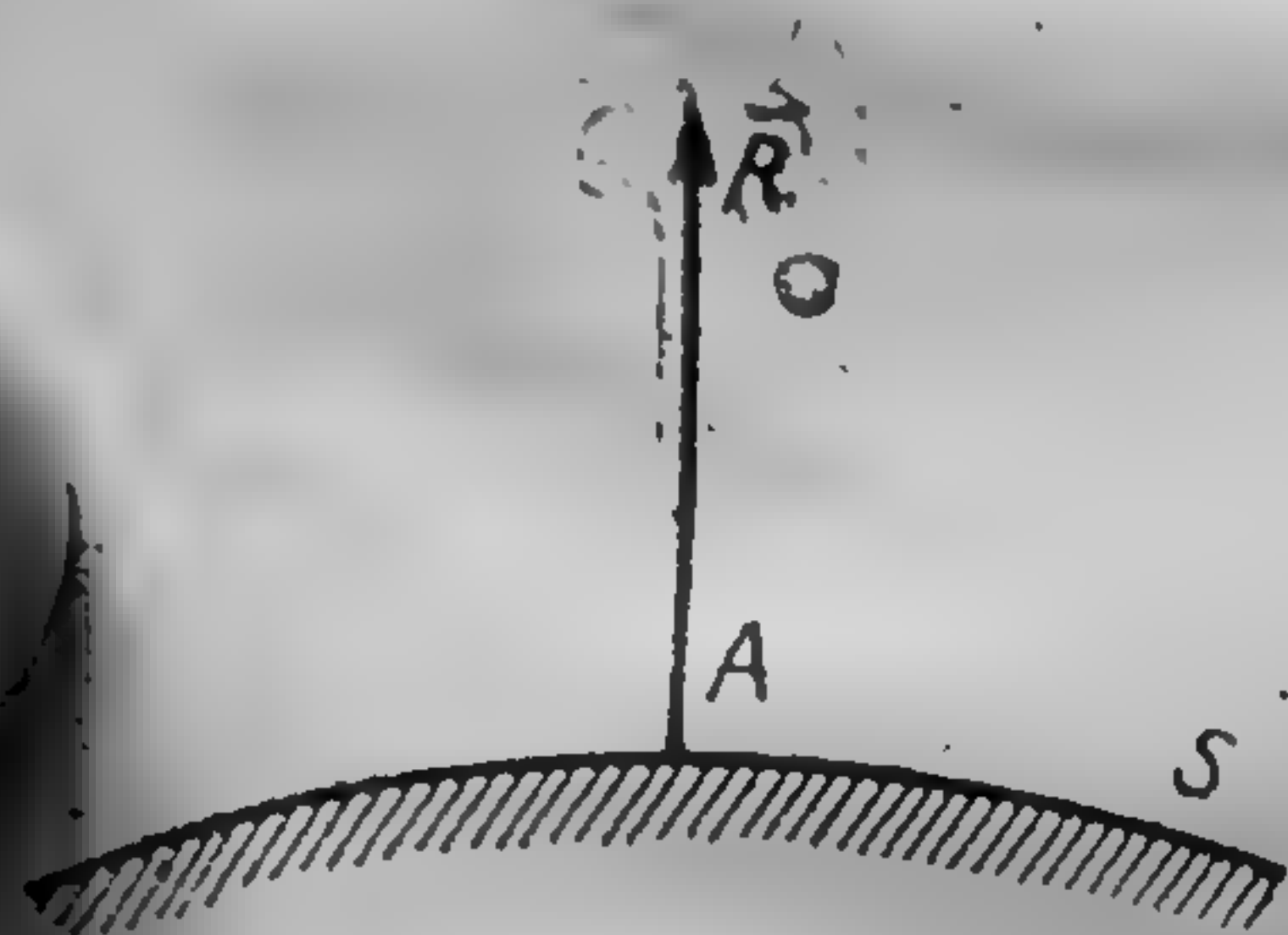


Fig. 28

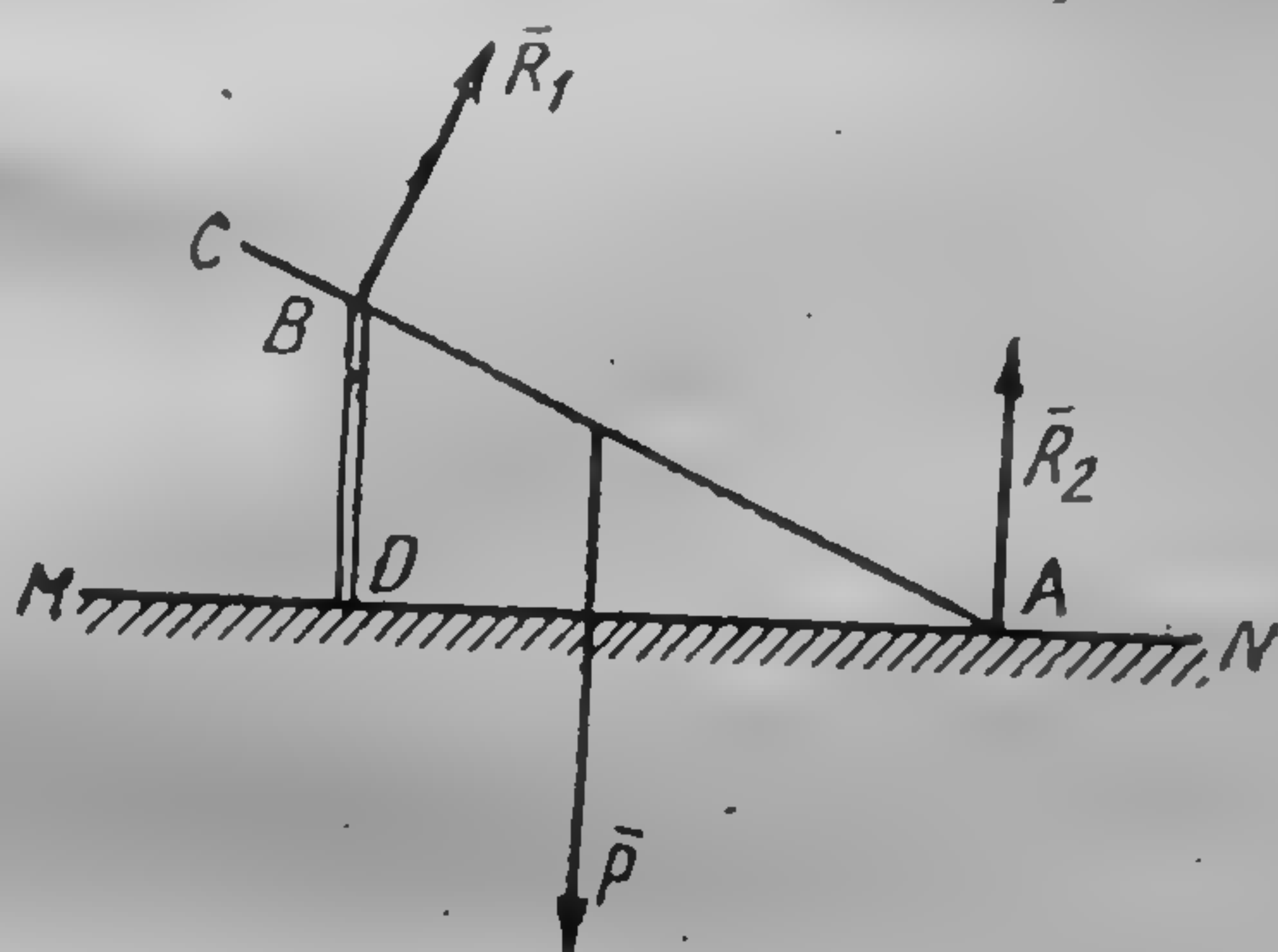


Fig. 29

lui pe plan și reacțiunea planului, forțe egale ca mărime și direcție și opuse ca sens sînt aplicate la corpuri diferite; prima forță este aplicată planului și a doua punctului; de aceea, studiind forțele aplicate acestui punct material nu se poate elimina reacțiunea planului, socotind-o echilibrată de presiunea punctului pe plan.

În majoritatea cazurilor reacțiunile sînt necunoscute ca mărime, direcție și sens. Totuși, se pot indica un număr de cazuri simple cînd direcția și sensul reacțiunii se pot stabili, independent de forțele active.

Să examinăm cele mai importante din aceste cazuri.

*Dacă punctul sau corpul pot aluneca pe o suprafață sau pe o curbă, fără frecare, atunci reacțiunea este dirijată normal pe suprafața sau pe curba, de-a lungul căreia se poate produce alunecarea.*

În adevăr, să presupunem că punctul A se găsește pe suprafața S (fig. 28). Dacă nu există frecare atunci nu există nici o forță situată în planul tangent la suprafață, care să împiedice



mișcarea punctului  $A$  pe suprafața  $S$ . Prin urmare, reacțiunea  $R$  trebuie să fie dirijată după normala la suprafață.

*Dacă suprafața sau curba care limitează un corp poate aluneca fără frecare pe un punct fix sau pe un corp, atunci reacțiunea este dirijată normal pe acea suprafață sau linie.*

Explicația este aceeași ca în cazul precedent. Exemplul reprezentat în fig. 29 cuprinde ambele cazuri; o bară grea  $ABC$  de greutate  $\bar{F}$  poate aluneca fără frecare cu extremitatea ei  $A$  pe un plan orizontal, bara rezemându-se pe stâlpul  $DB$ . Reacțiunea  $R_1$  în punctul  $B$  este dirijată după normală la bara  $ABC$ , deși reacțiunea  $\bar{R}_2$  în punctul  $A$  este dirijată după normală la planul orizontal  $MN$ .

Cu toate că alunecarea fără frecare nu există în realitate, totuși, dacă forțele de frecare sînt mici în comparație cu celelalte forțe date în problemă, de multe ori se pot neglija forțele de frecare introducîndu-se convențional, legături fără frecare, așa cum s-a făcut adineori. Legăturile fără frecare se numesc *legături ideale*; în volumul II al cursului de față în capitolul „Lucrul mecanic și putere”, se va da o definiție mai generală a legăturilor ideale.

*Dacă legătura este realizată cu ajutorul unui fir, reacțiunea este dirijată în lungul firului.*

În adevăr, să ne închipuim punctul greu  $A$  de greutate  $\bar{P}$  atârnat la capătul firului  $AB$  (fig. 30); este evident că reacțiunea este forța  $\bar{T}$  dirijată în lungul firului, egală ca mărime și direcție cu greutatea  $\bar{P}$  a punctului  $A$  și avînd sensul contrar. Dacă, firul greu nu va fi vertical ci înclinat față de orizontală, atunci sub acțiunea greutății firul va căpăta o formă curbă; în acest caz forța  $T$  de la extremitatea lui fiind egală ca mărime și direcție cu forța aplicată la acest capăt dar în sens opus, va fi totodată așezată de-a lungul tangentei la fir în extremitatea lui. Așa este, de exemplu, cazul firului telegrafic întins între doi stâlpi. În cursul de față vom studia firele cu greutate proprie mică și cu grosime atît de mică încît vom putea neglija totdeauna greutatea proprie a firelor; de aceea, vom presupune că firele întinse sînt rectilinii, iar reacțiunile, dirijate în lungul firelor.

*Dacă legătura este realizată prin intermediul unei bare rigide, a cărei greutate se neglijează și care este articulată la capete, reacțiunea este dirijată în lungul barei.*



În adevăr să ne închipuim bara  $AB$  articulată în punctul  $B$ ; de bară se atâră punctul greu  $A$  cu greutatea  $\bar{P}$ ; vom obține aici același caz, ca și în fig. 30. Dacă la capătul  $A$  al barei  $AB$ , suspendat prin intermediul articulației  $B$ , vom apăsa cu forța  $\bar{F}$ , dirijată în lungul barei  $AB$ , atunci se va dezvolta reacțiunea  $\bar{T}$ , egală ca modul și direcție cu forța  $\bar{F}$  și dirijată în lungul barei în sens contrar forței  $\bar{F}$  (fig. 31).

Dacă mărimea forței  $F$  va depăși o anumită limită, bara reală și materială  $AB$  se va deforma; forma deformată a barei se determină în acest caz cu ajutorul teoriei rezistenței materialelor. În cursul de față forța  $\bar{F}$  se va presupune totdeauna mai mică decât această forță limită și bara va rămâne nedeformată.

În cazurile studiate anterior, direcția reacțiunii se poate determina din caracterul legăturilor, independent de forțele active.

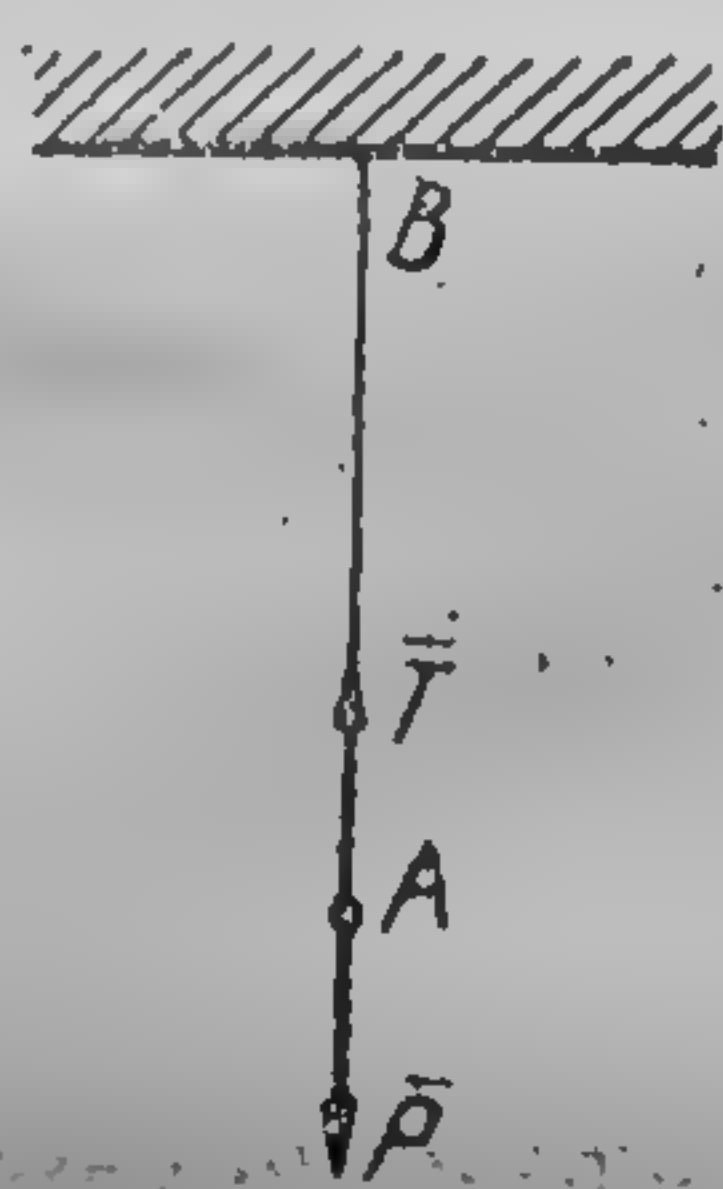


Fig. 30

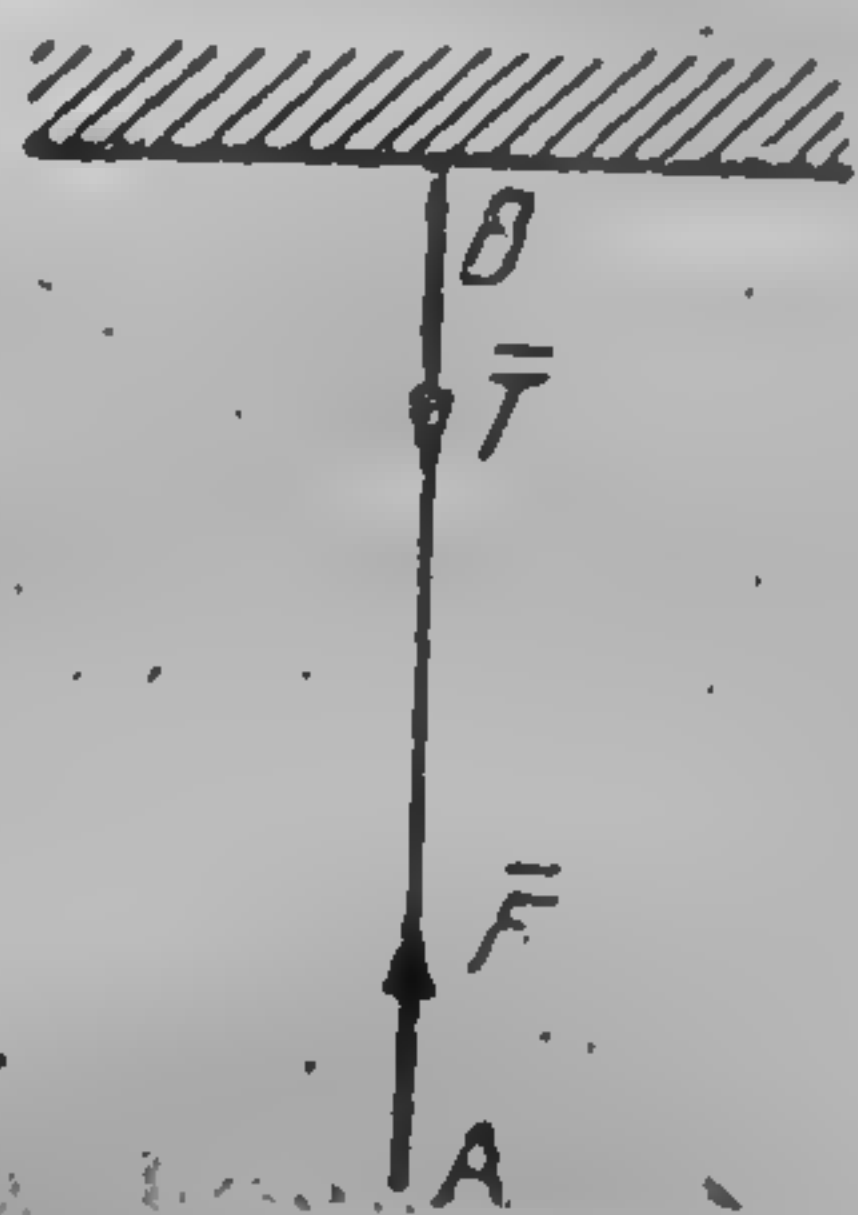


Fig. 31

Totuși, în cazul general, reacțiunile sînt necunoscute atît ca mărime cît și ca direcție. Să examinăm, de exemplu, o ușă grea avînd două balamale; tragem de mînerul ușii, căutînd s-o scoatem din balamale. Evident că ușa acționează cu o anumită forță, asupra balamalelor, iar reacțiunea balamalelor va fi egală ca mărime și direcție cu această forță, dar de sens opus; în cazul acesta însă nu cunoaștem nici mărimea acestor reacțiuni, nici direcția după care ele acționează.

**§ 17. Problema de bază a staticii.** În paragraful precedent am văzut că toate efectele legăturilor se reduc, din punct de vedere mecanic, la reacțiunea pe care ele o dezvoltă. De aceea, împreună cu forțele efectiv aplicate asupra punctelor și corpurilor materiale, vom considera că acționează în majoritatea cazurilor și reacțiuni care vor înlocui, din punct de vedere mecanic, acțiunea legăturilor asupra punctelor și corpurilor materiale. Este evident că adăugînd la forțele date reacțiunile introduse de legături, punctele și corpurile materiale pot fi considerate libere.



Problema de bază a staticii constă în a afla dacă punctele materiale și corpurile pot rămâne în echilibru absolut, sub acțiunea forțelor date și a reacțiunilor introduse de legături.

Este evident că, pentru aceasta este suficient să cunoaștem cazurile în care forțele aplicate unui punct material sau unui solid liber se echilibrează. De obicei, în cursul de statică, această problemă nu se rezolvă deodată pentru un sistem oarecare de forțe; de cele mai multe ori cazul general se tratează treptat, studiind inițial cazul forțelor concurente, al forțelor paralele, apoi sistemul plan de forțe și în cele din urmă sistemul de forțe în spațiu.

*Orice problemă de echilibru se reduce la formarea și rezolvarea ecuațiilor de echilibru*, în care intră toate forțele ce acționează asupra corpului material. Astfel, reacțiunile sînt în general necunoscute în problemele de statică și ele trebuie determinate. Găsind mărimile și direcțiile reacțiunilor putem, de exemplu, să ne dăm seama dacă legăturile vor rezista sau nu la sarcina ce li se aplică.

La examinarea ecuațiilor de echilibru pot avea loc trei cazuri: 1) Numărul ecuațiilor de echilibru poate fi mai mare decît numărul reacțiunilor necunoscute; în acest caz eliminînd din ecuațiile de echilibru reacțiunile, vom obține ecuații care leagă între ele caracteristicile mecanice și geometrice date ale corpului material: echilibrul va fi posibil numai după satisfacerea acestor ecuații. De aceea, aceste ecuații care nu conțin reacțiunile necunoscute se numesc *condiții de echilibru*. 2) Dacă numărul ecuațiilor de echilibru este egal cu numărul de reacțiuni necunoscute, în așa fel încît din ele se pot determina toate reacțiunile, nu există condiții de echilibru și din ecuațiile de echilibru se determină numai reacțiunile necunoscute. Cazul 1) și 2) poartă denumirea comună de *cazuri static determinate*. 3) Dacă din ecuațiile de echilibru nu se pot determina toate reacțiunile, adică ecuațiile sînt mai puține decît reacțiunile necunoscute, atunci avem un caz *static nedeterminat*. În cazurile static nedeterminate nu sînt suficiente teoremele din statică și pentru determinarea tuturor reacțiunilor sîntem nevoiți să recurgem la studiul proprietăților elastice ale corpurilor, de aceea, studiul cazurilor static nedeterminate, este expus în tecria rezistenței materialelor și nu ne vom ocupa de ele în cursul de mecanică teoretică.

**§ 18. Produsul scalar.** După cum vom vedea mai departe, avem adesea de calculat produsul modulelor a doi vectori prin cosinusul unghiului cuprins între ei. În particular, proiecția unui



vector pe o axă oarecare se poate interpreta numeric ca produsul modulului vectorului dat cu modulul vectorului unitar al axei și cu cosinusul unghiului cuprins între acești vectori. Fie  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  doi vectori și  $\varphi$  unghiul format de ei; vom examina aici produsul

$$ab \cos \varphi. \quad (3.1)$$

Deoarece astfel de operații sînt după cum vom vedea mai jos, comutative și distributive, operația de obținere a expresiei scalare  $ab \cos \varphi$  din doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  a primit denumirea de *produs scalar*. Produsul scalar se reprezintă prin simbolul

$$\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad (3.2)$$

asa că vom avea:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi. \quad (3.3)$$

Deci:

*Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul modulelor lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre vectori.*

Este evident că produsul scalar a doi vectori se mai poate exprima și ca produs al modulului unui vector prin proiecția celui alt vector pe el.

În funcție de valoarea unghiului  $\varphi$ , produsul scalar definit prin formula (3.3) poate fi pozitiv ( $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ), negativ ( $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ), sau egal cu zero ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ).

*Dacă produsul scalar a doi vectori este egal cu zero, atunci acești vectori sînt perpendiculari între ei.*

Din formulele (3.3) rezultă că produsul scalar este o operație comutativă deoarece:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Observăm că pe baza celor expuse pînă aici trebuie să avem:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad (3.4)$$

Dacă  $\vec{b} = \vec{a}$ , atunci

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = aa \cos 0 = a^2,$$

adică produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul modulului acestui vector. De aici urmează că trebuie să avem:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1; \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1; \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \quad (3.5)$$



Să arătăm acum că produsul scalar este distributiv. Fie dați trei vectori  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  și  $\vec{b}$ . Trebuie să demonstrăm că:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b}.$$

Vom nota unghiurile între vectorii  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  și  $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ , cu vectorul  $\vec{b}$ , respectiv  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  și  $\varphi$ . După cum am văzut la § 5, proiecția vectorului rezultat este egală cu suma proiecțiilor vectorilor componenți, adică:

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 = c \cos \varphi,$$

sau

$$ba_1 \cos \varphi_1 + ba_2 \cos \varphi_2 = bc \cos \varphi,$$

adică:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b}. \quad (3.6)$$

Aplicînd regula de comutativitate vom obține:

$$\vec{b} \cdot \vec{a}_1 + \vec{b} \cdot \vec{a}_2 = \vec{b} \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2). \quad (3.7)$$

Repetînd aceleași raționamente care se folosesc la deducerea regulii de înmulțire a două polinoame, vom avea:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}. \quad (3.8)$$

Bazîndu-ne pe formula (3.8) nu este greu să obținem expresia produsului scalar a doi vectori exprimați prin proiecțiile lor pe axe și prin vectorii unitari  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . În adevăr fie dat:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \quad \vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z.$$

Avem după formula (3.8):

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z) \cdot (\vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z) = \\ &= (\vec{i} \cdot \vec{i})a_xb_x + (\vec{i} \cdot \vec{j})a_xb_y + (\vec{i} \cdot \vec{k})a_xb_z + \\ &+ (\vec{j} \cdot \vec{i})a_yb_x + (\vec{j} \cdot \vec{j})a_yb_y + (\vec{j} \cdot \vec{k})a_yb_z + \\ &+ (\vec{k} \cdot \vec{i})a_zb_x + (\vec{k} \cdot \vec{j})a_zb_y + (\vec{k} \cdot \vec{k})a_zb_z. \end{aligned}$$

De aici, aplicînd formulele (3.4) și (3.5) vom obține:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \quad (3.9)$$

Formula (3.9) poate fi exprimată în felul următor:

*Produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor proiecțiilor de același nume a acestor vectori pe trei axe perpendiculare între ele.*



Din formula (3.9) avem:

$$a \cdot b \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

sau

$$\cos \varphi = \frac{a_x}{a} \frac{b_x}{b} + \frac{a_y}{a} \frac{b_y}{b} + \frac{a_z}{a} \frac{b_z}{b}.$$

Notînd prin  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  și  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  unghiurile formate de vectorii  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  cu axele de coordonate și aplicînd formulele (1.5) vom obține:

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2. \quad (3.10)$$

Prin urmare:

*Cosinusul unghiului dintre doi vectori este egal cu suma produselor cosinurilor unghiurilor formate de acești vectori cu axele de coordonate.*

Expresiile care nu se schimbă prin transformarea sistemului ortogonal de coordonate într-un alt sistem se numesc *invarianți*. Deoarece mărimile definite prin egalitățile,

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

nu depind nici de poziția originii coordonatelor, nici de direcția axelor de coordonate, următoarele expresii vor fi invariante:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2,$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'},$$

în care indicii  $x, y, z$  se referă la sistemul ortogonal de coordonate  $Oxyz$  și indicii  $x', y', z'$  la alt sistem ortogonal de coordonate  $O'x'y'z'$ .

Știm că momentul  $\bar{M}$  al forței  $\bar{F}$  este perpendicular pe vectorul  $\bar{F}$  și pe vectorul de poziție  $\bar{r}$  al originii vectorului forță și, de aceea trebuie să avem:

$$\bar{M} \cdot \bar{F} = 0, \quad \bar{M} \cdot \bar{r} = 0,$$

sau în baza formulei (3.9):

$$M_x X + M_y Y + M_z Z = 0, \quad x M_x + y M_y + z M_z = 0,$$

adică vom obține formulele (2.19) și (2.20). Vedem cât de repede se obțin formulele (2.19) și (2.20) cu ajutorul produsului scalar.



§ 19. Exemple. 7. Doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , sînt definiți prin proiecțiile lor  $a$  (2, 4, 6) și  $b$  (3, 7, 8) pe axele sistemului de coordonate ortogonale  $Oxyz$ . Să se afle proiecția celui de-al doilea vector,  $b$ , pe direcția primului vector. Notînd prin  $\varphi$  unghiul dintre vectori, avem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi;$$

de aici obținem:

$$b \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Introducînd valorile numerice găsim:

$$b \cos \varphi = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 6 \cdot 8}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}} = \frac{82}{\sqrt{56}} = \frac{41}{\sqrt{14}} = 10,958.$$

8. Fie  $a, b, c$  și  $m, n, p$ , șase numere arbitrare, să se verifice următoarea identitate:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (am + bn + cp)^2 = (bp - cn)^2 + (cm - ap)^2 + (an - bm)^2.$$

Această identitate se numește *identitatea lui Lagrange*; din ea rezultă că partea din stînga a acestei identități este totdeauna pozitivă sau egală cu zero. Să considerăm  $(a, b, c)$  și  $(m, n, p)$  ca proiecțiile a doi vectori pe axele sistemului rectangular de coordonate  $Oxyz$ ; atunci modulele acestor vectori vor fi egale

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Notînd prin  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  și  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  cosinuşii unghiurilor acestor vectori cu axele de coordonate, avem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, & \alpha_2 &= \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \\ \beta_1 &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, & \beta_2 &= \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \\ \gamma_1 &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, & \gamma_2 &= \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \end{aligned}$$

Împărțind ambele părți ale identității care trebuie demonstrată cu produsul  $(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)$  vom obține:

$$1 - (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2)^2 = (\beta_1 \gamma_1 - \gamma_1 \beta_2)^2 + (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2)^2 + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2.$$

sau

$$1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi.$$

In acest fel identitatea este verificată<sup>1</sup>.

9. Să efectuăm produsul  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ . Avem:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z, \quad \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

<sup>1</sup> V. exemplul 6, cap. II. (N.R.).



La calcularea produsului căutat este necesar ca minorii determinantului care reprezintă produsul  $\bar{b} \times \bar{c}$  să-i înmulțim respectiv cu  $a_x$ ,  $a_y$  și  $a_z$  adică să înlocuim  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  cu  $a_x$ ,  $a_y$  și  $a_z$ ; în acest fel vom obține:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



## CAPITOLUL IV

### FORȚE CONCURENTE

§ 20. **Rezultanta și echilibrul unui sistem de forțe concurente.** În tot cursul staticii, precum și în celelalte secțiuni ale mecanicii, vom avea de-a face cu cazul unui solid absolut rigid căruia i se aplică un sistem oarecare de forțe. Vom vedea că un sistem complex de forțe poate fi înlocuit după anumite legi cu un sistem simplu, a cărui acțiune asupra solidului să fie aceeași cu acțiunea sistemului complex. Această înlocuire a sistemului complex cu unul simplu dar cu același efect, se numește *reducerea* sistemului de forțe. Dacă sistemul de forțe se reduce numai la o singură forță, atunci această singură forță se numește *rezultanta* sistemului de forțe, iar reducerea sistemului de forțe se numește în acest caz *adunarea (compunerea) forțelor*. În mod general, dacă vreun sistem mecanic de elemente cu aceeași dimensiune fizică poate fi înlocuit printr-un singur element cu aceeași dimensiune, această înlocuire se numește în mecanică *adunare (compunere)* prin analogie cu adunarea aritmetică, unde suma are aceeași dimensiune ca și termenii care se adună. În acest fel noțiunea de adunare este mai restrânsă decât noțiunea de reducere pentru că, prin reducere, sistemul mecanic al elementelor cu aceeași dimensiune fizică se înlocuiește printr-un sistem care poate să includă și elemente cu o altă dimensiune. Să presupunem că unui solid absolut rigid i se aplică un sistem de *forțe concurente*  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  adică, forțe ale căror suporturi se întretaie într-un singur punct. Acest punct comun de intersecție al suporturilor forțelor concurente, se numește punct de concurență. Să notăm cu  $A$  punctul de concurență al forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  și să mutăm aceste forțe de-a lungul suporturilor lor, în acest punct  $A$ , operație care se poate face conform celor arătate la § 2. Atunci, după cele expuse în § 3, toate forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  se vor putea aduna geometric, și, vom obține în punctul  $A$ , forța rezultantă  $\vec{F}$ , care se numește *rezultanta sistemului de forțe concurente*. După



formulele (1.12) și (1.19) pentru rezultanta  $F$  și proiecțiile ei  $X$ ,  $Y$  și  $Z$ , avem:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum_n F_n, \\ X &= \sum_n X_n, Y = \sum_n Y_n, Z = \sum_n Z_n. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Dacă rezultanta sistemului de forțe concurente va fi egală cu zero, atunci este evident că sistemul de forțe concurente considerat nu poate modifica nici starea de repaus nici starea de mișcare a corpului material; de aceea vom spune că sistemul de forțe concurente este în echilibru. Evident că pentru aceasta este necesar și suficient ca *poligonul forțelor, format de forțele concurente  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$  să fie închis*. În acest fel ecuația de echilibru în cazul forțelor concurente în forma vectorială, are următorul aspect:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots = \sum_n \bar{F}_n = 0. \quad (4.2)$$

În forma analitică ecuațiile de echilibru, vor fi:

$$\left. \begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + \dots &= \sum_n X_n = 0, \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots &= \sum_n Y_n = 0, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots &= \sum_n Z_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Deoarece, drept axe de coordonate se pot lua trei drepte concurente și necoplanare chiar dacă nu sînt perpendiculare între ele (în ultimul caz vom avea un sistem de coordonate oblice) ajungem la următoarea regulă:

*Pentru ca sistemul de forțe concurente să fie în echilibru, este necesar și suficient ca suma proiecțiilor tuturor forțelor pe trei direcții neparalele între ele și necoplanare să fie egală cu zero.*

Dacă toate forțele concurente sînt situate în același plan, atunci, în loc de trei direcții pentru formarea proiecțiilor forțelor este suficient să se ia numai două direcții care se află în același plan cu forțele.

În cazul a trei forțe concurente, poligonul forțelor se reduce în cazul echilibrului la un triunghi; deoarece triunghiul este o figură plană, rezultă de aici că *trei forțe concurente se pot afla în echilibru numai în caz cînd ele sînt situate în același plan*. Relațiile (4.2) și (4.3) sînt ecuațiile de bază pentru dezvoltarea problemelor de echilibru al unui sistem de forțe concurente.



§ 21. Teorema lui Varignon. Am introdus în § 10 definiția momentului rezultat al unui sistem de forțe; prin această definiție, momentul rezultat al unui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare, se numește suma geometrică a momentelor forțelor acestui sistem, în raport cu același punct. De aceea, dacă  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots$  sînt vectorii de poziție ai punctelor de aplicare  $A_1, A_2, A_3, \dots$  ale forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  momentul rezultat  $\vec{M}$  al acestui sistem de forțe în raport cu punctul  $O$  este suma:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \sum_n \vec{M}_n = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{F}_n. \quad (4.4)$$

Pentru cazul unui sistem de forțe concurente, momentul rezultat are o interpretare mecanică simplă, cunoscută sub numele de teorema lui Varignon. Fie  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  - forțele concurente avînd punctul de concurență în  $A$ ; să mutăm punctele de aplicare ale acestor forțe de-a lungul suportului lor pînă în punctul de concurență  $A$ , avînd vectorul de poziție  $\vec{r} = \vec{OA}$ .

Atunci avem:

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1, \quad \vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2, \quad \vec{M}_3 = \vec{r} \times \vec{F}_3, \quad \dots$$

De aici vom avea:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots,$$

sau după formula (2.7):

$$\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) = \vec{r} \times \sum_n \vec{F}_n.$$

Aplicînd la partea dreaptă a acestei relații prima din formulele (4.1) vom obține:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.5)$$

Partea dreaptă a formulei (4.5) reprezintă momentul rezultantei față de punctul  $O$ ; astfel *teorema lui Varignon pentru un sistem de forțe concurente* se enunță în modul următor:

*Momentul rezultat în raport cu un punct oarecare al unui sistem de forțe concurente, este egal cu momentul rezultantei, în raport cu același punct.*

Vom dovedi că, servindu-ne de teorema lui Varignon, se pot obține formulele (2.17) pentru proiecțiile  $M_x, M_y$  și  $M_z$  ale momentului  $M$  al forței  $\vec{F}$ . Fie dată forța  $\vec{F}$ . S-o descompunem în



trei componente  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  și  $\bar{Z}$ , paralele cu axele de coordonate (fig. 32). Pe baza teoremei lui Varignon, momentul în raport cu punctul  $O$  al forței rezultante  $\bar{F}$  este egal cu suma geometrică a momentelor, în raport cu punctul  $O$ , ale forțelor componente  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ . Dar, din formulele (4.4) și (2.15), urmează:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} + \dots = \sum_n M_{nx}, \\ M_y &= M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} + \dots = \sum_n M_{ny}, \\ M_z &= M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + \dots = \sum_n M_{nz}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Formulele (4.6) se pot interpreta în felul următor:

*Momentul rezultantei forțelor concurente în raport cu o axă oarecare este egal cu suma momentelor în raport cu aceeași axă a forțelor componente.*

Vom căuta, de exemplu, momentul  $\bar{M}_z$  al forței  $\bar{F}$  în raport cu axa  $Oz$ . Din ultima formulare a teoremei lui Varignon, valabilă pentru orice fel de axe, deducem că pentru determinarea momentului  $\bar{M}_z$  trebuie să se găsească momentele forțelor  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  în raport cu axa  $Oz$  și să le adunăm. Deoarece forța  $\bar{Z}$  este paralelă cu axa  $Oz$ , momentul ei în raport cu axa  $Oz$  este egal cu zero (§ 11); momentul forței  $\bar{Y}$  este egal cu  $+xY$ , întrucât dis-

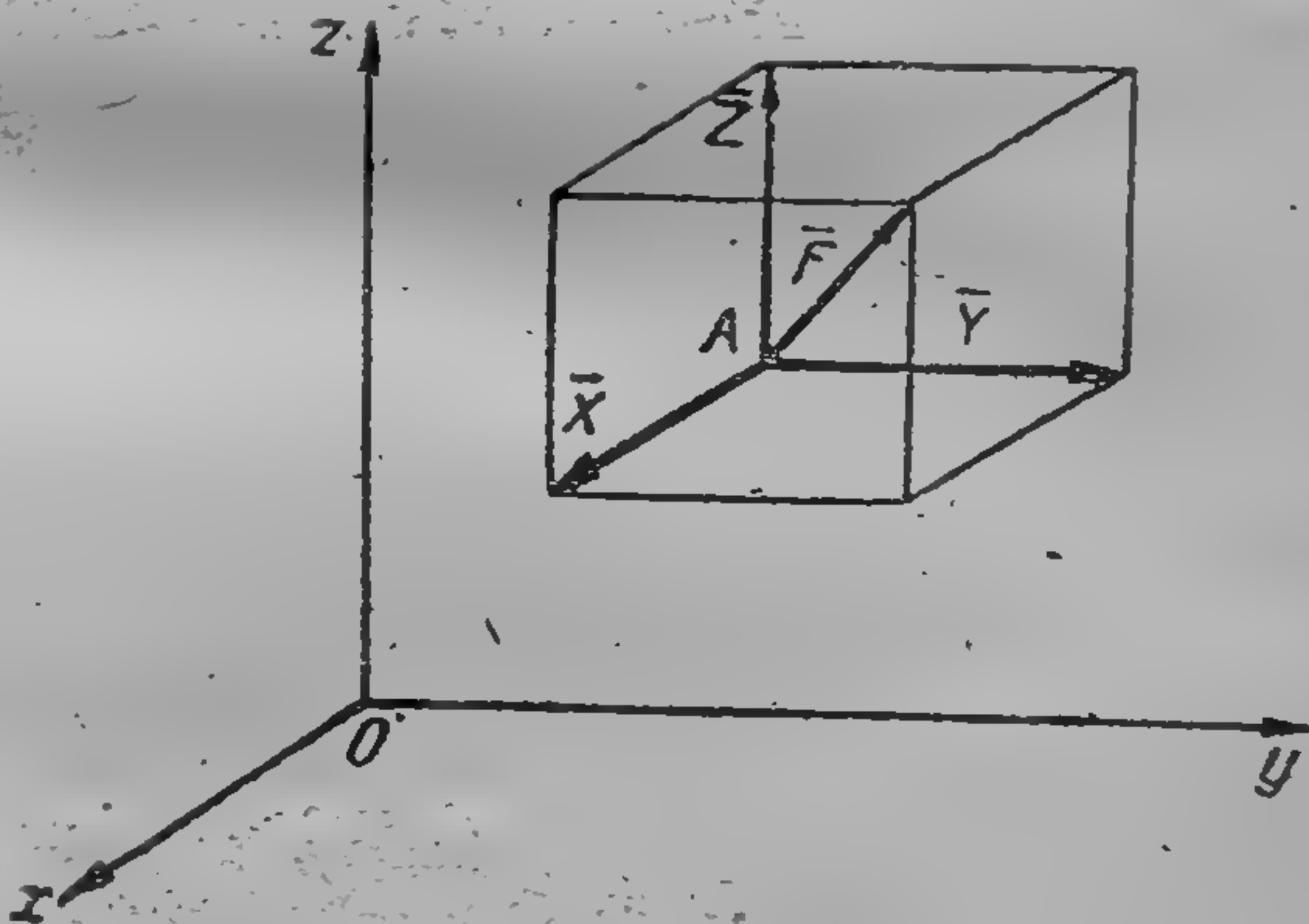


Fig. 32

tanța forței  $\bar{Y}$  de axa  $Oz$  este egală cu  $x$  și forța  $\bar{Y}$  tinde să producă în raport cu direcția pozitivă a axei  $Oz$  o rotație în sens contrar acelor unui ceasornic; prin analogie vom găsi că momentul forței  $\bar{X}$ , în raport cu axa  $Oz$  este egală cu  $-yX$ . Astfel, în conformitate cu relația a treia din formulele (4.6) avem:

$$M_z = -yX + xY + 0 = xY - yX,$$

adică, ajungem la ultima relație din formulele (2.17).



§ 22. Exemple. 10. Un punct material cu greutatea  $\vec{P}$  se găsește pe un plan înclinat perfect neted care formează unghiul  $\varphi$  cu orizontala; se cere să se studieze echilibrul punctului știind că asupra lui mai acționează forța  $\vec{Q}$  paralelă cu planul înclinat și dirijată în sus. Reprezentând forțele  $\vec{P}$  și  $\vec{Q}$  pe figura 33, trecem la examinarea legăturilor. Este evident că punctul material considerat este supus unei legături, deoarece punctul trebuie să rămână pe planul înclinat  $BC$ . Deoarece nu există frecare, reacțiunea  $\vec{R}$  a legăturii trebuie să fie dirijată perpendicular pe planul înclinat; să însemnăm pe figură forța  $\vec{R}$ . Astfel am ajuns la căutarea echilibrului punctului  $A$  sub acțiunea a trei forțe  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  și  $\vec{R}$ .

Începem cu procedeul geometric (grafic) de rezolvare a problemei. În primul rând vom construi poligonul forțelor care trebuie să fie închis pentru ca să existe echilibru, adică cele trei forțe  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  și  $\vec{R}$  trebuie să

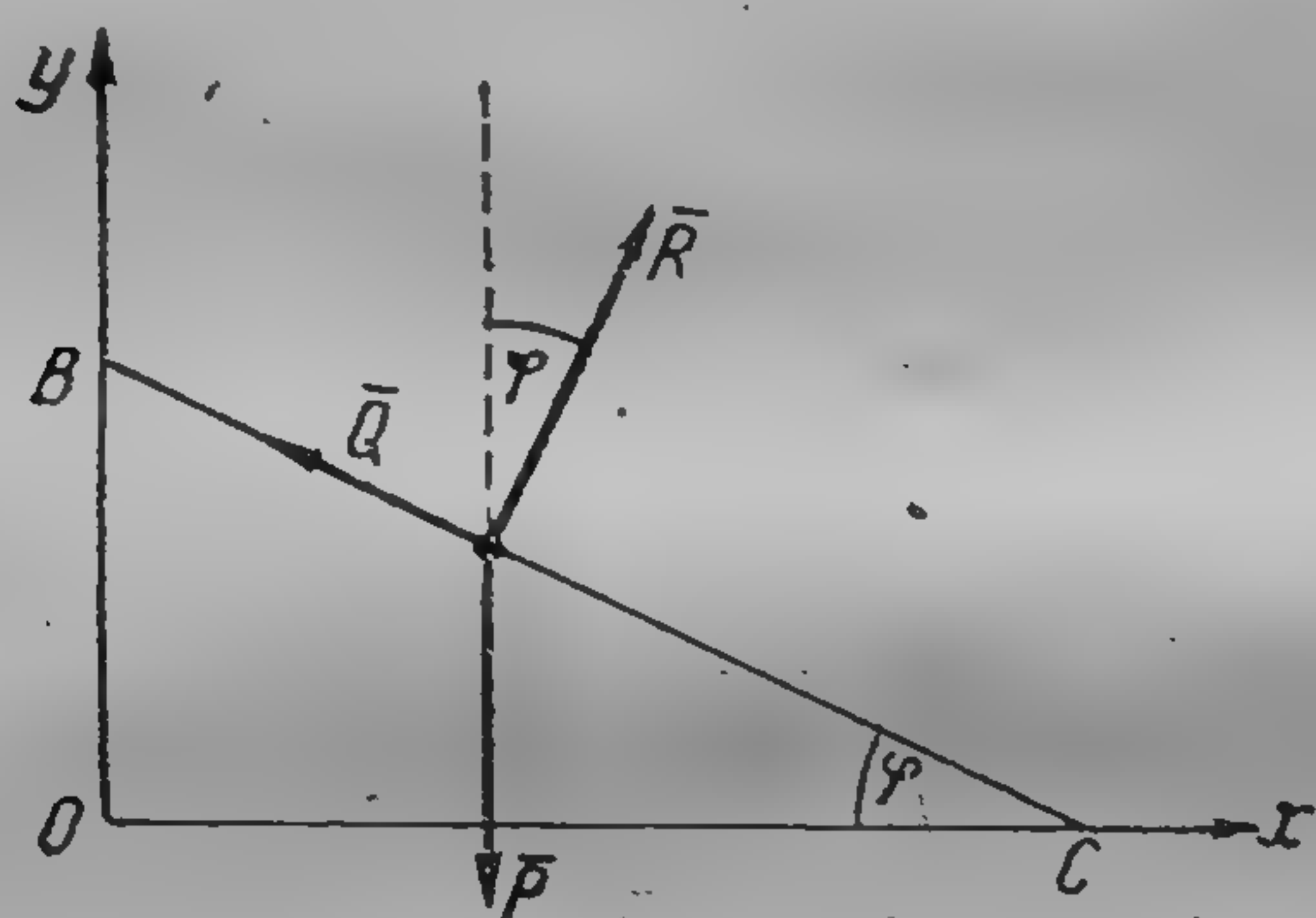


Fig. 33



Fig. 34

formeze un triunghi. În acest scop ducem un vector egal și paralel cu forța  $\vec{P}$ ; din originea lui ducem un vector egal și paralel cu forța  $\vec{Q}$ . Deoarece forța  $\vec{R}$  este perpendiculară pe forța  $\vec{Q}$ , ducem, în fig. 34, din extremitatea vectorului  $\vec{Q}$  o dreaptă perpendiculară pe vectorul  $\vec{Q}$  și în caz de echilibru, trebuie să observăm că dreapta dusă trece prin originea vectorului  $\vec{P}$ ; în aceasta constă condiția de echilibru exprimată geometric. Lungimea laturii  $\vec{R}$  a triunghiului din fig. 34 determină modulul necunoscut ca mărime al reacțiunii  $\vec{R}$ . Din triunghiul reprezentat în fig. 34 este ușor de dedus că condiția de echilibru va fi  $Q = P \sin \varphi$  și reacțiunea se determină prin egalitatea  $R = P \cos \varphi$ , adică ajungem la interpretarea numerică a rezultatelor obținute geometric.

Trecind la metoda vectorială de rezolvare a problemei, scriem ecuația de echilibru de forma (4.2), și anume:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0.$$



Ca să deducem din această ecuație modulul forței  $R$  vom înmulți ecuația scalar cu vectorul unitar  $\bar{R}^0$ ; deoarece  $\bar{R}^0 \perp \bar{Q}$  vom obține:

$$\bar{P} \cdot \bar{R}^0 + \bar{R} \cdot \bar{R}^0 = 0.$$

Deoarece unghiul dintre vectorii  $\bar{P}$  și  $\bar{R}^0$  este egal cu  $\pi - \varphi$ , găsim de aici:

$$-P \cos \varphi + R = 0,$$

adică ajungem la formula precedentă pentru modulul forței  $R$ . Pentru a găsi condiția de echilibru, adică pentru a elimina forța  $\bar{R}$ , înmulțim ecuația de echilibru scalar cu vectorul unitar  $\bar{Q}^0$ ; vom obține:

$$\bar{P} \cdot \bar{Q}^0 + \bar{Q} \cdot \bar{Q}^0 = 0.$$

Deoarece unghiul între vectorii  $\bar{P}$  și  $\bar{Q}^0$  este egal cu  $\frac{\pi}{2} + \varphi$ , vom găsi:

$$-P \sin \varphi + Q = 0,$$

adică, ajungem la condiția de echilibru sub forma obținută mai sus.

În sfârșit, să rezolvăm aceeași problemă pe cale analitică. Pentru aceasta trebuie să proiectăm toate forțele pe două direcții neparalele și sumele proiecțiilor să le egalăm cu zero. Să alegem aceste direcții și anume direcția  $CB$  și direcția forței  $R$ . Proiectând toate forțele pe direcția  $CB$ , vom obține pentru proiecția forțelor  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  și  $\bar{R}$ , respectiv:

$$-P \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = -P \sin \varphi, \quad Q, \quad 0;$$

de aceea, prima ecuație va fi:

$$-P \sin \varphi + Q = 0.$$

Proiectând aceleași forțe pe direcția forței  $\bar{R}$ , vom avea respectiv:

$$-P \cos \varphi, \quad 0, \quad R.$$

proiectând, obținem a doua ecuație sub forma

$$-P \cos \varphi + R = 0.$$

Este necesar să explicăm de ce am ales direcțiile precedente pentru efectuarea proiecțiilor. Ca să arătăm avantajul acestor direcții și să obținem regula pe care trebuie să o urmăm, vom rezolva aceeași problemă luând ca direcții pentru proiectare axele  $Ox$  și  $Oy$  (fig. 33). Proiectând forțele  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  pe axele  $Ox$  și  $Oy$  vom avea respectiv:

$$Ox) \quad 0, \quad -Q \cos \varphi, \quad R \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = R \sin \varphi;$$

$$Oy) \quad -P, \quad Q \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = Q \sin \varphi, \quad R \cos \varphi.$$

Formând ecuațiile, vom obține:

$$-Q \cos \varphi + R \sin \varphi = 0, \quad -P + Q \sin \varphi + R \cos \varphi = 0.$$



Vedem că modulul  $R$  al reacțiunii a intrat în ambele ecuații. Pentru a obține condiția de echilibru va fi necesar să eliminăm pe  $R$ . Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu  $-\cos \varphi$ , a doua cu  $\sin \varphi$  și adunându-le, obținem:

$$Q \cos^2 \varphi - P \sin \varphi + Q \sin^2 \varphi = 0,$$

sau

$$Q - P \sin \varphi = 0.$$

Pentru a găsi valoarea forței  $\bar{R}$ , înmulțim prima ecuație cu  $\sin \varphi$ , a doua cu  $\cos \varphi$  și adunându-le vom avea:

$$R \sin^2 \varphi - P \cos \varphi + R \cos^2 \varphi = 0,$$

sau

$$R - P \cos \varphi = 0.$$

Am obținut ecuațiile precedente dar numai după operații algebrice, în timp ce luând pentru formarea proiecțiilor direcțiile  $CB$  și  $\bar{R}$  vom obține imediat aceste ecuații. Nu este greu de explicat acest lucru. Observăm că dreapta  $CB$  este perpendiculară pe  $\bar{R}$ ; de aceea proiecția forței  $\bar{R}$  pe direcția  $CB$  este nulă. Proiecția forței  $\bar{R}$  pe direcția  $\bar{R}$  va fi  $+R$ , adică una din ecuații ne dă condiția de echilibru, iar cealaltă modulul reacțiunii. Desigur, dacă direcția reacțiunii nu ar fi cunoscută, atunci nu s-ar putea alege o direcție perpendiculară pe ea. De aici rezultă următoarea regulă:

*La alegerea proiecțiilor pentru eliminarea din ecuația de echilibru a reacțiunii a cărei direcție este cunoscută, trebuie luată ca direcție pe care se proiectează forțele, direcția perpendiculară pe reacțiune.*

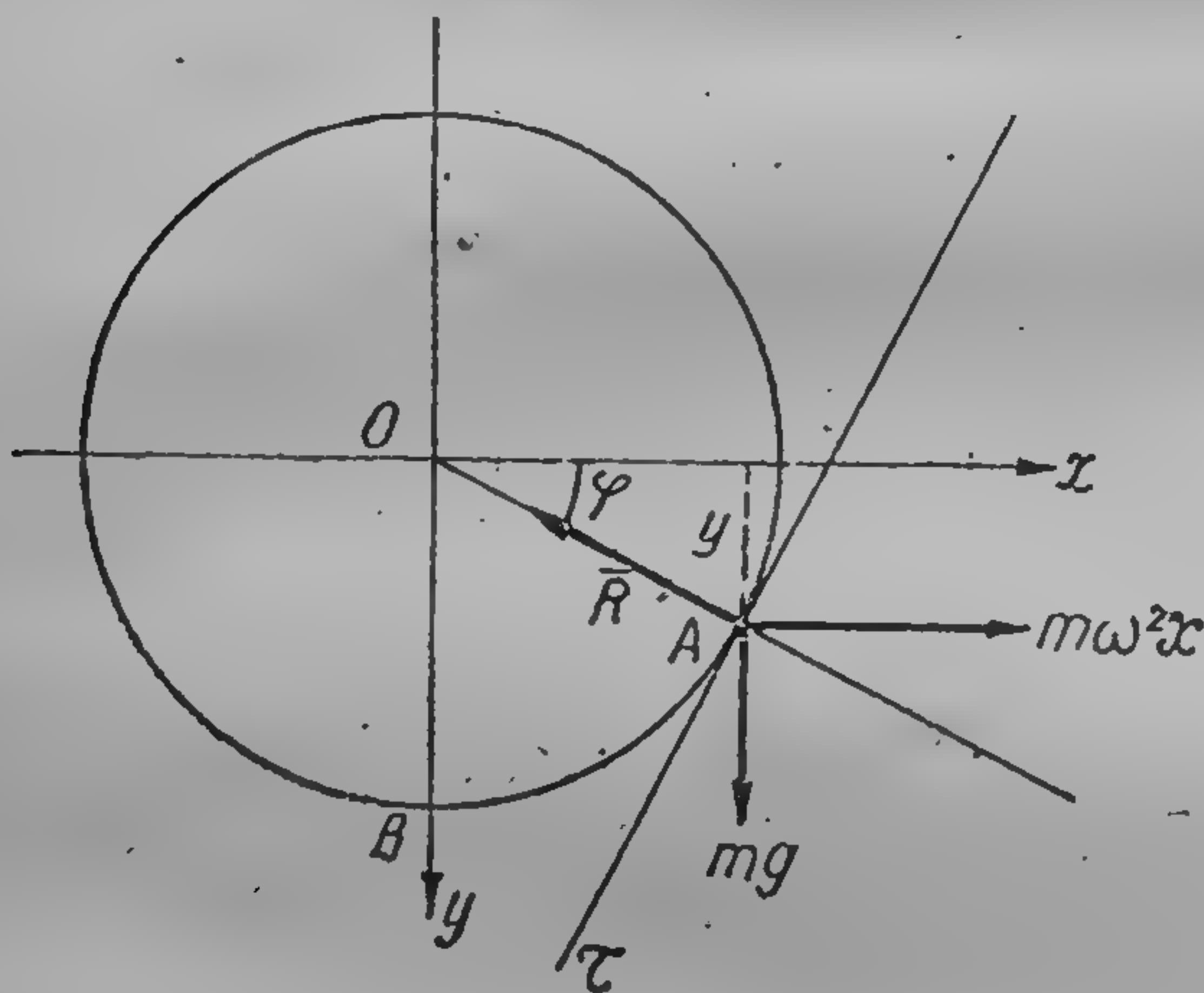


Fig. 35

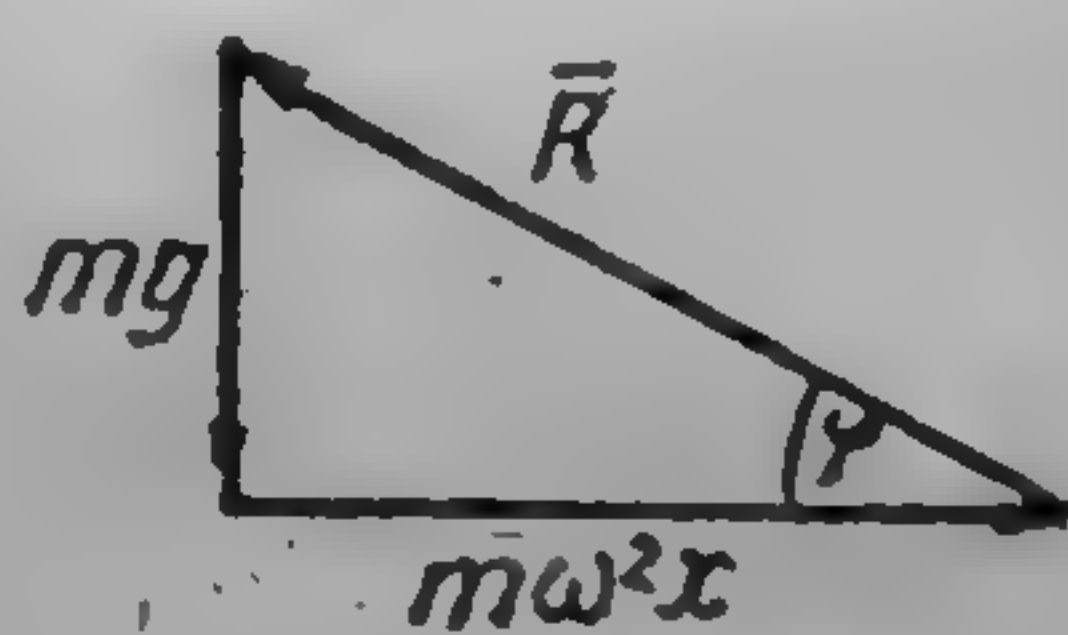


Fig. 36

11. Un punct material se găsește pe o circumferință cu raza  $a$ , și este respins după o direcție perpendiculară pe diametrul vertical  $Oy$  al acestei circumferințe, cu o forță egală cu  $m\omega^2 x$  unde  $m$  este masa punctului,  $\omega^2$  — un coeficient de proporționalitate și  $x$  distanța punctului la dreapta  $Oy$ . Să se studieze echilibrul punctului. Notăm unghiul format de raza  $OA$ , dusă prin punctul dat, cu axa orizontală  $Ox$  prin  $\varphi$  (fig. 35). Deoarece și în acest caz punctul nu este liber, la forța activă a greutății  $mg$  unde  $g$  este



acelerația gravitației și la forța  $m\omega^2 x$ , trebuie să se mai adauge reacțiunea legăturii  $R$  care va fi dirijată de-a lungul dreptei  $AO$ . Aplicând metoda grafică concludem că forțele  $mg$ ,  $m\omega^2 x$  și  $R$  trebuie să formeze un triunghi. Începem construcția de la forța  $mg$  cunoscută ca valoare, direcție și sens. Obținem triunghiul reprezentat în fig. 36 în care în afară de latura  $mg$ , cunoscută ca valoare, direcție și sens, este cunoscut numai faptul că latura  $m\omega^2 x$  este dirijată pe orizontală. Din acest triunghi avem:

$$m\omega^2 x = mg \operatorname{ctg} \varphi.$$

Deoarece din fig. 35 rezultă că  $x = a \cos \varphi$ , vom avea:

$$m\omega^2 a \cos \varphi = mg \operatorname{ctg} \varphi,$$

sau

$$\cos \varphi \left( m\omega^2 a - \frac{mg}{\sin \varphi} \right) = 0.$$

De aici se vede că ecuația care exprimă condiția de echilibru se împarte în două ecuații:

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin \varphi = \frac{g}{\omega^2 a}.$$

Tot din același triunghi găsim pentru valoarea reacțiunii  $\bar{R}$  următoarea expresie:

$$R = \frac{mg}{\sin \varphi}$$

în funcție de valoarea unghiului  $\varphi$  mărimea reacțiunii  $\bar{R}$  are două valori:

$$R = mg, \quad R = m\omega^2 a.$$

Înainte de a interpreta rezultatele obținute, să rezolvăm aceeași problemă prin metoda proiecțiilor.

Pentru a obține ecuațiile de proiecție pentru determinarea modulului forței  $R$  și condiția de echilibru, este suficient să alegem ca axe direcțiile  $AO$  și  $A\tau$ , unde  $A\tau$  este dirijat de-a lungul tangentei la circumferință. Proiectând toate forțele pe această direcție, vom obține:

$$R - m\omega^2 x \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0,$$

$$mg \cos \varphi - m\omega^2 x \sin \varphi = 0,$$

sau

$$R - m\omega^2 a \cos^2 \varphi - mg \sin \varphi = 0;$$

$$mg \cos \varphi - m\omega^2 a \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

De aici rezultă:

$$R = m(\omega^2 a \cos^2 \varphi + g \sin \varphi),$$

$$\cos \varphi (g - \omega^2 a \sin \varphi) = 0.$$

În acest fel ajungem la aceleași rezultate cu cele obținute mai înainte prin metoda grafică.

Din relația  $\sin \varphi = \frac{g}{\omega^2 a}$  rezultă că trebuie să avem  $\frac{g}{\omega^2 a} \leq 1$  adică  $\omega^2 \geq \frac{g}{a}$ . Prin urmare dacă  $\omega^2 < \frac{g}{a}$ , atunci este posibilă numai o singură poziție de



echilibru în punctul B, pentru care vom avea:  $\cos \varphi = 0$ . Dacă însă  $\omega^2 \geq \frac{g}{a}$ , atunci sînt posibile două poziții de echilibru, atât în punctul B cît și în acel punct A în care rezultanta forțelor  $m \cdot \omega^2 x$  și  $mg$  este dirijată după direcția razei OA și va fi echilibrată de reacțiunea normală, R. Se poate demonstra

că în acest din urmă caz, poziția de echilibru în punctul A va fi stabilă, iar în punctul B nestabilă.

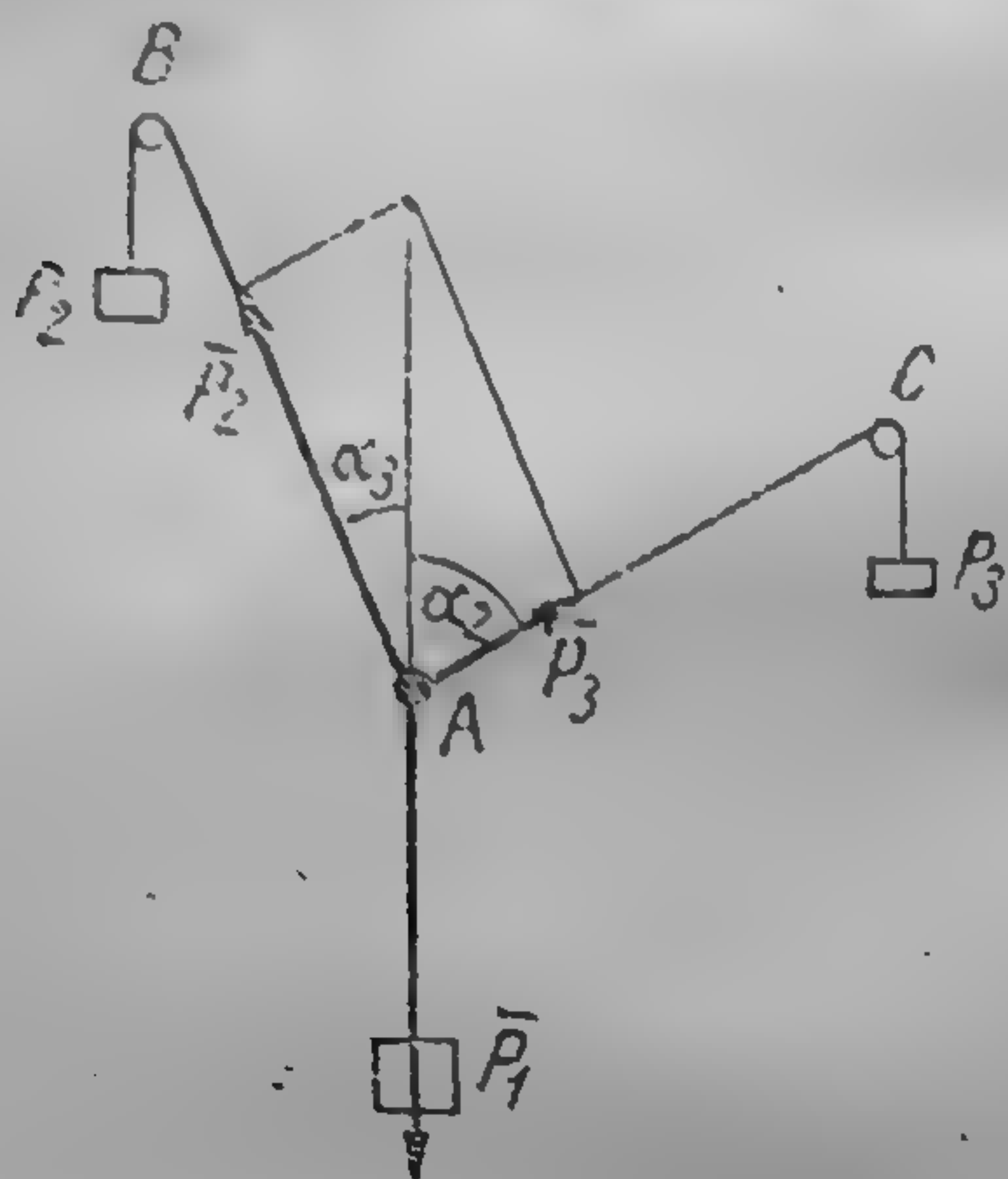


Fig. 37

12. În punctul A este atârnat un fir care susține greutatea  $P_1$ ; la capetele firului petrecut prin doi scripeți B și C sînt fixate greutățile  $P_2$  și  $P_3$ ; întregul sistem format din aceste trei greutăți se găsește în echilibru. Să se studieze echilibrul punctului A. Deoarece toate trei forțele  $P_1$ ,  $P_2$  și  $P_3$  care acționează asupra punctului A ne sînt date, condițiile de echilibru se

reduc la relații care determină unghiurile  $\alpha_2$  și  $\alpha_3$  (fig. 37). Începem construirea triunghiului forțelor cu forța  $P_1$  care ne este dată ca mărime, direcție și sens. Vedem că ajungem la problema cunoscută din geometria elementară a construirii unui triunghi, cînd sînt date cele trei laturi. Să notăm perimetrul triunghiului prin  $2p$ , adică:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 2p.$$

Din trigonometrie se știe că:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{(p-P_1)(p-P_3)}{(p-P_2)p}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2} = \sqrt{\frac{(p-P_1)(p-P_2)}{(p-P_3)p}}.$$

Rezolvarea problemei este posibilă numai în cazul cînd avem:

$$|P_2 - P_3| < P_1 < P_2 + P_3.$$

Pentru această problemă ne mărginim numai la acest singur mod de rezolvare, ca unul cu care se ajunge mai repede la rezultat.

13. În vîrfurile triunghiului echilateral AOB sînt situate respectiv masele  $m_1$ ,  $m_2$  și  $m_3$ . Să se găsească poziția de echilibru a unei mase  $m$  care este atrasă de aceste mase cu forțe proporționale cu produsul maselor și cu distanța dintre ele. Vom rezolva această problemă prin metoda proiecțiilor, ca fiind cea mai simplă.



Vom lua originea coordonatelor în punctul  $O$  și vom dirija axa  $Ox$  după dreapta  $OA$  (fig. 38). Deoarece aici trebuie să se echilibreze trei forțe, ele trebuie să fie în același plan (§ 20); prin urmare poziția de echilibru a punctului  $C$  de masă  $m$ , se găsește în planul  $OAB$ . Notăm coordonatele punctului  $C$  prin  $(x, y)$ , iar lungimea laturii triunghiului  $OAB$  prin  $a$ . Forțele de atracție ale punctului  $C$  de către punctele  $O$ ,  $A$  și  $B$  vor fi respectiv:

$$\vec{F}_1 = kmm_1 \vec{CO},$$

$$\vec{F}_2 = kmm_2 \vec{CA},$$

$$\vec{F}_3 = kmm_3 \vec{CB},$$

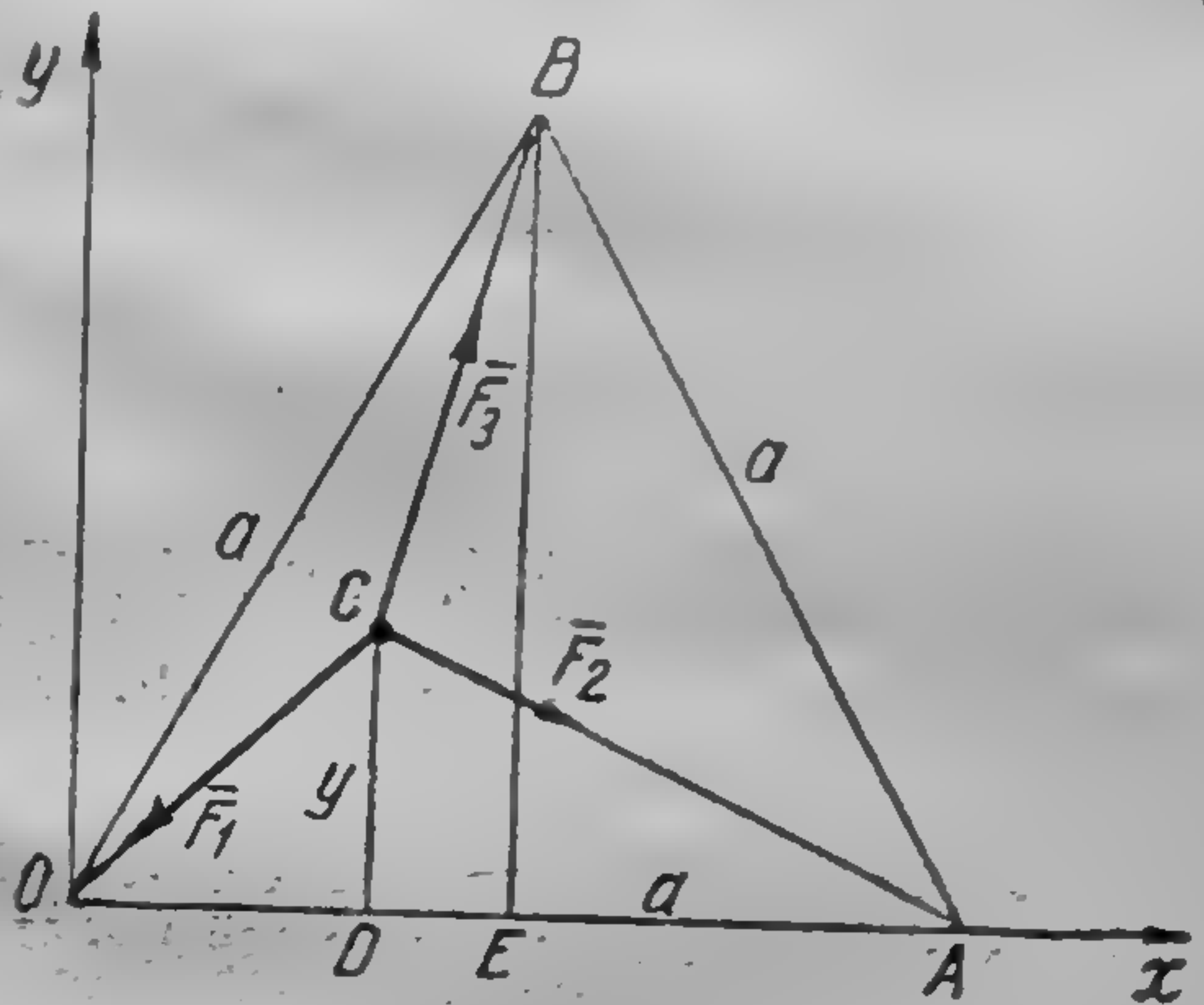


Fig. 38

unde  $k$  este factorul de proporționalitate și vor fi dirijate de la punctul  $C$  spre punctele  $O$ ,  $A$  și  $B$ . În expresiile proiecțiilor forțelor  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  și  $\vec{F}_3$  pe axe de coordonate, va interveni proiecția vectorilor  $\vec{CO}$ ,  $\vec{CA}$  și  $\vec{CB}$  pe axe de coordonate. Dar este ușor de văzut că vom avea:

$$pr_x \vec{CO} = DO = -x, \quad pr_x \vec{CA} = DA = a - x, \quad pr_x \vec{CB} = \frac{a}{2} - x,$$

$$pr_y \vec{CO} = CD = -y, \quad pr_y \vec{CA} = CD = -y, \quad pr_y \vec{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - y,$$

unde  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  este înălțimea  $BE$  a triunghiului  $OAB$ . De aici, găsim pentru proiecția forțelor următoarele expresii:

$$X_1 = -kmm_1 x, \quad Y_1 = -kmm_1 y,$$

$$X_2 = kmm_2 (a - x), \quad Y_2 = -kmm_2 y,$$

$$X_3 = kmm_3 \left( \frac{a}{2} - x \right), \quad Y_3 = kmm_3 \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right).$$

Ecuațiile de echilibru vor fi:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0,$$

sau

$$-kmm_1 x + kmm_2 (a - x) + kmm_3 \left( \frac{a}{2} - x \right) = 0,$$

$$-kmm_1 y - kmm_2 y + kmm_3 \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right) = 0.$$



Simplificând cu  $km$ , vom obține:

$$m_1 x + m_2 a - m_2 x + m_3 \frac{a}{2} - m_3 x = 0,$$

$$-m_1 y - m_2 y + m_3 \frac{a\sqrt{3}}{2} - m_3 y = 0.$$

Rezolvând aceste ecuații, obținem:

$$x = \frac{a}{2} \frac{2m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Aceste formule determină coordonatele aceluși punct  $C$  în care masa  $m$  va fi în echilibru. În cazul particular, când  $m_1 = m_2 = m_3$ , avem:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

adică, punctul  $C$  se găsește în centrul circumferinței circumscrise triunghiului  $OAB$ , ceea ce este evident și rezultă în mod direct. În această problemă punctul  $m$  este liber, și de aceea nu există reacțiuni.



## CAPITOLUL V

### REDUCEREA FORTELOR PARALELE

§ 23. Forțele paralele dirijate în același sens. Forțele se numesc *paralele* dacă suporturile lor sînt paralele. Dacă două forțe paralele sînt de sens contrar, ele se mai numesc uneori și *antiparalele*.

Vom examina cazul a două forțe paralele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , dirijate în același sens, aplicate asupra unui solid; notăm punctele lor de aplicație cu  $A_1$  și  $A_2$ .

Vom demonstra că două forțe paralele dirijate în același sens, admit totdeauna o rezultantă. Ne referim la fig. 39. Să aplicăm în punctele  $A_1$  și  $A_2$  două forțe  $\vec{p}$  și  $\vec{q}$ , egale între ele ca valoare absolută, avînd ca suport dreapta  $A_1A_2$ , și acționînd în sensuri opuse. Adunînd forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{p}$  și forțele  $\vec{F}_2$  și  $\vec{q}$ , vom obține rezultantele  $\vec{A_1D_1}$  și  $\vec{A_2D_2}$ , care se pot muta în punctul lor de concurență  $O$ . Descompunîndu-le acolo din nou în

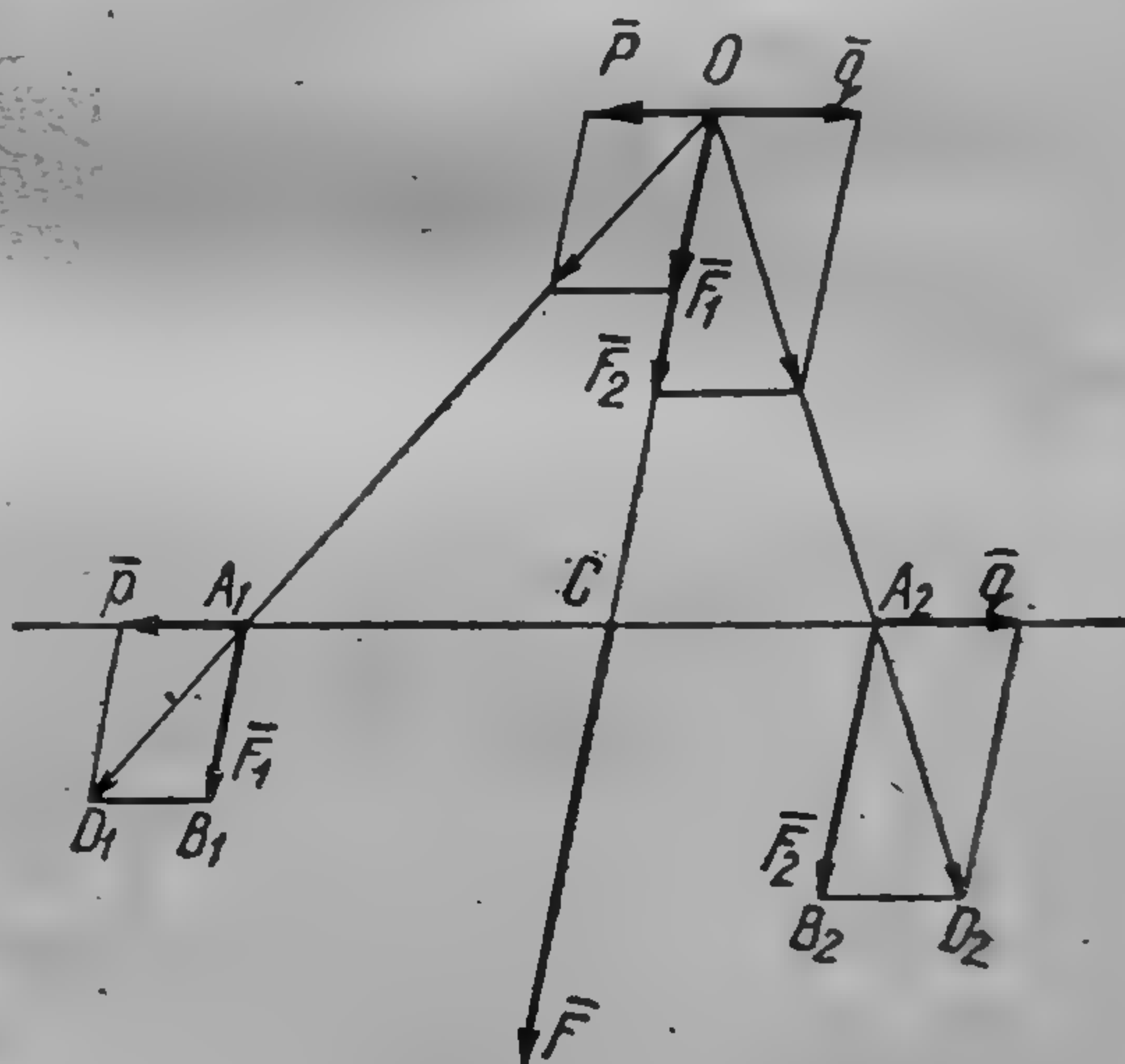


Fig. 39

forțele precedente, vom obține cele două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  aplicate în punctul  $O$  și cele două forțe  $\vec{p}$  și  $\vec{q}$ , aplicate de asemenea în același punct  $O$ . Forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  dau rezultanta  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , care se poate muta în punctul  $C$  al dreptei  $A_1A_2$  iar forțele  $\vec{p}$  și  $\vec{q}$  se



echilibrează între ele. Să găsim poziția punctului  $C$ ; pentru aceasta, să examinăm următoarele triunghiuri:

$$\triangle A_1 B_1 D_1 \sim \triangle A_1 O C \text{ și } \triangle A_2 B_2 D_2 \sim \triangle A_2 O C.$$

Din asemănarea primelor două triunghiuri, obținem:

$$\frac{CA_1}{OC} = \frac{B_1 D_1}{A_1 B_1} = \frac{p}{F_1};$$

din asemănarea celei de-a doua perechi de triunghiuri, găsim:

$$\frac{CA_2}{OC} = \frac{B_2 D_2}{A_2 B_2} = \frac{q}{F_2}.$$

Împărțind cele două proporții obținem:

$$\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (5.1)$$

Astfel, ajungem la teorema:

*Două forțe paralele dirijate în același sens, au totdeauna o rezultantă paralelă cu ele și dirijată în același sens; modulul rezultantei este egal cu suma modulelor forțelor componente, iar punctul ei de aplicație împarte distanța dintre punctele de aplicație a componentelor, în părți invers proporționale cu forțele componente.*

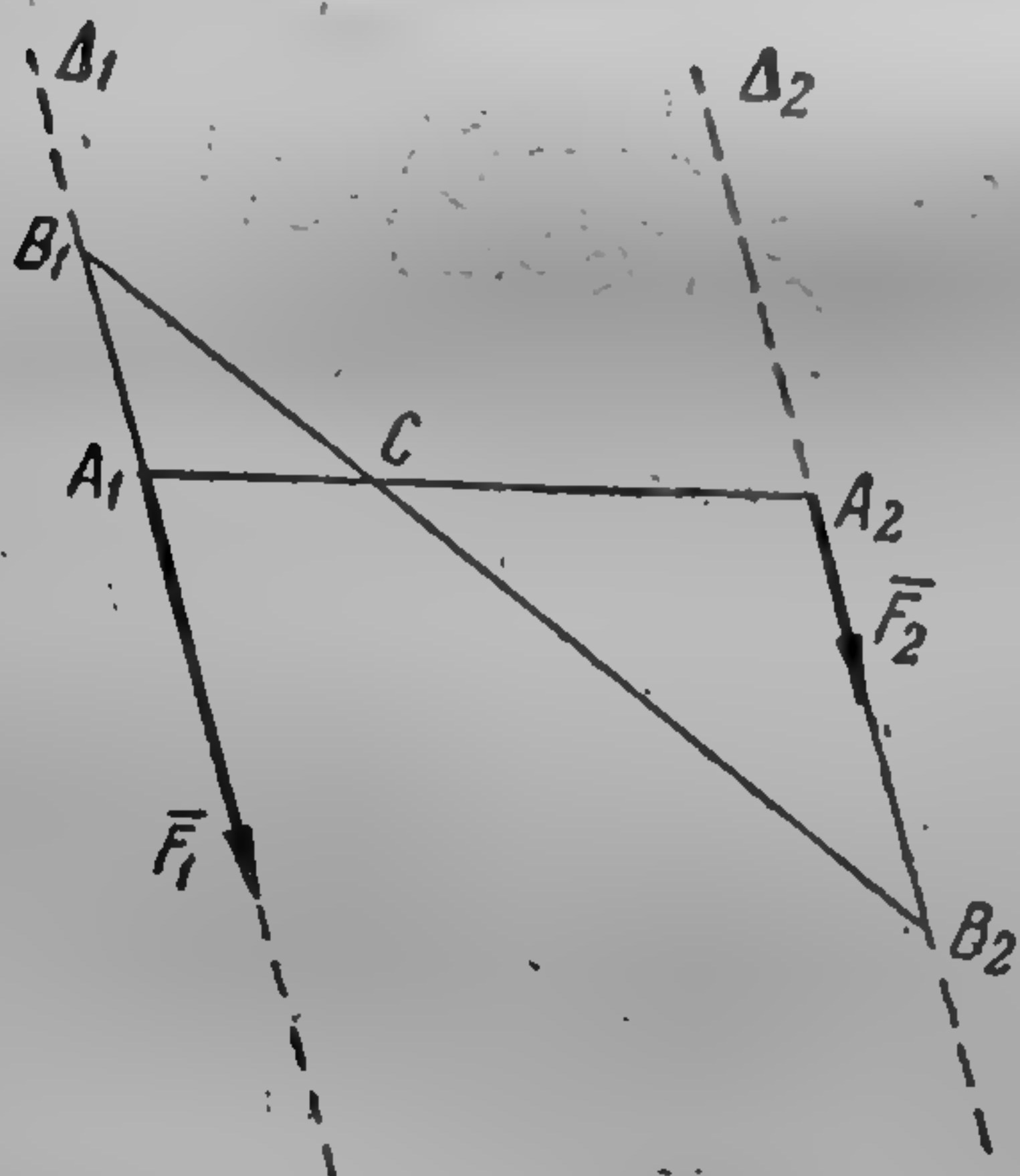


Fig. 40

Poziția punctului  $C$  se află ușor printr-o simplă construcție geometrică. Pe suporturile  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  ale forțelor  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$ , măsurăm segmentele  $A_1 B_1$  și  $A_2 B_2$ , dintre care segmentul  $A_1 B_1 = F_2$  este dirijat în sens contrar cu forța  $\bar{F}_1$ , iar segmentul  $A_2 B_2 = F_1$  este dirijat în același sens cu forța  $\bar{F}_2$  (fig. 40). Unind printr-o dreaptă punctele  $B_1$  și  $B_2$  vom găsi punctul căutat  $C$ , ca punct de intersecție al dreptelor  $A_1 A_2$  și  $B_1 B_2$ . În adevăr, din asemănarea triunghiurilor  $A_1 B_1 C$  și  $A_2 B_2 C$ , ajungem imediat la relația (5.1).



Dacă avem câteva forțe paralele dirijate în același sens, vom obține rezultanta, adunând inițial două forțe, iar rezultanta parțială obținută, o adunăm cu forța a treia etc. Din cele precedente rezultă că *modulul rezultantei forțelor paralele dirijate în același sens este egal cu suma modulelor tuturor forțelor componente*.

Între adunarea a două forțe paralele dirijate în același sens și adunarea după regula paralelogramului a două forțe aplicate în același punct, există o diferență esențială. Adunarea a două forțe paralele dirijate în același sens se poate demonstra matematic pe baza proprietăților cunoscute ale forțelor, printre care și adunarea forțelor concurente. Adunarea însă a două forțe aplicate la același punct, cum am văzut în § 3, nu se poate demonstra matematic, ci este un principiu al științelor naturii.

La prima vedere pare că, cuprinsul § 23, în care se tratează despre punctele de aplicare ale forțelor componente și despre rezultanta forțelor paralele, este în contradicție cu § 2, în care se arată că: „orice teoremă despre forțe aplicate asupra unui solid nu trebuie să fie în contradicție cu ipoteza că punctul de aplicație al forței se poate deplasa în solid de-a lungul suportului forței”. Pentru a îndepărta această nepotrivire între § 2 și § 23, să precizăm sensul care trebuie dat pentru punctele de aplicație în cazul forțelor paralele. Pentru aceasta vom roti suporturile  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  ale forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , în jurul punctelor  $A_1$  și  $A_2$ , menținând aceste direcții paralele între ele (fig. 41). Din construcția precedentă, urmează că suportul  $\Delta$  al rezultantei lor  $\vec{F}$ , se va roti în jurul punctului  $C$  rămânând paralel cu primele două suporturi. În ceea ce privește forțele  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , ele se pot deplasa arbitrar pe suporturile lor. În acest fel, punctele  $A_1$ ,  $A_2$  și  $C$  sînt de fapt centrele de rotație ale suporturilor forțelor paralele considerate, dar nu puncte fixe de aplicare a acestor forțe.

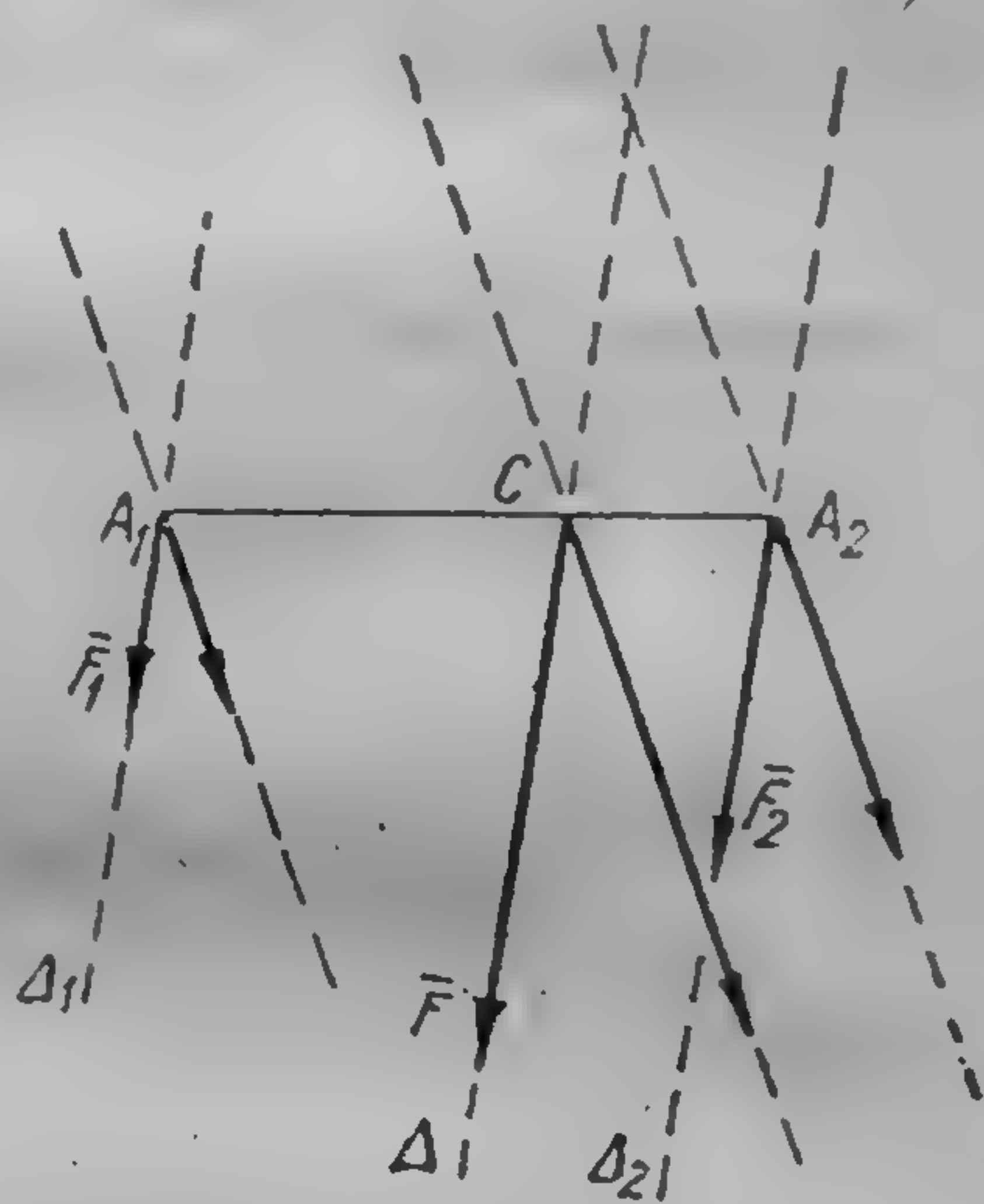


Fig. 41



Se observă ușor că dându-se punctele de aplicație ale forțelor paralele și de același sens și căutînd punctul de aplicație al rezultantei forțelor paralele sau, mai precis, căutînd centrul de rotație al suportului rezultantei, vom găsi că: centrul de rotație al suportului rezultantei forțelor paralele dirijate în același sens, se află totdeauna în interiorul unui poliedru convex care conține în interior sau pe extremitățile lui, centrele de rotație ale suporturilor forțelor componente. Centrul de rotație al suportului rezultantei forțelor paralele, se numește *centrul forțelor paralele*.

Este evident că poziția centrului  $C$  al forțelor paralele nu depinde de direcția acestor forțe în spațiu; de aceea la rotirea tuturor acestor forțe cu același unghi poziția centrului  $C$  nu se schimbă.

Astfel obținem următoarea expresie pentru rezultanta forțelor paralele:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots = \sum_n \bar{F}_n, \\ F &= F_1 + F_2 + F_3 + \dots = \sum_n F_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Exprimînd forțele prin vectori unitari, pe baza formulelor

$$\bar{F} = i\bar{X} + j\bar{Y} + k\bar{Z},$$

$$\bar{F}_1 = i\bar{X}_1 + j\bar{Y}_1 + k\bar{Z}_1,$$

$$\bar{F}_2 = i\bar{X}_2 + j\bar{Y}_2 + k\bar{Z}_2,$$

$$\bar{F}_3 = i\bar{X}_3 + j\bar{Y}_3 + k\bar{Z}_3$$

și introducînd aceste expresii în prima din formulele (5.2), vom obține:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \sum_n X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum_n Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots = \sum_n Z_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Vedem că:

*Proiecția rezultantei forțelor paralele pe orice axă, este egală cu suma proiecțiilor forțelor componente pe aceeași axă.*



Notăm că teorema adunării a două forțe paralele se poate obține evitând adăugarea aparent artificială a forțelor  $\bar{p}$  și  $\bar{q}$ , considerînd forțele paralele ca un caz limită al forțelor concurente. În adevăr, fie două două forțe concurente  $F_1$  și  $F_2$ , aplicate în punctele  $A_1$  și  $A_2$  (fig. 42).

Mutînd aceste forțe în punctul lor de concurență  $O$ , și adunîndu-le după regula paralelogramului, vom obține rezultanta  $\bar{F}$  care se poate muta în punctul  $C$ . Din triunghiurile  $A_1OC$  și  $A_2OC$ , avem:

$$\frac{CA_1}{OC} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin A_1}, \quad \frac{CA_2}{OC} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin A_2}.$$

Impărțind aceste proporții între ele, găsim:

$$\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin A_2}{\sin A_1}.$$

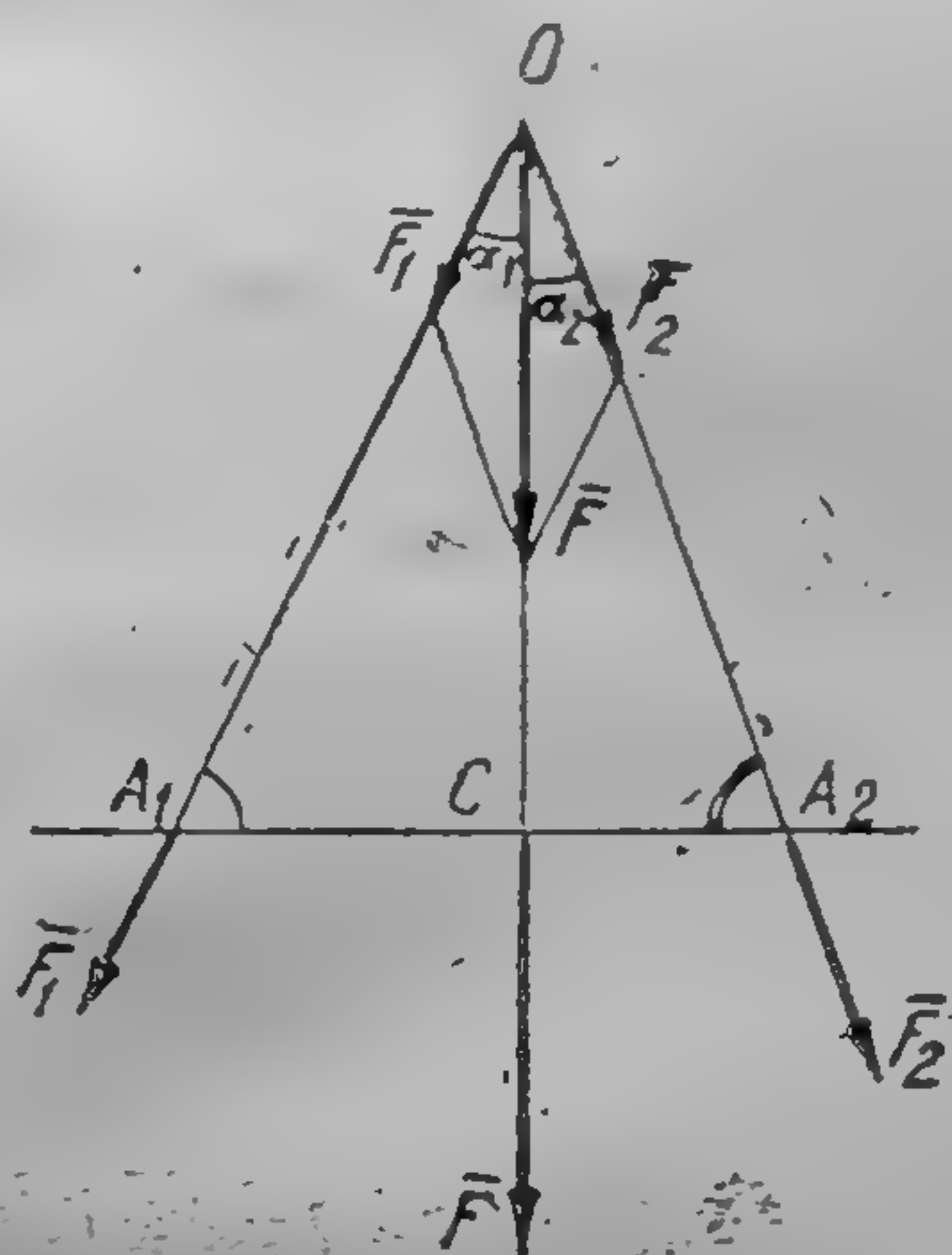


Fig. 42

Dar, din triunghiurile paralelogramului forțelor, obținem:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{F_1},$$

adică:

$$\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{F_2}{F_1} \frac{\sin A_2}{\sin A_1}.$$

Cînd punctul  $O$  se îndepărtează la infinit, unghiul  $A_2$  tinde către valoarea  $\pi - A_1$ , și raportul

$$\frac{\sin A_2}{\sin A_1}$$

tinde către 1. Astfel, la limită, obținem formula (5.1). În ceea ce privește mărimea  $F$  a rezultantei, aceasta va fi după formula (1.1):

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\widehat{F_1F_2}).$$



Cînd punctul  $O$  tinde către infinit, unghiul  $(\widehat{F_1 F_2})$  tinde către zero și la limită, obținem:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2,$$

adică

$$F = F_1 + F_2.$$

Să găsim acum momentul rezultat al unui sistem de forțe paralele dirijate în același sens. Vom examina mai întîi numai cazul a două forțe paralele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  cu rezultanta  $\vec{F}$  (fig. 43).

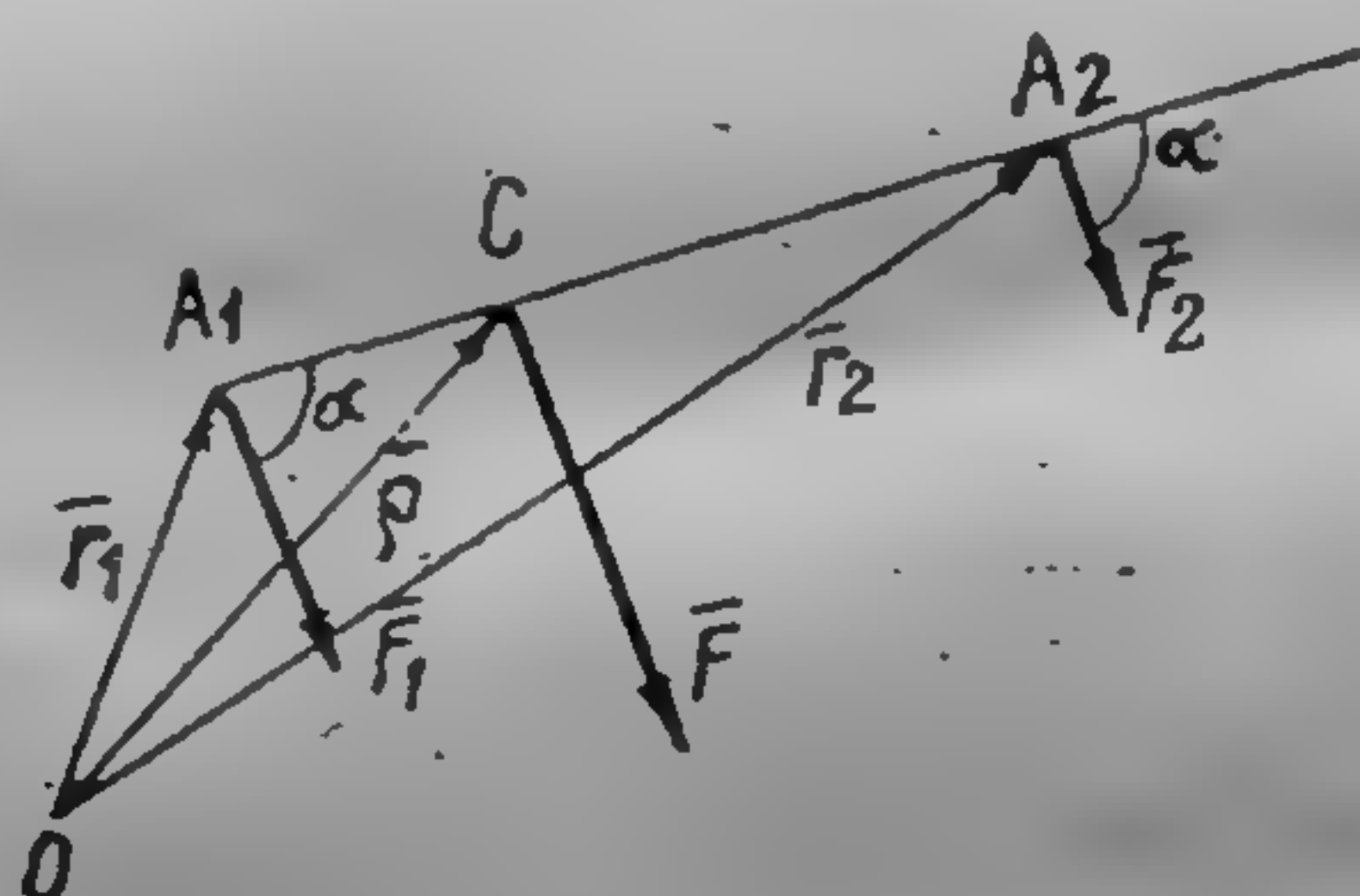


Fig. 43

Considerăm în spațiu un punct oarecare  $O$ , în raport cu care vom determina momentele forțelor și construim vectorii  $\vec{OA}_1 = \vec{r}_1$ ,  $\vec{OA}_2 = \vec{r}_2$ ,  $\vec{OC} = \vec{p}$ .

Momentul rezultat  $\vec{M}$  al forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  în raport cu punctul  $O$ , va fi conform formulei (4.4):

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$

Din fig. 43 se deduce:

$$\vec{p} + \vec{CA}_1 = \vec{r}_1, \quad \vec{p} + \vec{CA}_2 = \vec{r}_2,$$

adică trebuie să avem:

$$\vec{M} = (\vec{p} + \vec{CA}_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{p} + \vec{CA}_2) \times \vec{F}_2,$$

sau

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{F}_1 + \vec{p} \times \vec{F}_2 + \vec{CA}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{CA}_2 \times \vec{F}_2.$$

Vom demonstra că suma ultimilor doi termeni este egală cu zero. În adevăr, modulele acestor termeni sînt egali deoarece

$$|\vec{CA}_1 \times \vec{F}_1| = CA_1 \cdot F_1 \sin(\widehat{\vec{CA}_1, \vec{F}_1}) = CA_1 \cdot F_1 \sin \alpha;$$

$$|\vec{CA}_2 \times \vec{F}_2| = CA_2 \cdot F_2 \sin(\widehat{\vec{CA}_2, \vec{F}_2}) = CA_2 \cdot F_2 \sin(\pi - \alpha) = CA_2 \cdot F_2 \sin \alpha.$$



Pe de altă parte, din relația (5.1) obținem:

$$CA_1 \cdot F_1 = CA_2 \cdot F_2;$$

astfel, avem:

$$|\overline{CA_1} \times \overline{F_1}| = |\overline{CA_2} \times \overline{F_2}|.$$

Dar din fig. 43 se observă ușor că direcțiile acestor produse vectoriale sînt aceleași, normale pe planul determinat de forțele paralele, iar sensurile sînt opuse, așa că trebuie să avem:

$$\overline{CA_1} \times \overline{F_1} + \overline{CA_2} \times \overline{F_2} = 0;$$

de aceea, ajungem la egalitatea:

$$\overline{M} = \overline{\rho} \times \overline{F_1} + \overline{\rho} \times \overline{F_2}.$$

Aplicînd la această egalitate formula (2.7), obținem:

$$\overline{M} = \overline{\rho} \times (\overline{F_1} + \overline{F_2}) = \overline{\rho} \times \overline{F},$$

adică momentul resultant a două forțe paralele dirijate în același sens este egal cu momentul rezultantei lor.

Vom arăta că această teoremă se poate extinde asupra oricărui număr de forțe paralele dirijate în același sens. Să examinăm, de exemplu, cazul a trei forțe paralele dirijate în același sens (fig. 44). Fie  $\overline{F'}$  rezultanta forțelor  $\overline{F_1}$  și  $\overline{F_2}$ . După cele arătate pînă acum, pentru două forțe, avem:

$$\overline{r_1} \times \overline{F_1} + \overline{r_2} \times \overline{F_2} = \overline{\rho'} \times \overline{F'},$$

unde  $\overline{\rho'} = \overline{OC'}$ . Pentru a obține rezultanta tuturor celor trei forțe  $\overline{F_1}$ ,  $\overline{F_2}$  și  $\overline{F_3}$ , rămîne de aduna forțele  $\overline{F'}$  și  $\overline{F_3}$ ; vom obține:

$$\overline{F} = \overline{F'} + \overline{F_3} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3},$$

și după cele demonstrate pentru două forțe, avem

$$\overline{\rho'} \times \overline{F'} + \overline{r_3} \times \overline{F_3} = \overline{\rho} \times \overline{F},$$

sau, observînd cele precedente:

$$\overline{r_1} \times \overline{F_1} + \overline{r_2} \times \overline{F_2} + \overline{r_3} \times \overline{F_3} = \overline{\rho} \times \overline{F}.$$

Știînd că găsim expresia pentru momentul resultant a trei forțe, prin același procedeu, putem găsi expresia pentru momentul

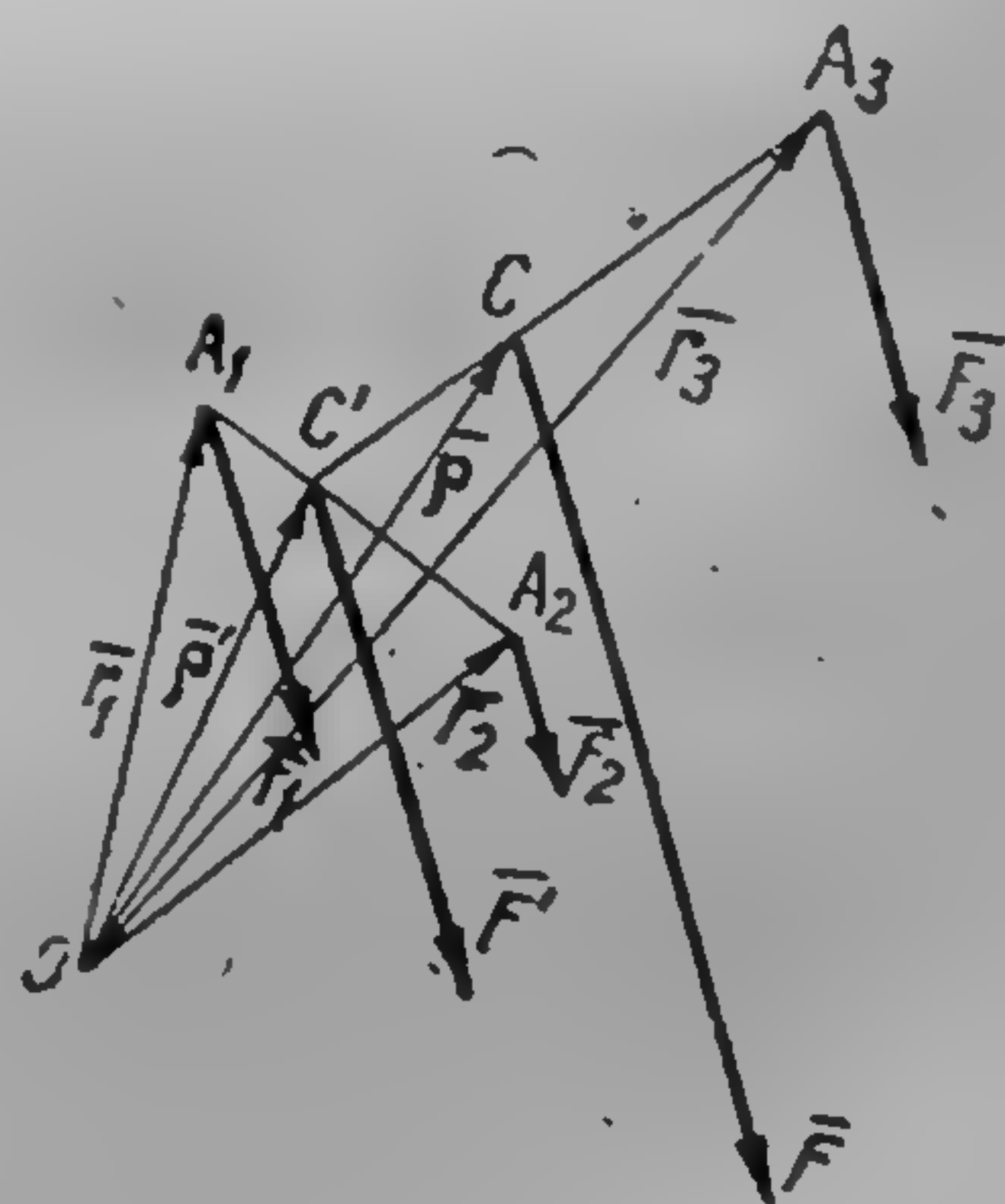


Fig. 44



rezultantă a patru forțe paralele dirijate în același sens și așa mai departe. Astfel se ajunge la *teorema lui Varignon pentru un sistem de forțe paralele dirijate în același sens*:

*Momentul rezultant al unui sistem de forțe paralele dirijate în același sens, este egal cu momentul rezultantei.*

Plecând de la teorema lui Varignon nu este greu de găsit coordonatele centrului forțelor paralele dirijate în același sens. Să notăm aceste coordonate prin  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  și coordonatele punctelor  $A_1, A_2, A_3, \dots$  de aplicație a forțelor  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$  respectiv  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots$

De aici avem:

$$\bar{\rho} = \bar{i}\bar{x} + \bar{j}\bar{y} + \bar{k}\bar{z},$$

$$\bar{r}_1 = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1,$$

$$\bar{r}_2 = \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{k}z_2,$$

$$\bar{r}_3 = \bar{i}x_3 + \bar{j}y_3 + \bar{k}z_3,$$

$$\dots$$

Rotim toate forțele  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$  în jurul punctelor  $A_1, A_2, A_3, \dots$  cu același unghi, astfel încât toate forțele să devină paralele, de exemplu, cu axa  $Oz$ ; știm că prin aceasta centrul forțelor paralele nu se va muta și prin urmare coordonatele lui  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  vor rămâne neschimbate. Aplicând teorema lui Varignon, avem:

$$\bar{\rho} \times \bar{F} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 + \bar{r}_3 \times \bar{F}_3 \dots,$$

unde  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots$ . Reprezentând produsele vectoriale prin determinanți după formula (2.12) obținem:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} + \dots$$

Deoarece prin rotire toate forțele au devenit paralele cu axa  $Oz$ , proiecțiile lor pe axele  $Ox$  și  $Oy$  sînt egale cu zero, dar pe axa  $Oz$  ele se proiectează în mărime naturală, adică avem:

$$Z = F, \quad Z_1 = F_1, \quad Z_2 = F_2 \text{ și } Z_3 = F_3, \dots$$



De aceea, egalitatea precedentă la următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \xi & \eta & \zeta \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & 0 & F_3 \end{vmatrix} + \dots$$

Dezvoltând acești determinanți vom găsi că un rând de produse se vor anula și vom obține:

$$\bar{i}\xi F - \bar{j}\eta F = \bar{i}y_1 F_1 - \bar{j}x_1 F_1 + \bar{i}y_2 F_2 - \bar{j}x_2 F_2 + \bar{i}y_3 F_3 - \bar{j}x_3 F_3 + \dots$$

sau

$$\bar{i}\eta F - \bar{j}\xi F = \bar{i}(F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots) - \bar{j}(F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots).$$

De aici comparînd între ei coeficienții lui  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$ , găsim:

$$\xi F = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots,$$

$$\eta F = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots$$

Rotînd toate forțele astfel încît ele să devină paralele, de exemplu cu axa  $Ox$ , putem adăuga la aceste două relații și relația:

$$\zeta F = F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \dots$$

Determinînd din aceste relații coordonatele  $(\xi, \eta, \zeta)$  ale centrului forțelor paralele dirijate în același sens, obținem:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots} = \frac{\sum_n F_n x_n}{F}, \\ \eta &= \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots} = \frac{\sum_n F_n y_n}{F}, \\ \zeta &= \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \dots}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots} = \frac{\sum_n F_n z_n}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Cele trei formule (5.4) se pot înlocui prin una vectorială, formînd astfel expresia  $\bar{\rho} = \bar{i}\xi + \bar{j}\eta + \bar{k}\zeta$ ; ținînd seama de expresiile vectorilor  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots$  prin vectorii unitari, din formula (5.4), se va obține ușor:

$$\bar{\rho} = \frac{F_1 \bar{r}_1 + F_2 \bar{r}_2 + F_3 \bar{r}_3 + \dots}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots} = \frac{\sum_n F_n \bar{r}_n}{F}. \quad (5.5)$$

Formula (5.5) este echivalentă cu trei formule (5.4).



Din formulele (5.4) și (5.5) reiese că coordonatele centrului forțelor paralele, nu depind de modulele forțelor ci numai de

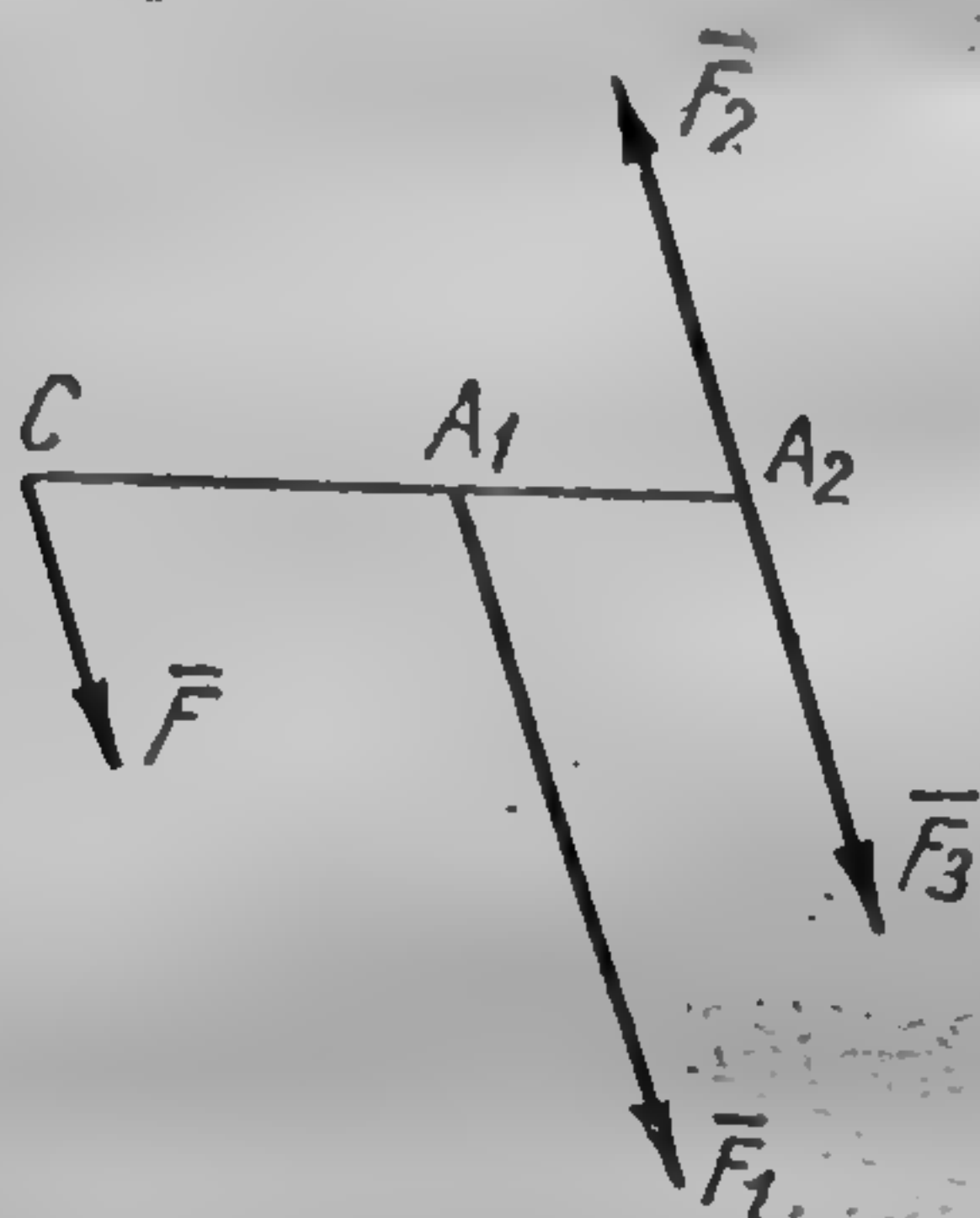


Fig. 45

raportul lor; în adevăr, însă, dacă vom multiplica toate forțele de același număr de ori, atunci de același număr de ori se vor schimba și numărătorii formulelor (5.4) și (5.5), și, de aceea fracțiile vor rămâne neschimbate ca valoare.

Ne putem folosi de această proprietate pentru a înlocui în formulele (5.4) și (5.5) forțele propriu-zise cu proiecțiile lor.

Notăm prin  $\alpha, \beta, \gamma$  unghiurile direcțiilor comune ale tuturor forțelor  $\bar{F}, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$  cu axele de coordonate. Proiecțiile acestor forțe pe axele de coordonate, vor fi:

$$X = F \cos \alpha, X_1 = F_1 \cos \alpha, X_2 = F_2 \cos \alpha, X_3 = F_3 \cos \alpha, \dots$$

$$Y = F \cos \beta, Y_1 = F_1 \cos \beta, Y_2 = F_2 \cos \beta, Y_3 = F_3 \cos \beta, \dots$$

$$Z = F \cos \gamma, Z_1 = F_1 \cos \gamma, Z_2 = F_2 \cos \gamma, Z_3 = F_3 \cos \gamma, \dots$$

Înmulțind numărătorul și numitorul primei părți, de exemplu, la prima din formulele (5.4) consecutiv cu  $\cos \alpha, \cos \beta$  și  $\cos \gamma$ , vom obține:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 + \dots}{X_1 + X_2 + X_3 + \dots} = \frac{\sum_n X_n x_n}{X}, \\ \eta &= \frac{Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + Y_3 x_3 + \dots}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots} = \frac{\sum_n Y_n x_n}{Y}, \\ \zeta &= \frac{Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + Z_3 x_3 + \dots}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots} = \frac{\sum_n Z_n x_n}{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Asemenea formule sînt valabile și pentru celelalte coordonate ale centrului forțelor paralele.

**§ 24. Cazul general al forțelor paralele.** Pentru a trece la cazul general al forțelor paralele care se aplică unui solid absolut rigid, cînd unele forțe pot fi dirijate într-un sens, iar celelalte în sens contrar, trebuie examinat mai întîi cazul a două forțe antiparalele.



Să presupunem că sînt date două forțe antiparalele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  cu punctele de aplicație  $A_1$  și  $A_2$  (fig. 45). Vom examina numai cazul cînd modulele  $F_1$  și  $F_2$  ale forțelor antiparalele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  nu sînt egale între ele; să presupunem că avem de exemplu  $F_1 > F_2$ . Descompunem forța  $\vec{F}_1$  în două forțe paralele și dirijate în același sens  $\vec{F}$  și  $\vec{F}_3$ , astfel încît să avem  $F_3 = F_2$ , iar forța  $\vec{F}_3$  să fie aplicată în punctul  $A_2$ ; atunci forțele  $\vec{F}_3$  și  $\vec{F}_2$  se vor echilibra. Această descompunere este posibilă numai într-un singur mod. În adevăr, din egalitatea  $F + F_3 = F_1$  găsim pentru modulul forței  $\vec{F}$  o singură valoare  $F = F_1 - F_3 = F_1 - F_2$ ; punctul  $C$  de aplicare a ei este unic, deoarece din formula (5.1) avem:

$$\frac{A_1 C}{A_1 A_2} = \frac{F_3}{F} = \frac{F_2}{F_1 - F_2},$$

adică

$$A_1 C = A_1 A_2 \frac{F_2}{F_1 - F_2}. \quad (5.7)$$

Din ultima formulă deducem:

$$C A_1 (F_1 - F_2) = A_1 A_2 \cdot F_2$$

sau

$$C A_1 \cdot F_1 = C A_1 \cdot F_2 + A_1 A_2 \cdot F_2.$$

De aici vom obține:

$$C A_1 \cdot F_1 = C A_2 \cdot F_2,$$

sau

$$\frac{C A_1}{C A_2} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (5.8)$$

Această formulă după aspectul exterior este identică cu formula (5.1), dar noi vedem că în cazul a două forțe paralele dirijate în același sens, punctul  $C$  împărțea segmentul  $A_1 A_2$  în raportul  $F_2 : F_1$  interior, pe cînd în cazul a două forțe antiparalele punctul  $C$  împarte segmentul  $A_1 A_2$  în raportul  $F_2 : F_1$  exterior. Astfel, obținem o singură forță  $\vec{F}$  aplicată în punctul  $C$  și ajungem la următoarea teoremă:

*Două forțe antiparalele și neegale au totdeauna rezultanta paralelă cu ele și îndreptată în sensul forței mai mari; modulul rezultantei este egal cu diferența modulelor forțelor componente, iar punctul de aplicație al rezultantei împarte distanța dintre punctele de aplicație ale forțelor componente exterior în părți invers proporționale cu forțele componente.*



Poziția punctului  $C$  este ușor de obținut printr-o simplă construcție geometrică. Pe suporturile  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  ale forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ ; măsurăm segmentele  $A_1B_1$  și  $A_2B_2$ , unde segmentul  $A_1B_1 = \vec{F}_2$  și dirijat după forța  $F_1$ , iar segmentul  $A_2B_2 = \vec{F}_1$  și dirijat în sens contrar forței  $\vec{F}_2$ . Unind printr-o dreaptă punctele  $B_1$  și  $B_2$  găsim punctul căutat  $C$ , ca punct de intersecție al dreptelor  $A_2A_1$  și  $B_2B_1$ . În adevăr, din asemănarea triunghiurilor  $A_1B_1C$  și  $A_2B_2C$  ajungem imediat la relația (5.8).

Este evident că în cazul forțelor antiparalele, punctele de aplicație  $CA_1$  și  $A_2$  ale forțelor pot fi interpretate ca centre de rotație în mod analog cu interpretarea făcută în § 23 pentru cazul forțelor paralele dirijate în același sens.

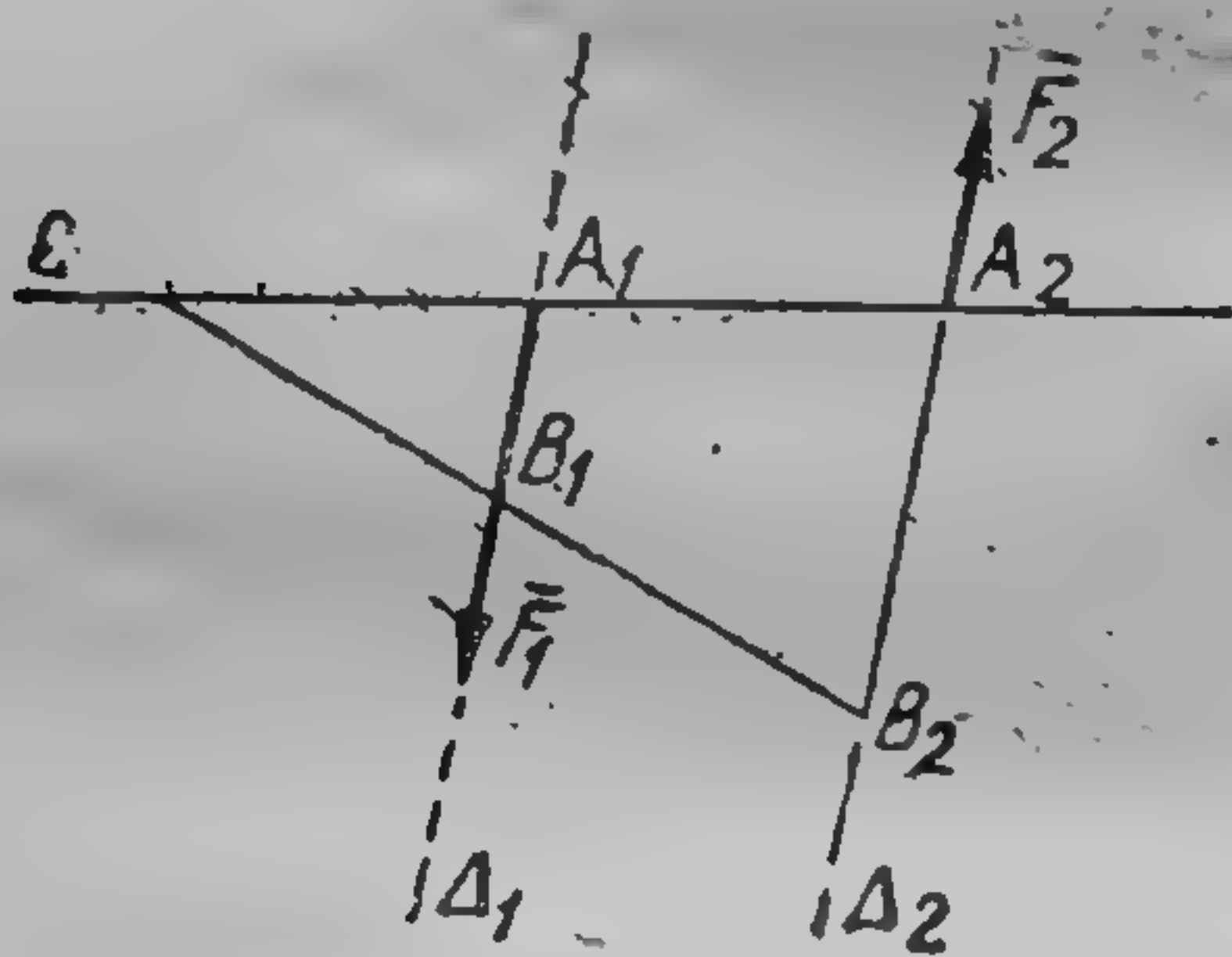


Fig. 46

Să presupunem acum că diferența  $F_1 - F_2$  tinde către zero. Atunci modulul rezultantei  $F = F_1 - F_2$  va tinde către zero, dar punctul ei de aplicație  $C$ , conform formulei (5.7) va tinde către infinit. Astfel, două forțe antiparalele și egale între ele, au

o rezultantă cu modul egal cu zero și care este aplicată într-un punct situat la infinit. Fără a introduce forțe situate la infinit și egale cu zero, trebuie să concludem că *două forțe antiparalele și egale nu au rezultantă*; acest sistem de două forțe se numește cuplu de forțe sau pur și simplu cuplu și reprezintă în același timp cu forța, un element mecanic primordial. Studiul cuplurilor face obiectul capitolului VIII al prezentului curs de mecanică.

Este evident că în cazul forțelor antiparalele, rezultanta  $\vec{F}$  a forțelor este egală cu suma geometrică a forțelor, adică avem  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

Avînd un sistem oarecare de forțe paralele și adunînd succesiv forțele fie cu ajutorul teoremei compunerii forțelor paralele de același sens fie cu teorema compunerii a două forțe antiparalele, vom obține în general rezultanta  $\vec{F}$  care va fi egală cu suma geometrică a forțelor componente.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_n \vec{F}_n. \quad (5.9)$$



Totuși, în acest caz general, deoarece nu toți vectorii  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  sînt de același sens, se poate întîmpla să avem  $\vec{F} = 0$ . Este necesar de observat că această egalitate nu este o condiție suficientă la echilibrului forțelor paralele, deoarece pentru cazul cuplului de forțe avem de asemenea  $\vec{F} = 0$ , însă, din cauza existenței cuplului care tinde să rotească corpul, nu se poate realiza echilibrul. Astfel, egalitatea  $\vec{F} = 0$  este o condiție necesară dar nu suficientă la echilibrului unui sistem general de forțe paralele.

Din formulele (5.9) cu același procedeu ca și din prima formulă (5.2), din care s-au dedus formulele (5.3), obținem:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots \sum_n X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \sum_n Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots \sum_n Z_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

*În acest fel, și pentru cazul general al forțelor paralele, proiecția rezultantei este egală cu suma proiecțiilor forțelor componente, dar în formulele (5.10) prin sumă se subînțeleg sumele algebrice, deoarece proiecțiile forțelor componente pot avea semne diferite, pe cînd în formulele (5.3) proiecțiile componentelor pe orice axă, au fost toate de același semn. Formulele (5.2) și (5.3) se pot extinde și asupra unui sistem arbitrar de forțe paralele, introducînd următoarea condiție: anume, vom înțelege prin mărimile  $F_1, F_2, F_3, \dots$  nu mărimi aritmetice ci algebrice, adică luate cu semnele plus și minus. Pentru aceasta, alegînd unul din cele două sensuri al forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  ca pozitiv și altul ca negativ, vom socoti pozitive valorile acelor forțe care sînt dirijate în sens pozitiv, și negative valorile acelor forțe care au un sens negativ. Atunci, pentru cazul general al forțelor paralele, va avea loc relația:*

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots = \sum_n F_n, \quad (5.11)$$

în care suma poate fi egală cu zero, deoarece elementele ei sînt mărimi algebrice. Introducînd această condiție la efectuarea proiecțiilor forțelor paralele pe axe de coordonate, prin unghiuri  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ale direcției forțelor cu axe de coordonate, putem



subînțelege unghiurile cu axele de coordonate ale acelei direcții care este considerată pozitivă; ca factori ai cosinuşilor acestor unghiuri, să nu luăm modulele

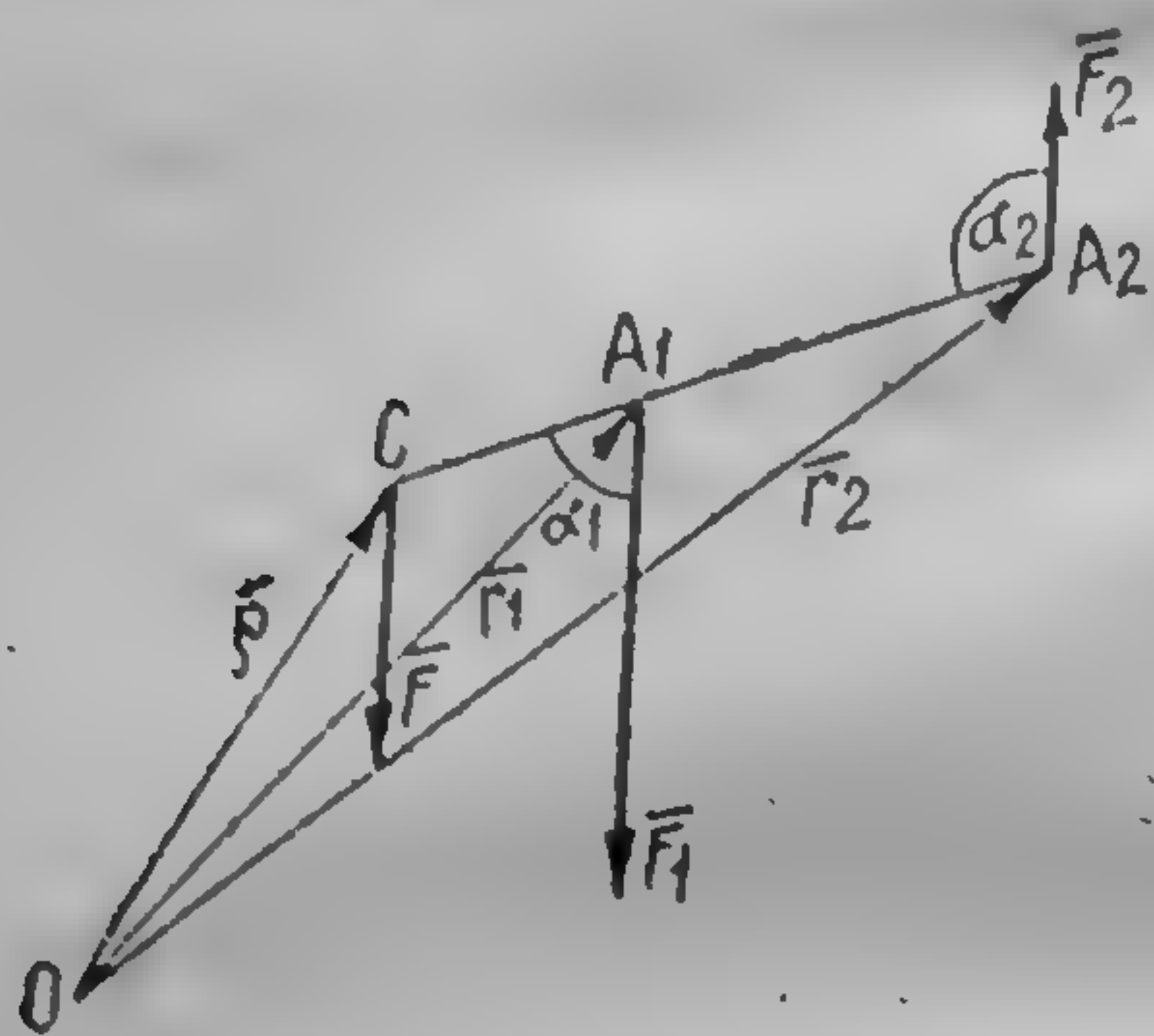


Fig. 47

$F_n$  ale forțelor, ci mărimile algebrice  $F_n$  ale căror semne se stabilesc prin condiția arătată mai sus.

Să demonstrăm că teorema lui Varignon este valabilă și în cazul general al unui sistem de forțe paralele. Să o demonstrăm mai întâi pentru două forțe antiparalele. Fie două forțe antiparalele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  cu rezultanta  $\vec{F}$  (fig. 47). Să luăm un punct

arbitrar în spațiu și să ducem vectorii  $\vec{OA}_1 = \vec{r}_1$ ,  $\vec{OA}_2 = \vec{r}_2$ ,  $\vec{OC} = \vec{p}$ . Să calculăm momentul resultant  $\vec{M}$  al forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , după formula:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$

Din fig. 47 se deduce că

$$\vec{p} + \vec{CA}_1 = \vec{r}_1, \quad \vec{p} + \vec{CA}_2 = \vec{r}_2;$$

de aceea obținem

$$\vec{M} = (\vec{p} + \vec{CA}_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{p} + \vec{CA}_2) \times \vec{F}_2 = \vec{p} \times \vec{F}_1 + \vec{p} \times \vec{F}_2 + \vec{CA}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{CA}_2 \times \vec{F}_2.$$

Ca și în § 23 se poate demonstra că suma ultimilor doi termeni este egală cu zero. În adevăr, ambii vectori  $\vec{CA}_1 \times \vec{F}_1$  și  $\vec{CA}_2 \times \vec{F}_2$  reprezentând momentele forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  în raport cu punctul C, au aceeași direcție, sînt de sens contrar, iar modulele acestor vectori sînt egale între ele, deoarece avem:

$$\begin{aligned} |\vec{CA}_1 \times \vec{F}_1| &= CA_1 \cdot F_1 \sin \alpha_1 = CA_1 \cdot F_1 \sin (\pi - \alpha_2) = \\ &= CA_1 \cdot F_1 \sin \alpha_2 \quad |\vec{CA}_2 \times \vec{F}_2| = CA_2 \cdot F_2 \sin \alpha_2, \end{aligned}$$

și după formula (5.8) trebuie să avem  $CA_1 \cdot F_1 = CA_2 \cdot F_2$ . Astfel rezultă

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{F}_1 + \vec{p} \times \vec{F}_2 = \vec{p} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{p} \times \vec{F}.$$



Prin același procedeu ca și pentru cazul forțelor paralele dirijate în același sens, această formulă se poate extinde asupra oricărui număr de forțe paralele între ele, astfel că în general, vom avea:

$$\bar{M} = \sum_n \bar{r}_n \times \bar{F}_n = \bar{\rho} \times \bar{F}. \quad (5.12)$$

Astfel, am ajuns la teorema lui Varignon pentru orice sistem de forțe paralele, a căror rezultantă nu este egală cu zero.

În cazul indicat, momentul rezultantei este egal cu momentul rezultat al sistemului dat de forțe.

Pentru proiecțiile ( $M_x, M_y, M_z$ ) ale momentului rezultat  $\bar{M}$ , vom obține formulele (5.13):

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum_n M_{nx} = \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) = \eta Z - \zeta Y, \\ M_y &= \sum_n M_{ny} = \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) = \zeta X - \xi Z, \\ M_z &= \sum_n M_{nz} = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) = \xi Y - \eta X. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Dacă rezultanta  $\bar{F}$  a sistemului general de forțe paralele va fi egală cu zero, din formula (5.12) sau (5.13), nu se poate încă trage concluzia că trebuie să avem  $\bar{M} = 0$ , întrucât vom vedea că în acest caz  $\rho = \infty$  și teorema lui Varignon duce la nedeterminare. Pentru a evita aceste nedeterminări, este mai simplu în acest caz, pentru calculul momentului rezultat  $\bar{M}$ , să nu ne servim de teorema lui Varignon ci să calculăm momentul rezultat direct din formula:

$$M = \sum_n \bar{M}_n = \sum_n \bar{r}_n \times \bar{F}_n.$$

Bazându-ne pe teorema lui Varignon, am dedus expresia (5.4) pentru coordonatele centrului forțelor paralele dirijate în același sens. Este evident că același procedeu se poate folosi și la studiul cazului general al forțelor paralele. Totuși, când vom roti forțele în jurul punctului lor de aplicație, ca ele să devină, de exemplu, paralele cu axa  $Oz$ , în cazul general unele din forțe vor fi dirijate în sensul axei  $Oz$ , iar celelalte în sens opus, și proiecțiile forțelor pe axa  $Oz$  vor fi egale cu modulele forțelor luate cu semnele lor, adică mărimi algebrice. Evident că pentru păstrarea formei formulelor (5.4) și (5.5) și în cazul general este suficient de a înțelege prin  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , mărimi algebrice



la fel cum s-a procedat la deducerea formulei (5.11). Vedem, că, dacă avem:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots = 0,$$

atunci, din formulele (5.4) obținem  $\xi = \eta = \zeta = \infty$ , iar din formulele (5.5), că  $\rho = \infty$ ; am obținut deja aceasta în cazul particular al cuplurilor de forțe. Dar, dacă în același timp

$$F = \sum_n F_n = 0, \quad \sum_n F_n x_n = 0, \quad \sum_n F_n y_n = 0, \quad \sum_n F_n z_n = 0, \quad (5.14)$$

atunci expresiile coordonatelor  $\xi, \eta, \zeta$  capătă o formă nedeterminată; în acest caz se spune că are loc *echilibru indiferent*. Aceasta înseamnă că sistemul forțelor paralele rămâne în echilibru, oricum am roti forțele în jurul punctelor lor de aplicație, păstrând condiția de paralelism a forțelor și neschimbând valorile lor algebrice.

§ 25. Variația momentului rezultat al forțelor paralele. Momentul cuplului. Fie un sistem arbitrar de forțe paralele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ . Momentul rezultat  $\vec{M}$  al acestui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare  $O$  din spațiu, după definiție (v. § 18), este:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \sum_n \vec{M}_n = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \dots = \\ &= \sum_n \vec{r}_n \times \vec{F}_n. \end{aligned}$$

Să calculăm momentul rezultat  $\vec{M}'$  în raport cu un alt punct oarecare din spațiu  $O'$  (fig. 48). Să ducem vectorii  $\vec{O'A}_1 = \vec{r}'_1, \vec{O'A}_2 = \vec{r}'_2, \vec{O'A}_3 = \vec{r}'_3, \dots$  și vectorul  $\vec{OO'} = \vec{d}$ . Avem:

$$\vec{M}' = \vec{M}'_1 + \vec{M}'_2 + \vec{M}'_3 + \dots = \sum_n \vec{M}'_n.$$

Aplicînd la partea dreaptă a acestei formule relația (2.22) vom obține:

$$\vec{M}' = \vec{M}_1 - \vec{d} \times \vec{F}_1 + \vec{M}_2 - \vec{d} \times \vec{F}_2 + \vec{M}_3 - \vec{d} \times \vec{F}_3 + \dots,$$

sau

$$\vec{M}' = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots - \vec{d} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots).$$

De aici ajungem la formula:

$$\vec{M}' = \vec{M} - \vec{d} \times \vec{F}. \quad (5.15)$$



Să presupunem acum că rezultanta sistemului de forțe paralele este egală cu zero, adică  $F=0$ , atunci formula (5.15) devine:

$$\bar{M}' = \bar{M}; \quad (5.16)$$

astfel obținem următoarea teoremă:

*Momentul rezultat al sistemului de forțe paralele, a căror rezultantă este egală cu zero, este constant în raport cu oricare punct din spațiu.*

Vedem că în acest caz momentul rezultat al unui sistem de forțe paralele, este un vector *liber*.

Cazul cel mai simplu al unui asemenea sistem este cazul unui cuplu de forțe. De aici deducem teorema:

*Momentul rezultat al unui cuplu de forțe este constant în raport cu oricare punct din spațiu.*

Momentul rezultat al unui cuplu de forțe se numește mai pe scurt *momentul cuplului*; prin urmare *momentul cuplului nu depinde de punctul din spațiu în raport cu care îl determinăm*.

Astfel, momentul unei forțe în raport cu un punct reprezintă un exemplu de vector legat, forța — un exemplu de vector alunecător, iar momentul cuplului — un exemplu de vector liber.

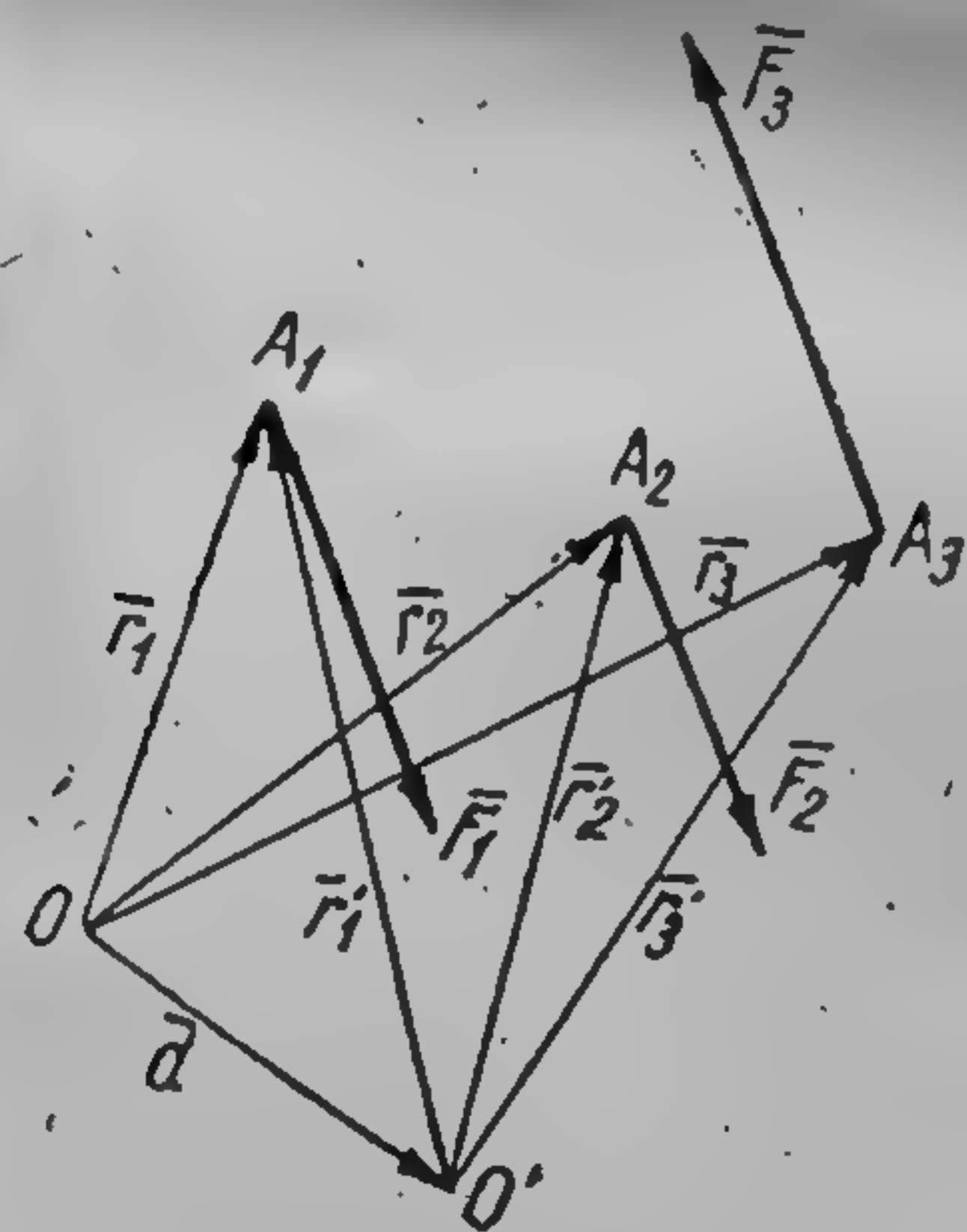


Fig. 48

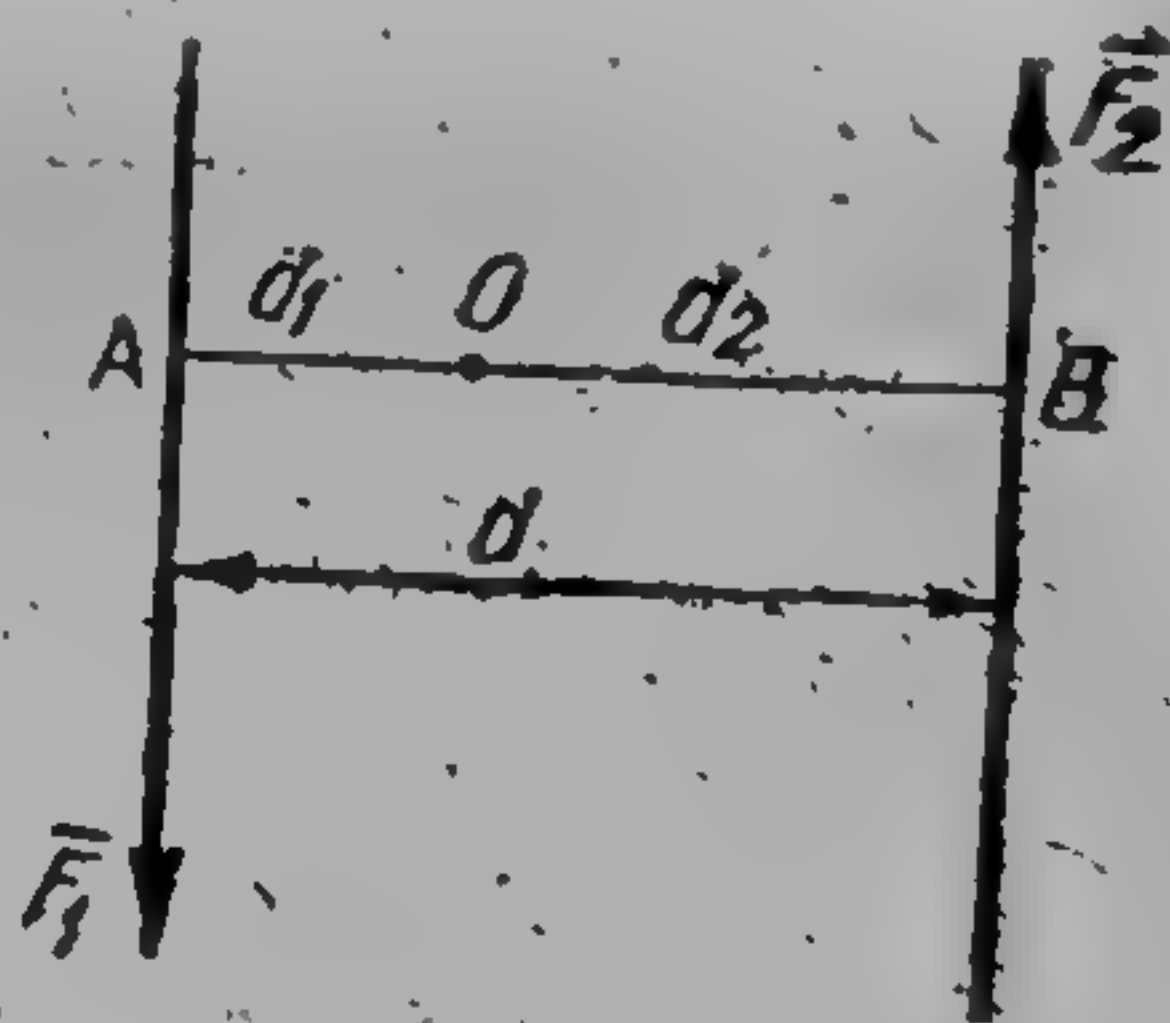


Fig. 49

Să calculăm momentul  $\bar{M}$  al cuplului. Să presupunem că ni se dă cuplul compus din forțele  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  care au modulul comun  $F$ ; să luăm planul cuplului drept plan al desenului și vom determina momentul  $\bar{M}$  în raport cu un punct oarecare  $O$  din planul cuplului (fig. 49). Coborâm perpendicularele  $OA$  și  $OB$ , respectiv pe



forțele  $F_1$  și  $F_2$  și fie  $OA=d_1$  și  $OB=d_2$ . Deoarece momentele  $\bar{M}_1$  și  $\bar{M}_2$  ale forțelor  $F_1$  și  $F_2$  sînt ambele dirijate perpendicular în sus pe planul desenului, tot astfel va fi dirijat momentul  $\bar{M}$  al cuplului, egal cu:

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2,$$

sau

$$M = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2),$$

adică

$$M = Fd. \quad (5.17)$$

Distanța dintre suporturile forțelor  $F_1$  și  $F_2$  se numește *brațul cuplului*. Astfel, obținem următoarea teoremă:

*Momentul cuplului este egal ca mărime cu produsul modului forței prin brațul cuplului, are direcția normală pe planul cuplului și sensul astfel încît un observator așezat pe planul cuplului între forțe în lungul vectorului moment să vadă forțele cuplului dirijate de la dreapta spre stînga.*

Este util să se memoreze reprezentarea cuplului și a momentului său, arătate în fig. 50. Deoarece momentul cuplului în raport cu toate punctele spațiului este unul și același, pentru a obține momentul cuplului pentru un punct oarecare  $O'$  din spațiu, este suficient a muta vectorul  $\bar{M}$  din punctul  $O$ , paralel cu el însuși în punctul  $O'$ .

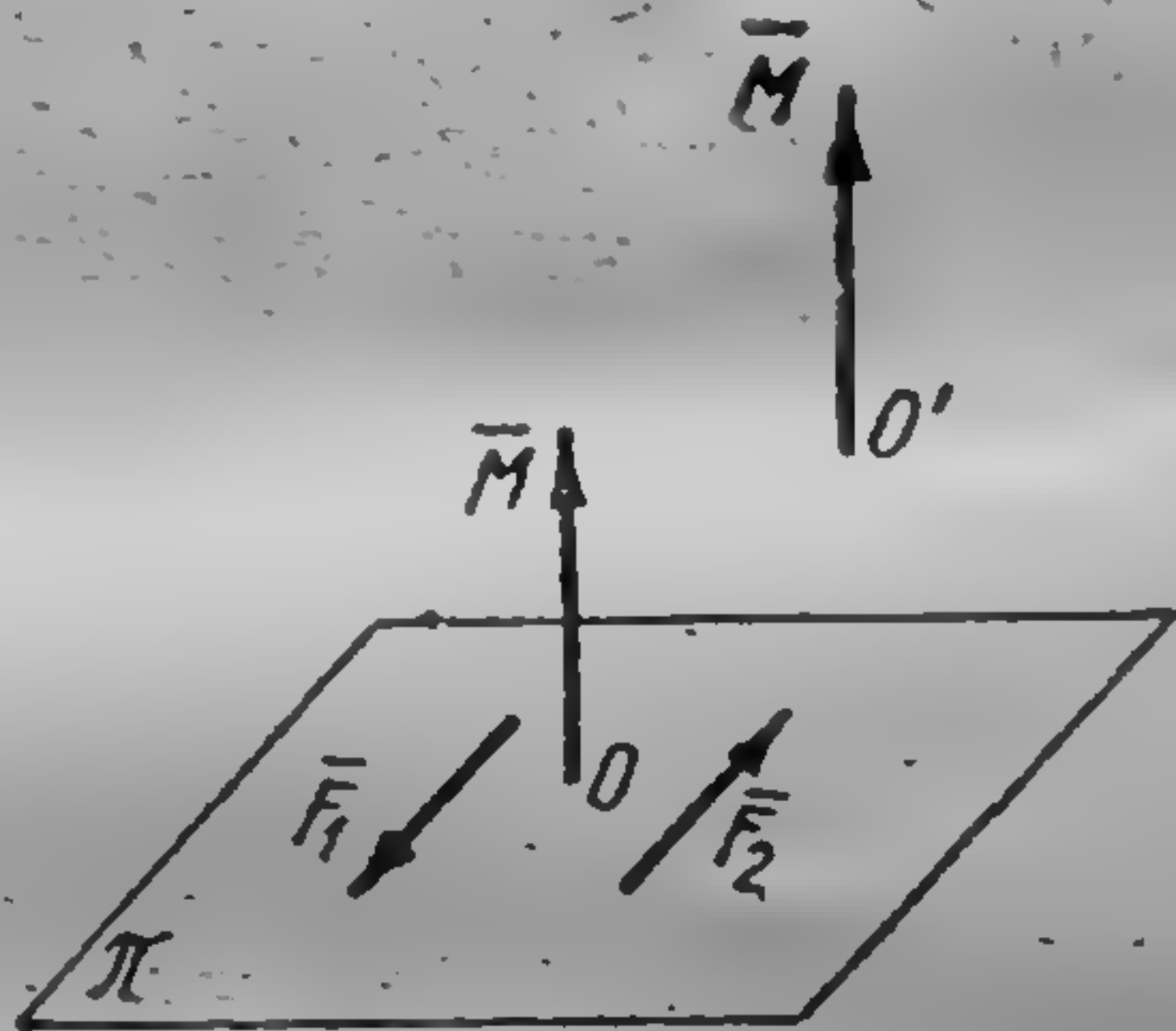


Fig. 50.

Să notăm că este mai simplu să se calculeze momentul cuplului pentru un punct situat pe suportul uneia din forțele componente ale cuplului. În adevăr, să determinăm momentul cuplului, de exemplu, pentru punctul  $A$  situat pe suportul forței  $F_1$  (fig. 49). Atunci momentul forței  $F_1$  în raport cu punctul  $A$  va fi egal cu zero și aflarea momentului cuplului se reduce la aflarea momentului forței  $F_2$  în raport cu punctul  $A$ , adică se ajunge direct la formula (5.17).

§ 26. Exemple. 14. Doi oameni duc cu brațele de capetele  $A_1$  și  $A_2$  o bară dreaptă a cărei greutate se poate neglija; în punctul  $C$  este atârnată de bară o încărcătură cu greutatea  $P=35$  kg. Se dă  $A_1A_2=1$  m și



$A_1C=40$  cm. Să determinăm presiunea barei pe mâinile oamenilor care o poartă. Să notăm prin  $P_1$  presiunea la capătul  $A_1$  și prin  $P_2$  presiunea la capătul  $A_2$ . Deoarece  $A_2C=60$  cm, vom avea:

$$P_1 + P_2 = 35, \quad P_1 : P_2 = 60 : 40 = 3 : 2.$$

De aici găsim că  $P_1=21$  kg și  $P_2=14$  kg.

15. Cum putem măsura precis greutatea pe o balanță cu brațe inegale? Să presupunem că brațele pîrghiei balanței sînt  $l_1$  și  $l_2$ . Să notăm prin  $P$  greutatea exactă a încărcăturii. Să punem inițial încărcătura  $P$  pe talerul stîng al balanței corespunzător brațului  $l_1$  și să echilibrăm balanța punînd pe talerul drept greutatea echivalentă cu greutatea  $P_1$ ; vom avea conform formulei (5.1):

$$Pl_1 = P_1l_2.$$

Să mutăm apoi încărcătura  $P$  pe talerul drept al balanței corespunzător brațului  $l_2$  și să echilibrăm balanța punînd pe talerul stîng greutatea echivalentă cu  $P_2$ ; din cauza inegalității brațelor balanței vom avea:

$$P_2 \neq P_1$$

Vom obține:

$$Pl_2 = P_2l_1.$$

Înmulțind între ei termenii egalităților obținute, vom găsi:

$$P^2l_1l_2 = P_1P_2l_1l_2,$$

sau

$$P = \sqrt{P_1P_2}.$$

Astfel, greutatea reală este egală cu media geometrică a greutăților indicate. Dacă  $P_1$  se apropie de  $P_2$ , atunci, în loc de media geometrică  $\sqrt{P_1P_2}$  se poate lua media aritmetică  $\frac{P_1+P_2}{2}$ , care cu toate că este cu ceva mai mare decît  $P$ , totuși se apropie de valoarea sa reală.

16. Cîntarul decimal. În expunerea modului de funcționare a cîntarului decimal, vom neglija greutatea proprie a cîntarului. Pîrghia dreaptă  $ACBD$  de ordinul întii are punctul de sprijin fixat în punctul  $C$ , astfel încît  $AC=10 BC$ . Platforma  $HGF$  are punctul de sprijin fixat în punctul  $H$ ; în punctul  $F$  această platformă este legată prin bara  $FD$  de pîrghia  $ACBD$  astfel încît în punctele  $D$  și  $F$  bara  $FD$  să se sprijine pe pîrghia  $ACBD$  și pe platforma  $HGF$  cu muchiile cuțitelor fixate de ea. A doua platformă  $EG'\pi$  se sprijină prin muchia cuțitului  $G$  pe platforma  $HGF$ . Această a doua platformă  $EG'\pi$  este legată de pîrghia  $ACBD$  prin bara  $BE$ , astfel încît, în punctele  $B$  și  $E$  bara  $BE$  să se sprijine pe pîrghia  $ACBD$  și platforma  $EG'\pi$  prin muchiile cuțitelor fixate de ea (fig. 51). Pe platforma  $EG'\pi$  se așază într-un loc oarecare încărcătura de cîntărit  $Q$ . După regula compunerii forțelor paralele îndreptate în același sens, forța  $\bar{Q}$  se poate descompune în două forțe  $\bar{Q}_1$  și  $\bar{Q}_2$  aplicate respectiv în punctele  $E$  și  $G$ ;



prin intermediul cuțitului  $G$  asupra platformei  $HGF$  acționează forța  $Q_2$ . Pentru ca platforma  $HGF$  să fie în echilibru, forța  $Q_2$  aplicată în punctul  $G$

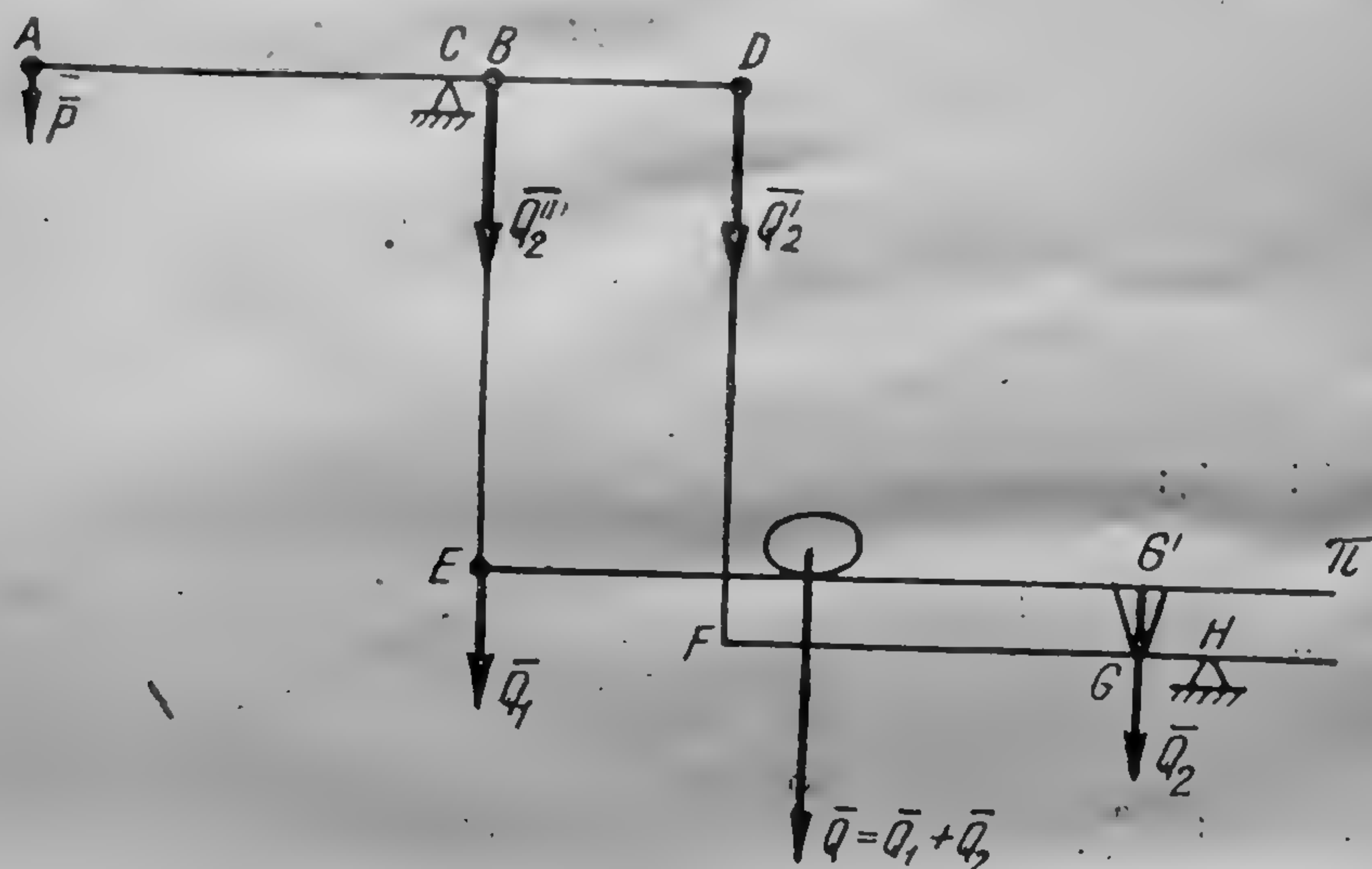


Fig. 51

trebuie să fie echilibrată prin forța de întindere  $\bar{Q}_2'$  dezvoltată de bara  $FG$  în punctul  $F$ . Pentru aceasta, conform regulii compunerii forțelor antiparalele, trebuie să avem:

$$Q_2' : Q_2 = GH : FH,$$

sau

$$Q_2' = Q_2 \frac{GH}{FH}.$$

Este evident că bara  $FD$  trebuie să tragă pîrghia  $ACBD$  cu forța  $\bar{Q}_2'$  în punctul  $D$ . Această forță  $Q_2'$  aplicată în punctul  $D$  se poate înlocui printr-o forță oarecare  $Q_2''$  aplicată în punctul  $B$ ; pentru a găsi valoarea acestei forțe  $Q_2''$  vom nota că forța  $-Q_2''$  dirijată în sus, trebuie să echilibreze forța  $\bar{Q}_2'$  dirijată în jos, adică trebuie să avem:

$$Q_2'' : Q_2' = DC : BC,$$

sau

$$Q_2'' = Q_2' \frac{DC}{BC}.$$

Introducînd în această egalitate valoarea  $Q_2'$  din relația precedentă, vom avea:

$$Q_2'' = Q_2 \frac{GH}{FH} \cdot \frac{DC}{BC}.$$



Astfel, forțele care acționează pe brațul  $CBD$  al pârghiei  $ABCD$  se reduc la forța aplicată în punctul  $B$  și egală ca valoare cu

$$Q_1 + Q_2 = Q_1 + Q_2 \frac{GH}{FH} \cdot \frac{DC}{BC}$$

Dacă

$$\frac{GH}{FH} \cdot \frac{DC}{BC} = 1,$$

adică

$$\frac{GH}{FH} = \frac{BC}{DC},$$

atunci, în punctul  $B$  pe pârghie, va acționa forța cu mărimea egală cu  $Q_1 + Q_2 = Q$ , adică greutatea întregii încărcături care se cântărește. Deoarece brațul  $AC$  este de 10 ori mai mare decât brațul  $BC$ , această greutate  $Q$  este echilibrată în punctul  $A$  prin greutatea  $P = 0,1 Q$ , din care cauză cântarul a fost denumit decimal. Nu este greu de dovedit că micile deplasări ale platformei  $EG'\pi$  datorită încărcăturii  $Q$ , nu influențează rezultatul deoarece prin deplasări mici platforma  $EG'\pi$  rămâne paralelă cu ea însăși. În adevăr, să presupunem că sub acțiunea încărcăturii  $Q$ , brațul  $CBD$  se lasă în jos, rotindu-se în jurul punctului  $C$  cu un unghi foarte mic  $\alpha$ . Atunci punctul  $B$  și împreună cu el și punctul  $E$  se vor deplasa în jos cu un segment foarte mic  $CB \cdot \alpha$ . La fel, punctul  $D$  și împreună cu el și punctul  $F$  se vor deplasa în jos cu un segment foarte mic  $CD \cdot \alpha$ ; deoarece punctul  $H$  este fix, deplasarea punctului  $G$  și împreună cu el și a punctului  $G'$  provocată de deplasarea punctului  $F$ , va fi egală cu:

$$CD \cdot \alpha \frac{GH}{FH}.$$

Dar mai sus am avut relația:

$$\frac{GH}{FH} = \frac{BC}{DC}$$

de unde urmează că

$$CD \frac{GH}{FH} = CB.$$

Astfel, cele două puncte  $E$  și  $G'$  ale platformei  $EG'\pi$  se deplasează în jos cu același segment mic  $CB \cdot \alpha$ , adică platforma  $EG'\pi$  se deplasează paralel cu ea însăși.

17. Se dau patru forțe  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  și  $\vec{F}_4$  cu proiecțiile  $\vec{F}_1(2, 2, 3)$ ,  $\vec{F}_2(4, 4, 6)$ ,  $\vec{F}_3(-2, -2, -3)$ ,  $\vec{F}_4(6, 6, 9)$ , aplicate în punctele  $A_1, A_2, A_3$  și  $A_4$ , cu coordonatele:

$$A_1(0, 0, 1), A_2(1, 2, 1), A_3(2, 1, 1), A_4(5, 2, 7);$$

să se studieze acest sistem de forțe și să se reducă la cel mai simplu sistem. În primul rând din proporționalitatea proiecțiilor acestor forțe, pe axe respective, concludem că forțele sînt paralele între ele. Să considerăm



direcția forței  $\bar{F}_1$  ca pozitivă; atunci cantitățile  $F_1, F_2, F_4$ , vor fi pozitive, iar cantitatea  $F_3$  negativă. Vom avea:

$$F_1 = +\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = +\sqrt{17}, \quad F_2 = +\sqrt{4^2 + 4^2 + 6^2} = +2\sqrt{17},$$

$$F_3 = -\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = -\sqrt{17}, \quad F_4 = +\sqrt{6^2 + 6^2 + 9^2} = +3\sqrt{17}.$$

Direcția pozitivă adică direcția forței  $\bar{F}_1$  formează cu axe de coordonate unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$  ale căror cosinusuri sînt egale cu:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{17}};$$

$$\alpha = \beta = 60^\circ 58' 58'', \quad \gamma = 43^\circ 18' 50''.$$

Să găsim rezultanta  $\bar{F}(X, Y, Z)$  și coordonatele  $(\xi, \eta, \zeta)$  ale centrului acestor forțe paralele, vom avea:

$$F = +\sqrt{17} + 2\sqrt{17} - \sqrt{17} + 3\sqrt{17} = +5\sqrt{17} = 20,616;$$

$$X = 2 + 4 - 2 + 6 = 10,$$

$$Y = 2 + 4 - 2 + 6 = 10,$$

$$Z = 3 + 6 - 3 + 9 = 15.$$

Ca să determinăm coordonatele centrului acestor forțe paralele, vom apela la prima formulă (5.6) și la cele similare ei; din ele vom avea:

$$\xi = \frac{X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 + X_4x_4}{X},$$

$$\eta = \frac{Y_1y_1 + Y_2y_2 + Y_3y_3 + Y_4y_4}{Y},$$

$$\zeta = \frac{Z_1z_1 + Z_2z_2 + Z_3z_3 + Z_4z_4}{Z},$$

sau numeric:

$$\xi = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot 5}{10} = 3,$$

$$\eta = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{10} = \frac{9}{5},$$

$$\zeta = \frac{3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 9 \cdot 7}{15} = \frac{23}{5}.$$

În acest fel ecuația suportului  $\Delta$  al rezultantei  $\bar{F}$  va fi:

$$\frac{x-3}{\frac{2}{\sqrt{17}}} = \frac{y-\frac{9}{5}}{\frac{2}{\sqrt{17}}} = \frac{z-\frac{23}{5}}{\frac{3}{\sqrt{17}}}$$

sau

$$\frac{x-3}{2} = \frac{5y-9}{10} = \frac{5z-23}{15}.$$



Pentru calcularea momentului rezultat  $\bar{M} (M_x, M_y, M_z)$  este convenabil a folosi teorema lui Varignon, vom avea:

$$M_x = \eta Z - \zeta Y = \frac{9}{5} \cdot 15 - \frac{23}{5} \cdot 10 = 27 - 46 = -19,$$

$$M_y = \zeta X - \xi Z = \frac{23}{5} \cdot 10 - 3 \cdot 15 = 46 - 45 = +1,$$

$$M_z = \xi Y - \eta X = 3 \cdot 10 - \frac{9}{5} \cdot 10 = 30 - 18 = +12.$$

De aici găsim:

$$M = \sqrt{19^2 + 1^2 + 12^2} = \sqrt{506} = 22,494.$$

Unghiurile  $a, b, c$  formate de momentul  $M$  cu axele de coordonate, se determină cu ajutorul formulelor:

$$\cos a = -\frac{19}{\sqrt{506}}, \quad a = 147^\circ 38' 5'';$$

$$\cos b = +\frac{1}{\sqrt{506}}, \quad b = 87^\circ 27' 5'';$$

$$\cos c = +\frac{12}{\sqrt{506}}, \quad c = 57^\circ 45' 44''.$$

Dacă am vrea să calculăm momentul rezultat al sistemului în mod arbitrar, și nu pe baza teoremei lui Varignon, atunci ar trebui să calculăm momentele forțelor separate și am obține următoarea tabelă:

$M_{1x} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2$	$M_{1y} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = +2$
$M_{2x} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 4 = +8$	$M_{2y} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = -2$
$M_{3x} = 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-2) = -1$	$M_{3y} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) = +4$
$M_{4x} = 2 \cdot 9 - 7 \cdot 6 = -24$	$M_{4y} = 7 \cdot 6 - 5 \cdot 9 = -3$
$M_x = -19$	$M_y = +1$
$M_{1z} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 2 = 0$	
$M_{2z} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = -4$	
$M_{3z} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = -2$	
$M_{4z} = 5 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = +18$	
$M_z = +12$	

Vedem că am ajuns la rezultatele precedente, dar printr-un procedeu mai lung.



## CAPITOLUL VI

### CENTRE DE GREUTATE

§ 27. Definiții generale. Se știe că sub acțiunea forței de atracție universală numită și forța gravitației, fiecare particulă materială aflată pe suprafața pământului este atrasă de pământ, iar forța gravitației este dirijată cu aproximație către centrul pământului. Să examinăm două direcții ale forței gravitației care formează între ele un unghi de  $92'$  și care corespund cu direcțiile

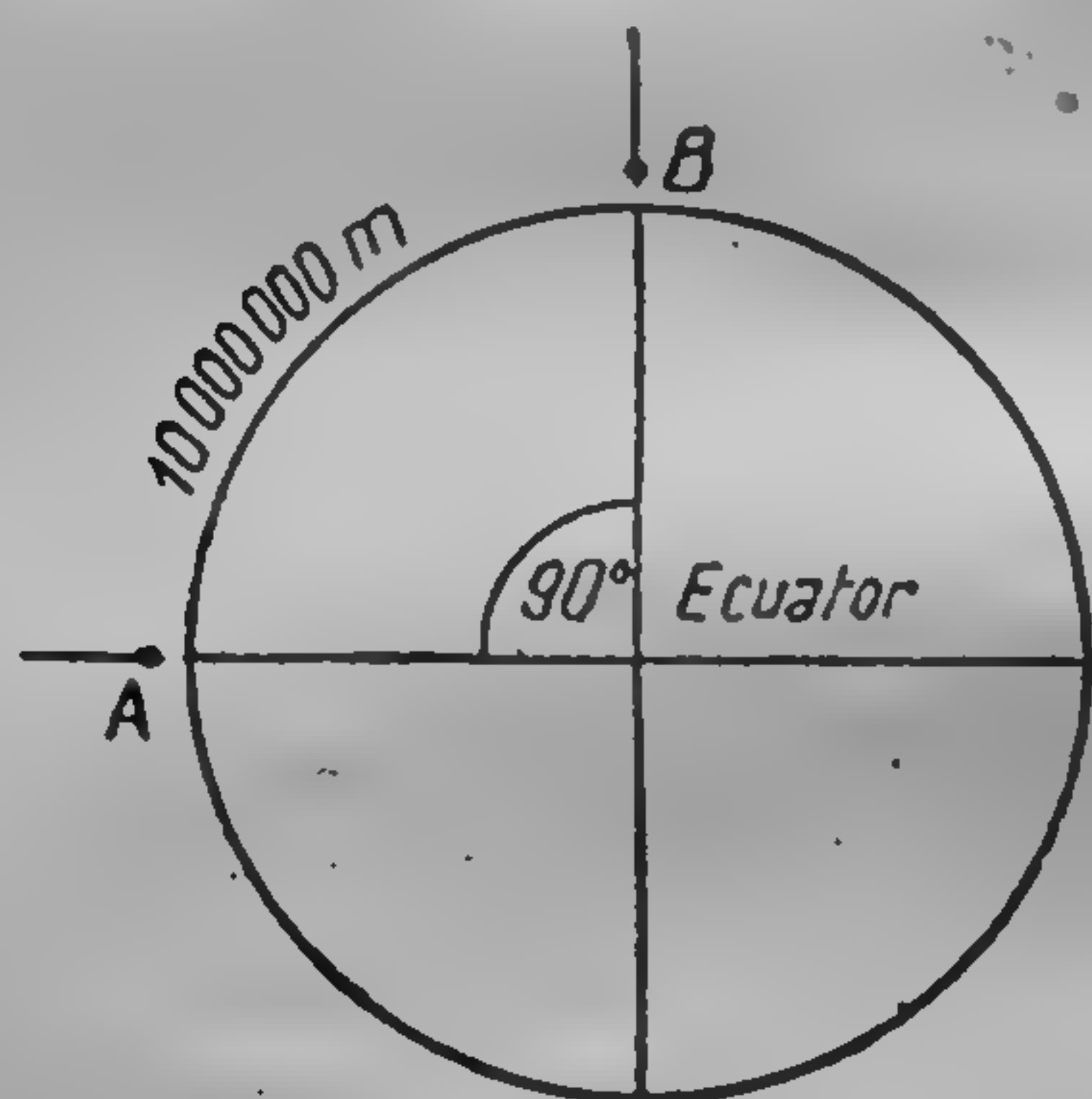


Fig. 52

forțelor de atracție, la pol și la ecuator (fig. 52). Pentru a trece din  $A$  în  $B$ , trebuie să ne deplasăm cu  $\frac{1}{4}$  din meridianul pământului, adică cu 10 000 000 m. Ca unghiul dintre două drepte să fie egal cu  $1''$ , trebuie să ne deplasăm cu

$$\frac{10\,000\,000}{90 \cdot 60 \cdot 60} = 30,9 \text{ m.}$$

De aici rezultă că forțele de atracție a particulelor separate ale corpurilor cu dimensiuni mici se pot considera paralele între ele.

Fie dat un corp material oarecare. Să cercetăm la acest corp material particulele infinit mici. Fiecare particulă este atrasă de pământ, iar, în conformitate cu cele afirmate anterior, forțele de atracție ale particulelor separate se pot considera paralele între ele. *Rezultanta forțelor paralele de atracție pămîntească a tuturor particulelor separate ale unui corp material, este greutatea acestui corp, iar centrul acestor forțe paralele este centrul de greutate al corpului material.*

Vom căuta centrele de greutate ale curbelor materiale, ale suprafețelor și ale solidelor, introducînd noi noțiuni convenționale: curba materială și suprafața materială.



Să examinăm un corp avînd forma unei bare (fig. 53) și înăuntrul lui o curbă oarecare  $AB$ . Să presupunem că toată cantitatea de materie a corpului cuprinsă între două secțiuni perpendiculare pe curba interioară  $AB$  rămîne neschimbată și se concentrează spre curba  $AB$ . În acest caz vom obține, la limită, curba materială  $AB$ . Fie  $\Delta s$  un element de lungime al curbei materiale și  $\Delta m$  masa acestui element de lungime, atunci raportul

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta s} \quad (6.1)$$

se numește *densitatea medie a curbei materiale în locul dat*. Trecînd la limită, vom obține *densitatea reală  $\rho$  a curbei materiale în punctul dat*:

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta m}{\Delta s} \right)$$

Tot astfel vom examina un corp avînd forma unei plăci și o suprafață oarecare  $\Sigma$  în interiorul lui (fig. 54). Să presupunem că toată cantitatea de materie a corpului cuprinsă într-o suprafață cilindrică oarecare cu generatoarele perpendiculare pe su-

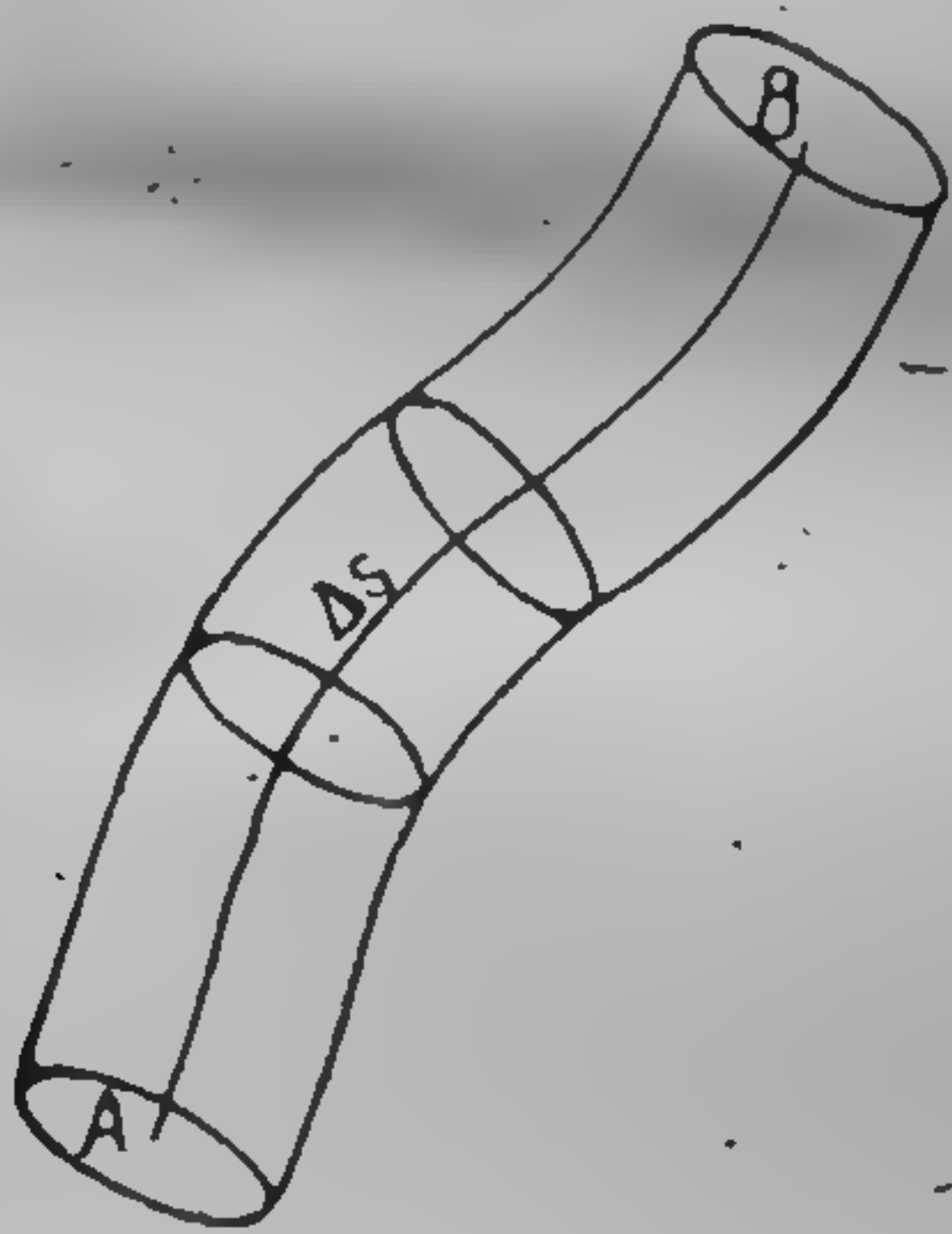


Fig. 53

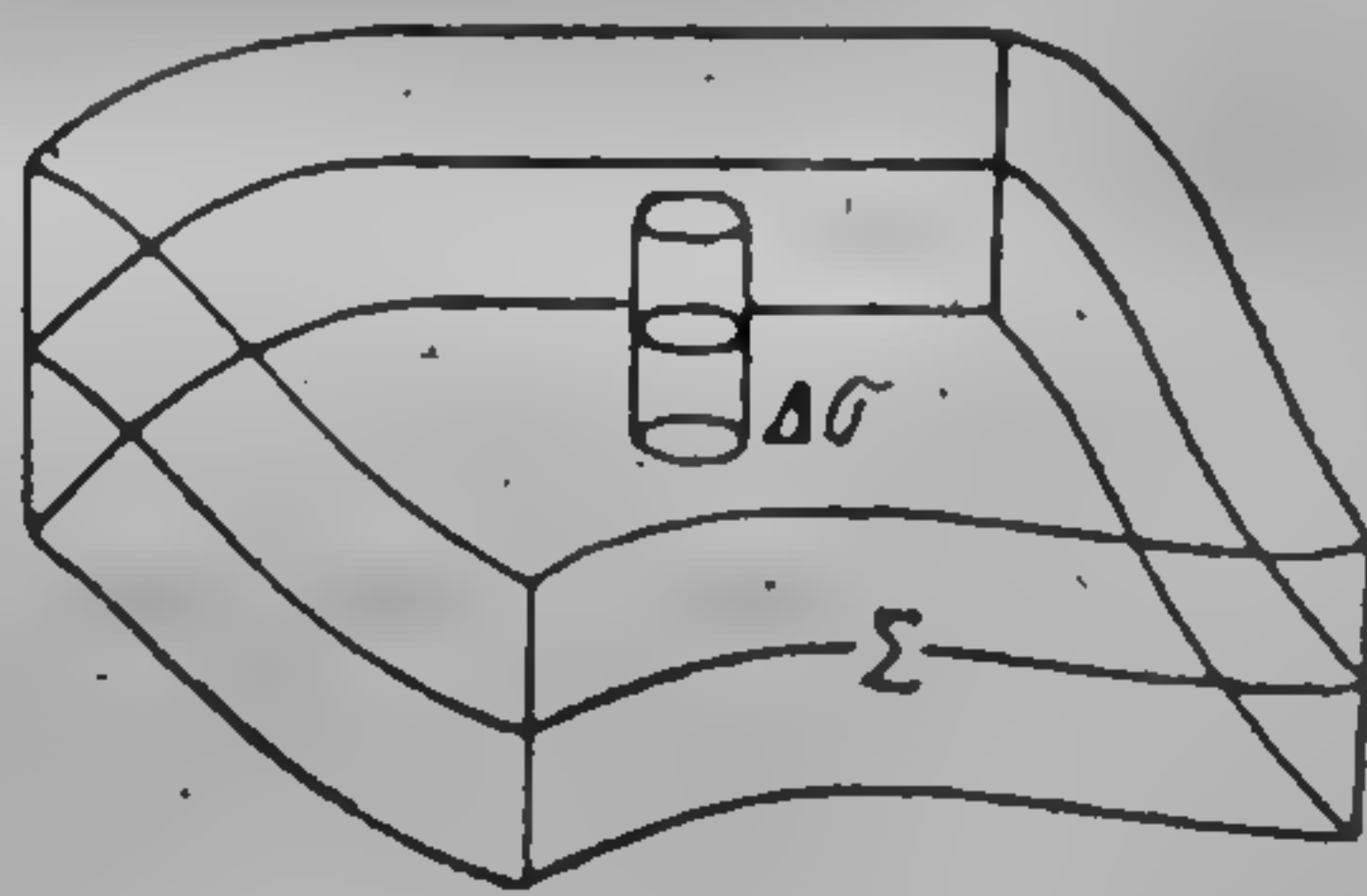


Fig. 54

rafața interioară cercetată  $\Sigma$  rămîne neschimbată și se concentrează către suprafața  $\Sigma$ , vom obține la limită suprafața materială  $\Sigma$ . Fie  $\Delta \sigma$  un element al suprafeței materiale  $\Sigma$  și  $\Delta m$  masa lui, atunci raportul

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta \sigma} \quad (6.2)$$

se numește *densitate medie a suprafeței materiale în locul dat*. Trecînd la limită vom obține *densitatea reală a suprafeței materiale în punctul dat*:

$$\rho = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta m}{\Delta \sigma} \right)$$



În sfârșit fie  $\Delta V$  elementul de volum al corpului și  $\Delta m$  — masa acestui element. Atunci raportul

$$\bar{\rho}_m = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (6.3)$$

se numește *densitate medie a corpului* în locul dat, iar limita acestui raport

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta m}{\Delta V} \right)$$

se numește *densitate reală a corpului* în punctul dat.

Folosind notațiile din calculul diferențial, vom obține pentru densitatea reală a curbelor, suprafețelor și a solidelor respectiv expresiile

$$\rho = \frac{dm}{ds}, \quad \rho = \frac{dm}{d\sigma}, \quad \rho = \frac{dm}{dV}; \quad (6.4)$$

deci masa  $dm$  a unui element de curbă, de suprafață sau de volum va fi respectiv:

$$dm = \rho ds, \quad dm = \rho d\sigma, \quad dm = \rho dV. \quad (6.5)$$

Densitatea reală  $\rho$  poate varia în diferite puncte; de aceea  $\rho$ , în general, este funcție de coordonatele  $(x, y, z)$  punctului în care se determină densitatea

$$\rho = f(x, y, z). \quad (6.6)$$

Dacă în toate punctele densitatea reală este aceeași, atunci corpul material se numește *omogen*.

**Observație.** Este evident că noțiunile de suprafață materială sau curbă materială se pot utiliza în practică în toate cazurile când se poate neglija respectiv fie grosimea corpului material, fie grosimea și lățimea în raport cu lungimea lui. Astfel este de exemplu cazul unei foi mari de tablă subțire sau al unei bucăți de sîrmă subțire și lungă.

**§ 28. Centrul de greutate și centrul maselor.** Să trecem acum la definiția centrului de greutate al unui corp material oarecare. Să împărțim corpul dat în elemente infinit mici. No-



tăm prin  $m_n$  masa unui element oarecare; atunci greutatea lui  $F_n$  va fi:

$$F_n = m_n g,$$

unde  $g$  este modulul accelerației gravitației. Dacă  $\bar{p}$  este vectorul de poziție  $OC$  al centrului  $C$  al forțelor paralele  $F_n$ , determinat în ipoteza că forțele considerate acționează asupra solidului, atunci după formula (5.5), vom obține:

$$\bar{p} = \frac{m_1 g \bar{r}_1 + m_2 g \bar{r}_2 + m_3 g \bar{r}_3 + \dots}{m_1 g + m_2 g + m_3 g + \dots} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_n m_n \bar{r}_n}{M} \quad (6.7)$$

unde  $M = \sum_n m_n$  este masa corpului material. Vedem din formula (6.7), că centrul  $C$ , determinat prin vectorul  $\bar{p}$ , există și în cazul când corpul material se găsește în afara acțiunii forței gravitației, deoarece accelerația  $g$  de care depinde greutatea, nu intervine în expresia vectorului de poziție. Astfel, poziția centrului  $C$  depinde numai de distribuția masei în corpul material, ceea ce ne permite să definim punctul  $C$  în modul următor:

*Centrul maselor unui sistem de particule materiale este punctul avînd vectorul de poziție  $\bar{p}$  definit prin formula:*

$$\bar{p} = \frac{\sum_n m_n \bar{r}_n}{M},$$

unde  $m_n$  reprezintă masele particulelor elementare ale sistemului,  $\bar{r}_n$  vectorii lor de poziție și  $M$  — masa întregului sistem.

Este evident că la fiecare sistem material, deformabil sau nedormabil, în orice moment există un centru al maselor, indiferent dacă sistemul este greu sau nu. În cazul particular al unui sistem perfect rigid, greu, centrul de greutate al sistemului coincide cu centrul maselor precum s-a văzut la deducerea formulei (6.7).

Ca să trecem de la formulele vectoriale la cele analitice vom pune:

$$\bar{p} = \bar{i}\xi + \bar{j}\eta + \bar{k}\zeta,$$

$$\bar{r}_1 = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1,$$

$$\bar{r}_2 = \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{k}z_2,$$

$$\bar{r}_3 = \bar{i}x_3 + \bar{j}y_3 + \bar{k}z_3,$$

$$\dots\dots\dots$$



Introducând aceste expresii și egalând între ei coeficienții vectorilor unitari cu același nume din partea stângă și dreaptă a formulei (6.7) vom obține următoarele formule:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_n m_n x_n}{M}, \\ \eta &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_n m_n y_n}{M}, \\ \zeta &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_n m_n z_n}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Aplicăm separat formulele (6.8) în cazul curbelor materiale suprafețelor materiale și corpurilor tridimensionale.

*Curba materială.* Fie dată o curbă materială oarecare a cărei lungime este egală cu  $l$ . Împărțim această curbă în elementele de lungime  $\Delta s$  cu masele  $\Delta m = \rho_m \Delta s$ . Aplicând formulele (6.8) și trecînd la limită, avem

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\lim \sum x \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum x \rho_m \Delta s}{\lim \sum \rho_m \Delta s}, \\ \eta &= \frac{\lim \sum y \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum y \rho_m \Delta s}{\lim \sum \rho_m \Delta s}, \\ \zeta &= \frac{\lim \sum z \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum z \rho_m \Delta s}{\lim \sum \rho_m \Delta s}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Pentru a simplifica scrierea formulelor indicele  $n$  a fost suprimat. Aceste formule se simplifică dacă curba este omogenă, adică dacă densitatea ei  $\rho$  este constantă. În acest caz avem:  $\rho_m = \rho$ ,  $M = \rho l$  și

$$\xi = \frac{\lim \sum x \Delta s}{l}, \quad \eta = \frac{\lim \sum y \Delta s}{l}, \quad \zeta = \frac{\lim \sum z \Delta s}{l}. \quad (6.10)$$

Vedem că în cazul curbelor omogene, poziția centrului masei depinde exclusiv de forma geometrică a curbei.

*Suprafața materială.* Fie dată o suprafață materială oarecare a cărei arie este egală cu  $\sigma$ . Împărțim această suprafață în elementele avînd ariile  $\Delta \sigma$  și masele  $\Delta m = \rho_m \Delta \sigma$ .



Introducind aceste expresii și egalând între ei coeficienții vectorilor unitari cu același nume din partea stângă și dreaptă a formulei (6.7) vom obține următoarele formule:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_n m_n x_n}{M}, \\ \eta &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_n m_n y_n}{M}, \\ \zeta &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_n m_n z_n}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Aplicăm separat formulele (6.8) în cazul curbelor materiale suprafețelor materiale și corpurilor tridimensionale.

*Curba materială.* Fie dată o curbă materială oarecare a cărei lungime este egală cu  $l$ . Împărțim această curbă în elementele de lungime  $\Delta s$  cu masele  $\Delta m = \rho_m \Delta s$ . Aplicând formulele (6.8) și trecînd la limită, avem

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\lim \sum x \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum x \rho_m \Delta s}{\lim \sum \rho_m \Delta s}, \\ \eta &= \frac{\lim \sum y \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum y \rho_m \Delta s}{\lim \sum \rho_m \Delta s}, \\ \zeta &= \frac{\lim \sum z \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum z \rho_m \Delta s}{\lim \sum \rho_m \Delta s}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Pentru a simplifica scrierea formulelor indicele  $n$  a fost suprimat. Aceste formule se simplifică dacă curbă este omogenă, adică dacă densitatea ei  $\rho$  este constantă. În acest caz avem:  $\rho_m = \rho$ ,  $M = \rho l$  și

$$\xi = \frac{\lim \sum x \Delta s}{l}, \quad \eta = \frac{\lim \sum y \Delta s}{l}, \quad \zeta = \frac{\lim \sum z \Delta s}{l}. \quad (6.10)$$

Vedem că în cazul curbelor omogene, poziția centrului maselor depinde exclusiv de forma geometrică a curbei.

*Suprafața materială.* Fie dată o suprafață materială oarecare a cărei arie este egală cu  $\sigma$ . Împărțim această suprafață în elementele avînd ariile  $\Delta \sigma$  și masele  $\Delta m = \rho_m \Delta \sigma$ .



Aplicînd formulele (6.9) și trecînd la limită, obținem:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\lim \sum x \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum x \rho_m \Delta \sigma}{\lim \sum \rho_m \Delta \sigma}, \\ \eta &= \frac{\lim \sum y \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum y \rho_m \Delta \sigma}{\lim \sum \rho_m \Delta \sigma}, \\ \zeta &= \frac{\lim \sum z \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum z \rho_m \Delta \sigma}{\lim \sum \rho_m \Delta \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Pentru simplificarea notațiilor indicele  $n$  a fost suprimat.

Aceste formule se simplifică dacă suprafața este omogenă, adică, dacă densitatea ei  $\rho$  este constantă. În acest caz vom avea  $\rho_m = \rho$ ,  $M = \rho \sigma$  și formulele precedente capătă aspectul:

$$\xi = \frac{\lim \sum x \Delta \sigma}{\sigma}, \quad \eta = \frac{\lim \sum y \Delta \sigma}{\sigma}, \quad \zeta = \frac{\lim \sum z \Delta \sigma}{\sigma}. \quad (6.12)$$

Vedem că în cazul suprafețelor omogene, poziția centrului maselor depinde exclusiv de forma geometrică a suprafeței.

*Corpul material.* Fie dat un corp oarecare al cărui volum este egal cu  $V$ . Divizăm acest corp în volume elementare  $\Delta V$  cu masele  $\Delta m = \rho_m \Delta V$ . Aplicînd formulele (6.8) și trecînd la limită, avem:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\lim \sum x \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum x \rho_m \Delta V}{\lim \sum \rho_m \Delta V}, \\ \eta &= \frac{\lim \sum y \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum y \rho_m \Delta V}{\lim \sum \rho_m \Delta V}, \\ \zeta &= \frac{\lim \sum z \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum z \rho_m \Delta V}{\lim \sum \rho_m \Delta V}. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Pentru simplificarea notațiilor indicele  $n$  a fost suprimat. Aceste formule se simplifică dacă corpul este omogen, adică dacă densitatea lui este constantă. În acest caz vom avea:  $\rho_m = \rho$ ,  $M = \rho V$  și formulele precedente iau forma:

$$\xi = \frac{\lim \sum x \Delta V}{V}, \quad \eta = \frac{\lim \sum y \Delta V}{V}, \quad \zeta = \frac{\lim \sum z \Delta V}{V}. \quad (6.14)$$

Vedem că în cazul corpurilor omogene poziția centrului maselor depinde exclusiv de forma geometrică a corpului.

Limitele sumelor din formulele precedente care ne determină coordonatele centrului maselor în cazul curbelor, suprafețelor și



corpurilor tridimensionale sînt integrale, definite pe lungimea curbelor, aria suprafețelor și volumul corpurilor. De aceea, folosindu-ne de notațiile din calculul integral putem prezenta aceste formule sub forma:

Curbă neomogenă

$$\bar{x} = \frac{\int x \rho \, ds}{M},$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \rho \, ds}{M},$$

$$\bar{z} = \frac{\int z \rho \, ds}{M}.$$

Curbă omogenă

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{l},$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \, ds}{l},$$

$$\bar{z} = \frac{\int z \, ds}{l}.$$

Suprafață neomogenă

$$\bar{x} = \frac{\iint x \rho \, d\sigma}{M},$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y \rho \, d\sigma}{M},$$

$$\bar{z} = \frac{\iint z \rho \, d\sigma}{M}.$$

Suprafață omogenă

$$\bar{x} = \frac{\iint x \, d\sigma}{\sigma},$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y \, d\sigma}{\sigma},$$

$$\bar{z} = \frac{\iint z \, d\sigma}{\sigma}.$$

Corp neomogen

$$\bar{x} = \frac{\iiint x \rho \, dV}{V},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint y \rho \, dV}{V},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint z \rho \, dV}{V}.$$

Corp omogen

$$\bar{x} = \frac{\iiint x \, dV}{V},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint y \, dV}{V},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint z \, dV}{V}.$$

§ 29. Metode practice de determinare a coordonatelor centrului maselor. În paragraful precedent am văzut că determinarea coordonatelor centrului maselor, care în prezența forței gravitației coincide cu centrul de greutate, se reduce la calculul limitei cîtorva sume, adică propriu-zis la calculul unor integrale definite. Totuși, în cazuri mai simple, centrul maselor poate fi găsit pe o cale elementară pentru care este bine să se folosească următoarele metode.



*Folosirea planelor de simetrie.* Să presupunem corpul cercetat că are un plan de simetrie, de exemplu planul  $Ox_1y_1$ , adică la fiecare element de masă situat deasupra planului  $Ox_1y_1$  corespunde un element avînd aceeași masă situată la aceeași distanță, dedesubtul planului  $Ox_1y_1$ . Atunci avem:  $\sum_n m_n z_n = 0$  și deci  $\zeta = 0$ . Dacă

prin urmare, corpul material are un plan de simetrie, atunci centrul maselor este situat în acest plan. Dacă acest corp material are două plane de simetrie, atunci centrul maselor este situat pe dreapta de intersecție a acestor plane; dacă corpul material are trei plane de simetrie, atunci centrul maselor este situat în punctul lor comun, și în acest fel, îl găsim fără nici un fel de calcul. De exemplu, centrul maselor unui elipsoid omogen cu trei axe, este situat în centrul lui geometric. În cazul unei figuri plane, în loc de plane de simetrie vom avea drept (axe) de simetrie; de exemplu, centrul maselor unei elipse omogene este situat în punctul de intersecție al axelor ei, adică în centrul geometric.

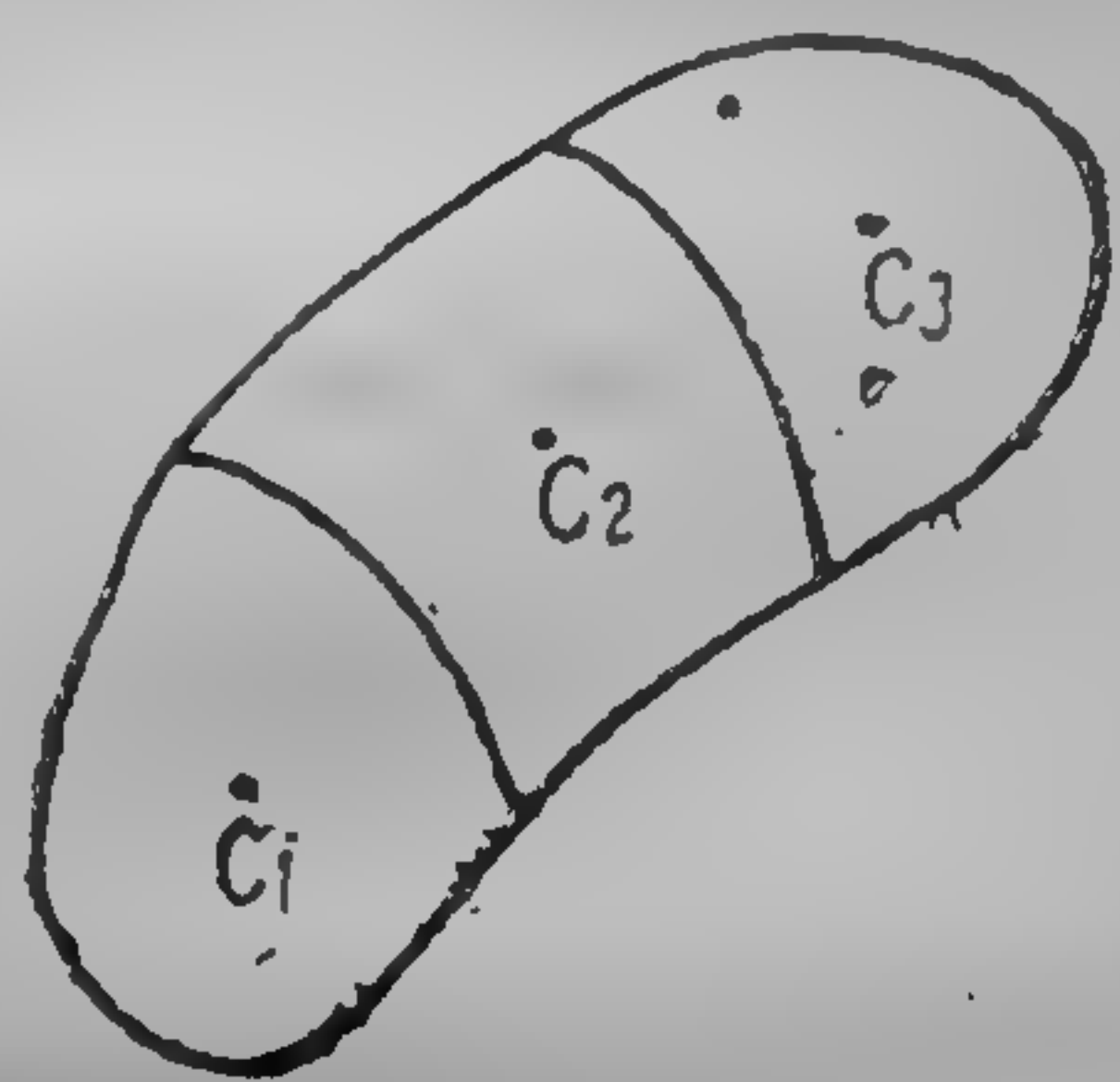


Fig. 55

*Metoda adunării sau metoda punctelor echivalente.* Să introducem noțiunea de punct echivalent. Vom numi punct echivalent, punctul material ce coincide cu centrul de greutate al corpului material și a cărui masă este egală cu masa acestui corp. Folosind formulele (6.8), rezultă că:  $\sum m_n x_n = M\xi$ ,  $\sum m_n y_n = M\eta$ ,  $\sum m_n z_n = M\zeta$ . Să examinăm un corp oarecare care se poate împărți de exemplu în trei părți, ale căror centre de greutate  $C_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $C_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ,  $C_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$  și ale căror mase  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  ne sînt cunoscute (fig. 55). Aplicînd corpului formulele (6.8), avem:

$$\xi = \frac{\sum m_n x_n}{M}.$$

Desfăcînd suma de la numărător în trei părți care se referă la partea I, II și III, a corpului și înlocuind aceste trei părți, în



baza observațiilor precedente, respectiv cu valorile lor  $M_1 \xi_1$ ,  $M_2 \xi_2$  și  $M_3 \xi_3$  vom avea:

și în mod analog

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + M_3 \xi_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \\ \eta &= \frac{M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + M_3 \eta_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \\ \zeta &= \frac{M_1 \zeta_1 + M_2 \zeta_2 + M_3 \zeta_3}{M_1 + M_2 + M_3}. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Vedem de aici, că găsirea centrului maselor al unui corp s-a redus la găsirea centrului maselor a trei puncte echivalente care îl înlocuiesc.

Acest procedeu se numește de asemenea *metoda adunării* pentru că aplicându-l, ne imaginăm întregul corp format din părți ale căror centre de greutate ne sînt cunoscute.

*Metoda scăderii sau metoda maselor negative.* Fie dat un corp, în care există, de exemplu, trei goluri (fig. 56). Să ne imaginăm că dacă aceste trei goluri

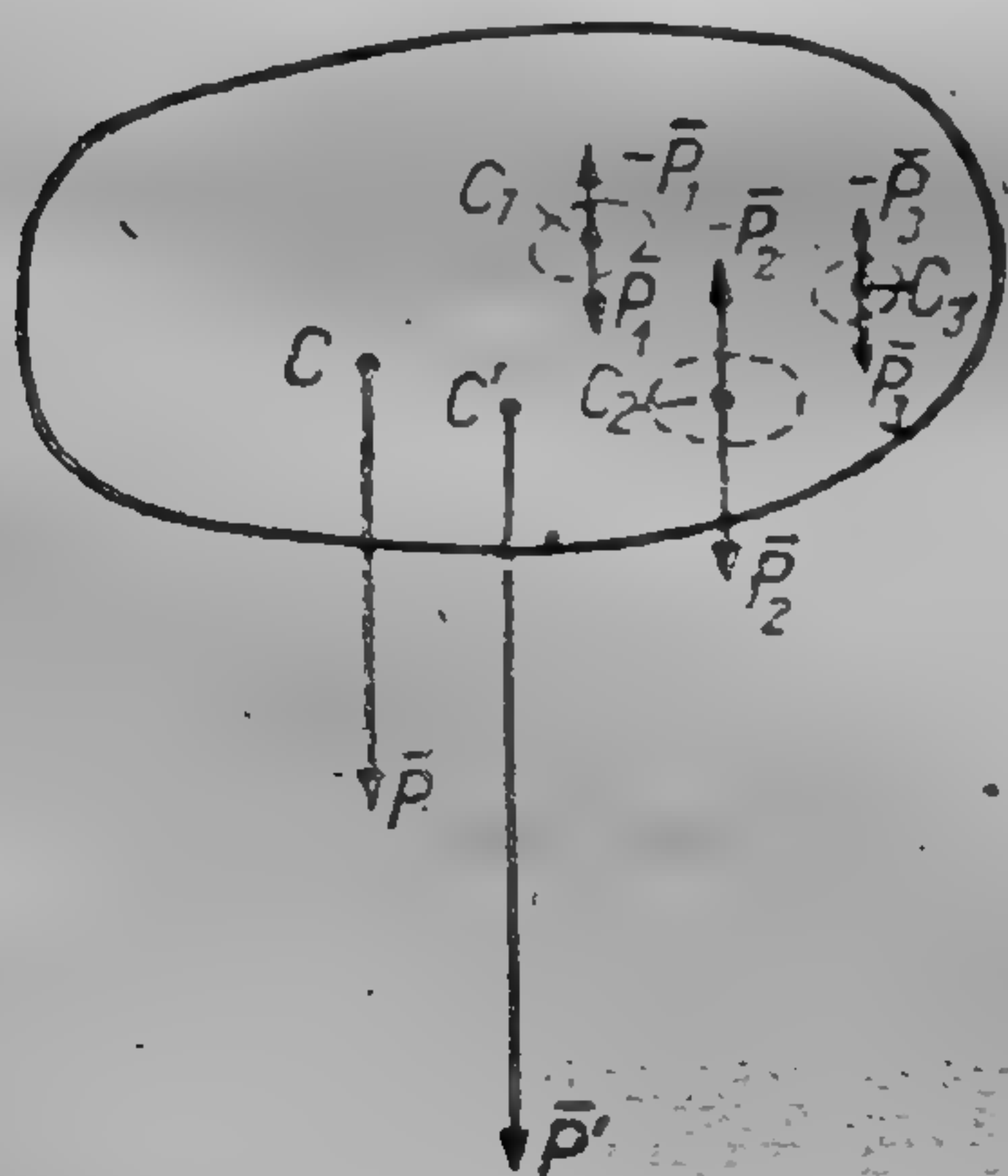


Fig. 56

ar fi și ele umplute cu masă, atunci greutatea corpului ar fi egală cu  $P'$  și centrul său de greutate s-ar găsi în punctul  $C'$ . Fie  $P$  greutatea reală a corpului cu goluri și  $C$  centrul lui de greutate. Atunci  $P'$  este rezultanta forțelor paralele  $\bar{P}$ ,  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$  aplicate respectiv în punctele  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  și punctul  $C'$  este centrul acestor forțe paralele. Prin urmare, forța  $\bar{P}$  este diferența dintre forța  $\bar{P}'$  și forțele  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ . Putem înlocui scăderea prin adunare, considerînd în locul for-

țelor  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$  forțele opuse  $-\bar{P}_1$ ,  $-\bar{P}_2$ ,  $-\bar{P}_3$ . Astfel, problema se reduce la găsirea centrului forțelor paralele  $\bar{P}'$ ,  $-\bar{P}_1$ ,  $-\bar{P}_2$ ,  $-\bar{P}_3$ . Notăm masa întregului corp (presupunînd că golurile sînt pline cu masă) cu  $M'$ , coordonatele punctului  $C'$  cu  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , masa



substanței care umple primul gol cu  $M_1$ , coordonatele punctului  $C_1$  cu  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  și  $\zeta_1$  etc.; este evident că vom avea:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{M'\xi' - M_1\xi_1 - M_2\xi_2 - M_3\xi_3}{M' - M_1 - M_2 - M_3}, \\ \eta &= \frac{M'\eta' - M_1\eta_1 - M_2\eta_2 - M_3\eta_3}{M' - M_1 - M_2 - M_3}, \\ \zeta &= \frac{M'\zeta' - M_1\zeta_1 - M_2\zeta_2 - M_3\zeta_3}{M' - M_1 - M_2 - M_3}. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Din formulele (6.16) se vede că problema se reduce la aflarea poziției centrelor maselor pentru masa pozitivă  $M'$  și pentru masele negative  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ .

§ 30. Cele mai simple cazuri de determinare a centrului de greutate. Să examinăm cazurile cele mai simple, când centrul de greutate se poate determina pe cale elementară.

1. *Centrul de greutate al unui segment omogen de dreaptă.* Fie dat un segment omogen de dreaptă  $AB$ , și fie punctul  $C$  mijlocul segmentului. Deoarece punctul  $C$  este centrul de simetrie, centrul de greutate se găsește în punctul  $C$ .

2. *Centrul de greutate al unei linii frântă și omogene.* Fie dată linia frântă omogenă  $ABCDEF$  tangentă unui cerc și fie  $O$  — centrul cercului înscris în ea. Presupunem că linia frântă  $ABCDEF$  cuprinde cel mult jumătate din circumferință (fig. 57). Ducând axa de simetrie  $Ox$  concludem pe baza raționamentului făcut la § 29, că centrul de greutate trebuie să se găsească pe această axă. Să determinăm coordonata lui  $\xi$ . Înlocuim fiecare

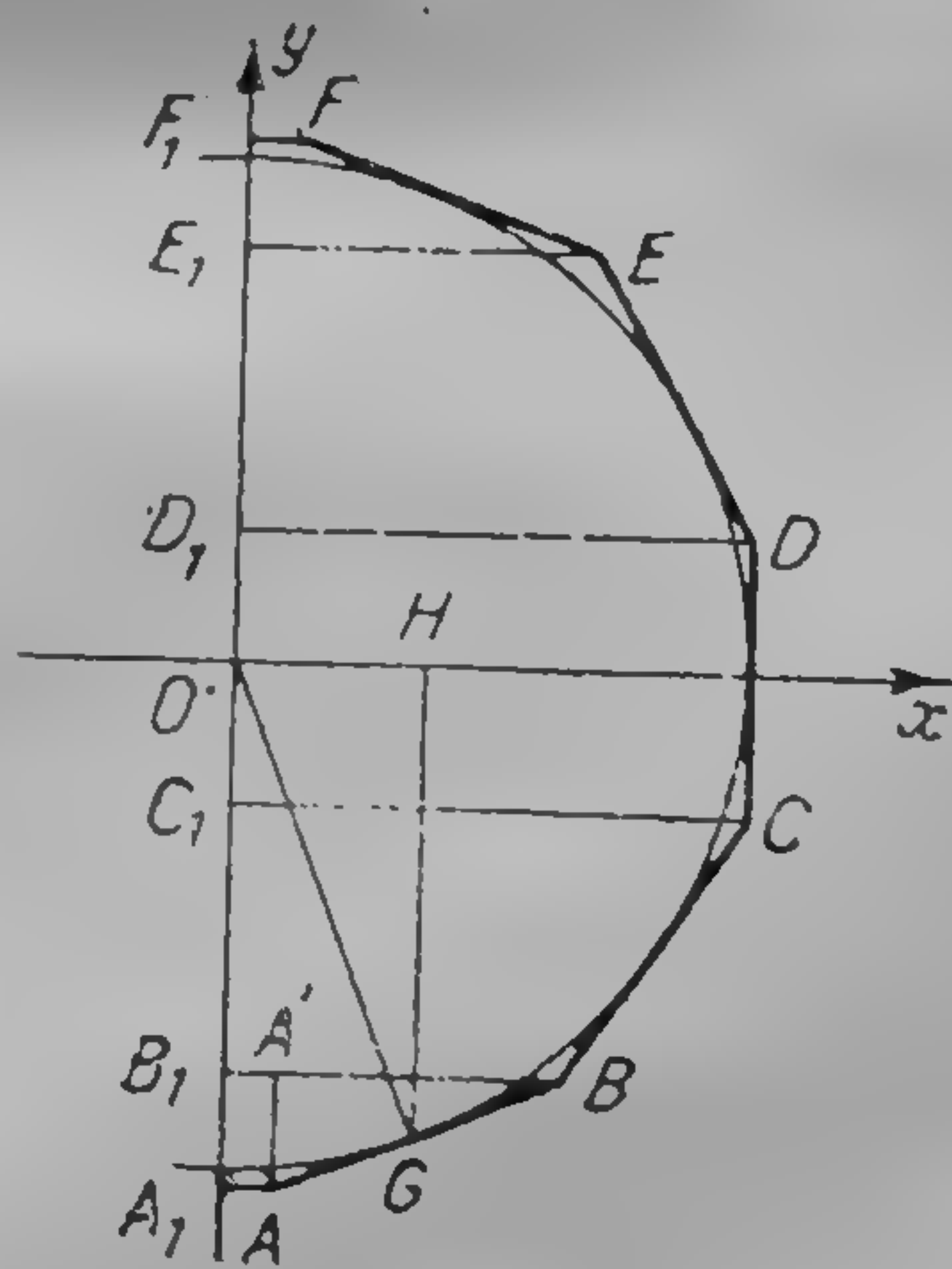


Fig. 57

latură ( $AB, \dots$ ) a liniei frântă cu punctul echivalent corespunzător ( $G, \dots$ ) și notăm prin  $l$  lungimea laturii liniei frântă, prin  $R$  — raza cercului înscris, prin  $n$  — numărul laturilor liniei frântă. Aplicând metoda punctelor echivalente și servindu-ne de



formulele (6.15), după ce le vom simplifica cu densitatea constantă a liniei frînte, vom obține:

$$\xi = \frac{AB \cdot \xi_1 + BC \cdot \xi_2 + \dots + l\xi_1 + l\xi_2 + \dots}{AB + BC + \dots + nl}$$

unde  $\xi_1, \xi_2, \dots$  sînt abscisele centrelor de greutate ale laturilor  $AB, BC, \dots$ . Să examinăm, de exemplu, latura  $AB$ . Coborînd din punctul echivalent  $G$  perpendiculara  $GH$  pe axa  $Ox$ , rezultă  $OH = \xi_1$ . Proiecția laturii  $AB$  pe axa  $Oy$ , perpendiculară pe axa  $Ox$ , este segmentul  $A_1B_1$ ; construim segmentul  $AA'$  perpendicular pe  $BB_1$ ; din asemănarea triunghiurilor  $AA'B$  și  $OGH$  rezultă:

$$\frac{OH}{AA'} = \frac{OG}{AB},$$

și cum  $OG = R$

$$\frac{\xi_1}{A_1B_1} = \frac{R}{l}, \quad l\xi_1 = A_1B_1 \cdot R.$$

În mod analog vom obține

$$l\xi_2 = B_1C_1 \cdot R, \quad l\xi_3 = C_1D_1 \cdot R \dots$$

Introducînd aceste expresii în formula precedentă pentru coordonata  $\xi$  vom avea:

$$\xi = \frac{A_1B_1 \cdot R + B_1C_1 \cdot R + C_1D_1 \cdot R + \dots}{nl}$$

Notăm lungimea  $A_1F_1$  a întregii proiecții a liniei frînte, pe axa  $Oy$  prin  $d$ ; atunci din formula precedentă vom găsi:

$$\xi = \frac{R(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \dots)}{nl} = R \frac{d}{L} \quad (6.17)$$

unde  $L$  este lungimea întregii linii frînte.

3. *Centrul de greutate al unui arc de cerc omogen.* Fie dat un arc de cerc  $ABC$  cu unghiul la centru mai mic de  $180^\circ$  (fig. 58). Ducem axa de simetrie  $Ox$  și notăm cu  $\alpha$  jumătatea unghiului la centru  $AOC$ , care corespunde arcului  $ABC$ . Centrul de greutate al arcului  $ABC$  se va găsi pe axa lui de simetrie  $Ox$ , și, pentru a-l găsi, trebuie să ne folosim de formula (6.17), considerînd arcul  $ABC$  ca limită a unei linii frînte regulate la care



numărul laturilor crește nelimitat, iar lungimea fiecărei laturi tinde către zero. La limită vom avea:

$$d = AC = 2DC = 2R \sin \alpha, \quad L = \widehat{ABC} = R \cdot 2\alpha,$$

și din formula (6.17) obținem:

$$\xi = R \frac{2R \sin \alpha}{R \cdot 2\alpha} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (6.18)$$

Aplicând această formulă la semicircumferință, când  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , vom avea:

$$\xi = R \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} R \approx 0,63662 R.$$

4. *Centrul de greutate al unui paralelogram omogen.* Să examinăm paralelogramul  $ABCD$  (fig. 59). Să-l împărțim, prin drepte paralele la baza  $AB$ , în fișii infinite de înguste. Deoarece centrul de greutate al fiecărei fișii este situat în mijlocul ei, locul

geometric al punctelor echivalente va fi dreapta  $EF$ . Astfel am redus problema la găsirea centrului de greutate al unei drepte omogene  $EF$ . Centrul ei de greutate se află în punctul  $O$ , punctul

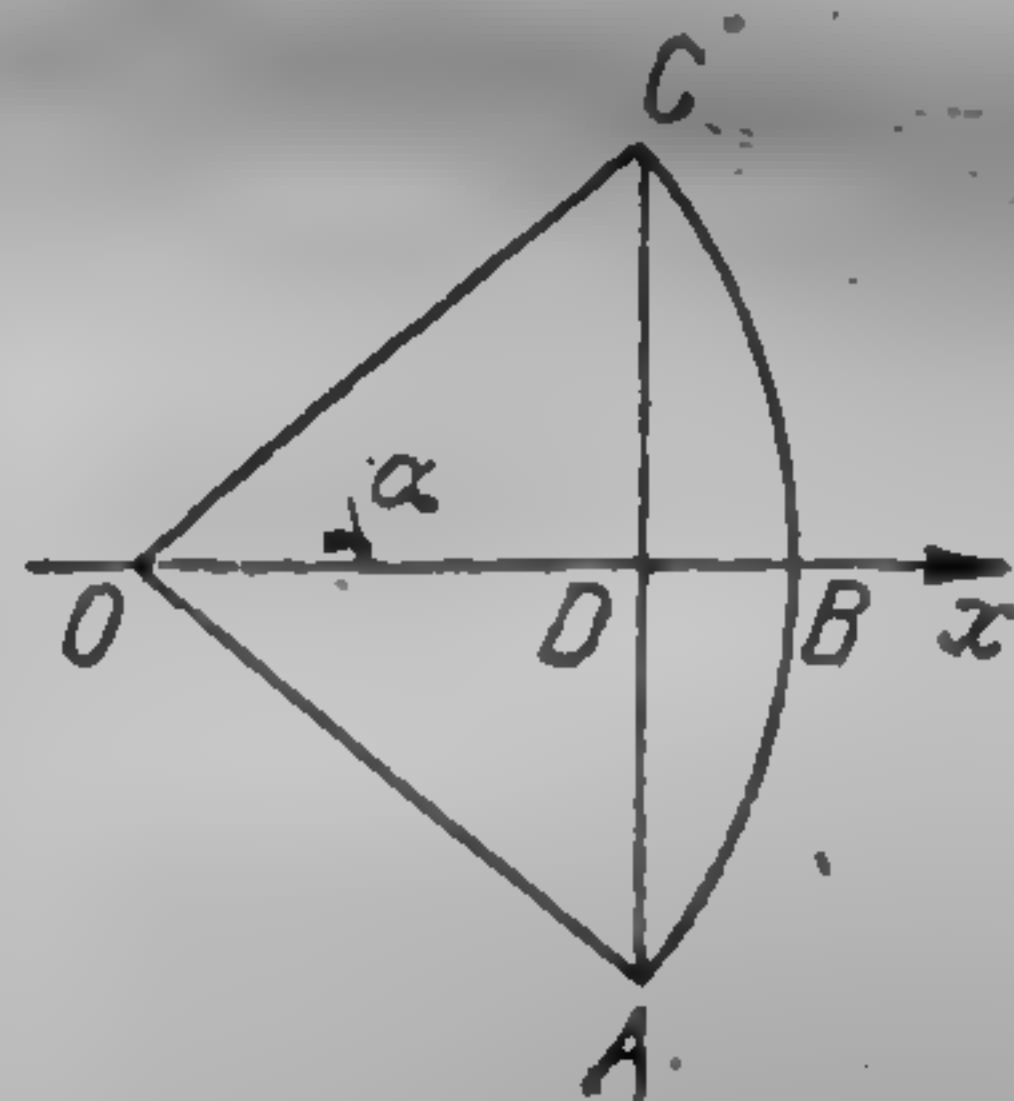


Fig. 58

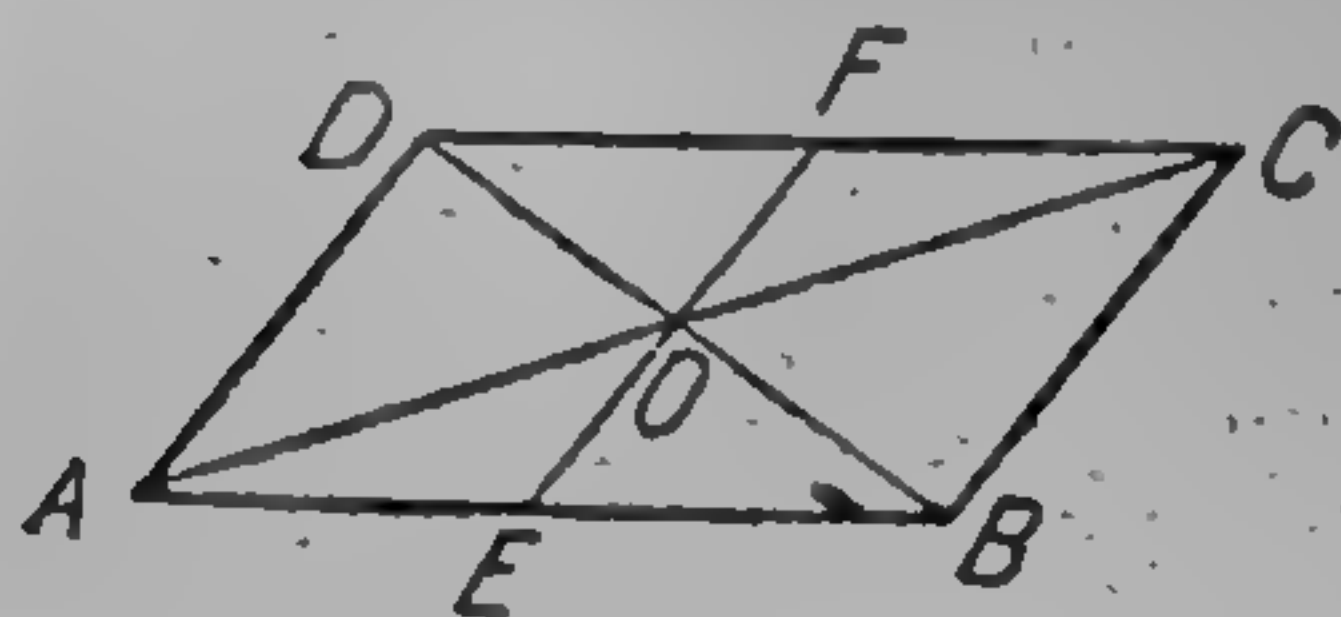


Fig. 59

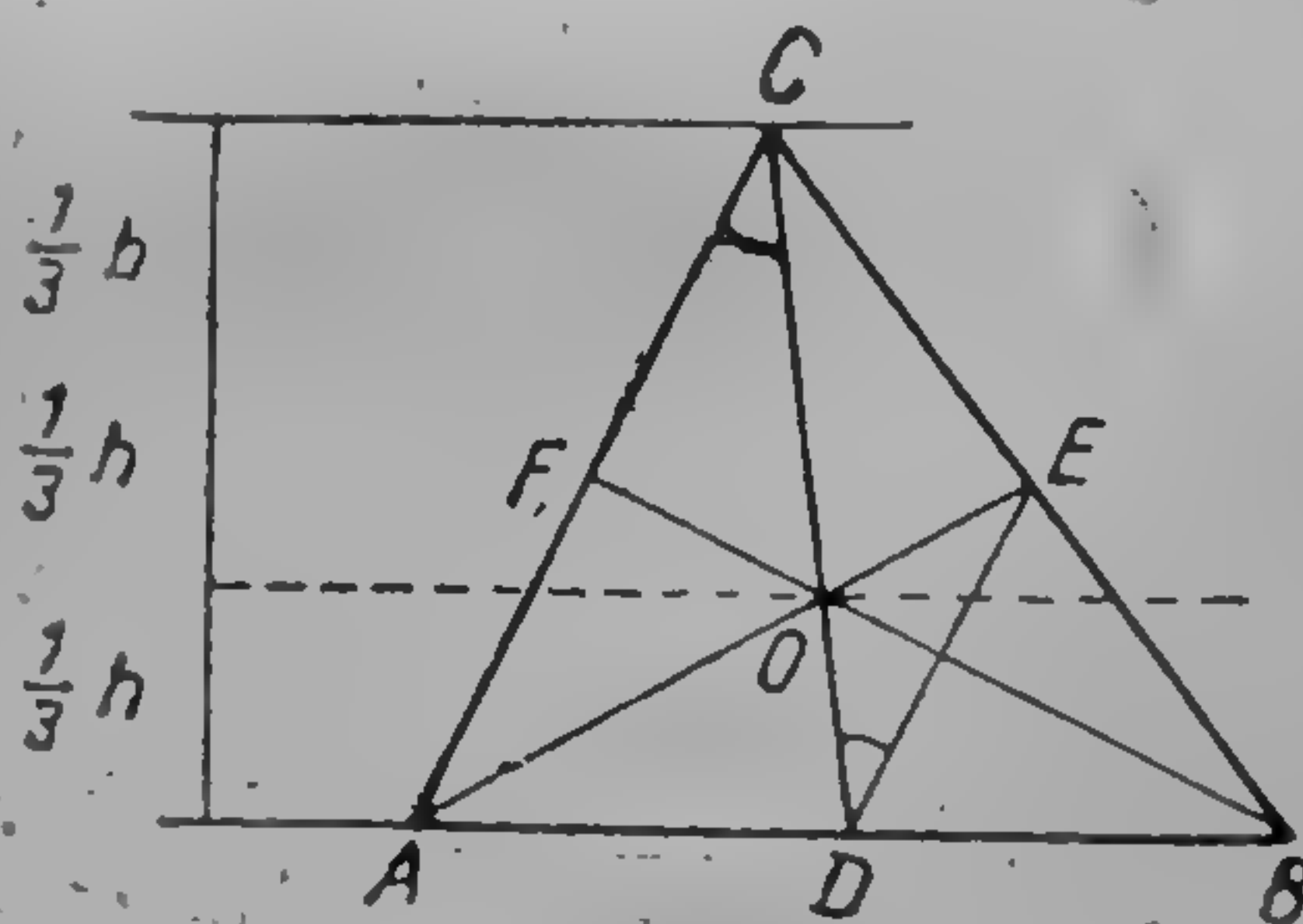


Fig. 60

de intersecție al diagonalelor  $AC$  și  $DB$ . Prin urmare, centrul de greutate al unui paralelogram se află în punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului.

5. *Centrul de greutate al unui triunghi omogen.* Să examinăm triunghiul  $ABC$  (fig. 60). Împărțindu-l prin drepte paralele



cu baza  $AB$ , în fișii infinit de înguste, și înlocuind fiecare fișie printr-un punct echivalent, vom găsi că locul geometric al punctelor echivalente este dreapta  $CD$ , mediana triunghiului. Centrul de greutate se va găsi pe mediana  $CD$  și astfel, problema s-a redus la găsirea centrului de greutate al unei drepte neomogene, a cărei densitate crește pe măsură ce ne apropiem de punctul  $D$ . Ducând o altă mediană  $AE$  vom găsi de asemenea că ea este locul punctelor echivalente pentru triunghi. Deci, centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  se află în punctul  $O$  de intersecție al medianelor  $CD$  și  $AE$ . De aici, rezultă că toate trei medianele triunghiului se întretaie într-un punct. Să unim printr-o dreaptă punctele  $D$  și  $E$ , adică mijlocul laturilor  $BA$  și  $BC$  ale triunghiului  $ABC$ ; dreapta  $DE$  va fi paralelă la latura  $AC$  și egală cu jumătatea ei. Deoarece  $\triangle AOC \sim \triangle DOE$ , vom găsi:

$$\frac{CO}{DO} = \frac{AC}{DE} = 2.$$

Astfel, centrul de greutate al triunghiului se află pe o mediană a triunghiului la o treime din lungimea ei măsurată de la latuna corespunzătoare medianei.

6. *Centrul de greutate al unui trapez omogen.* Fie dat trapezul  $ABCD$  (fig. 61). Ducând diagonala  $AC$ , împărțim trapezul în triunghiurile  $ACD$  și  $ACB$ .

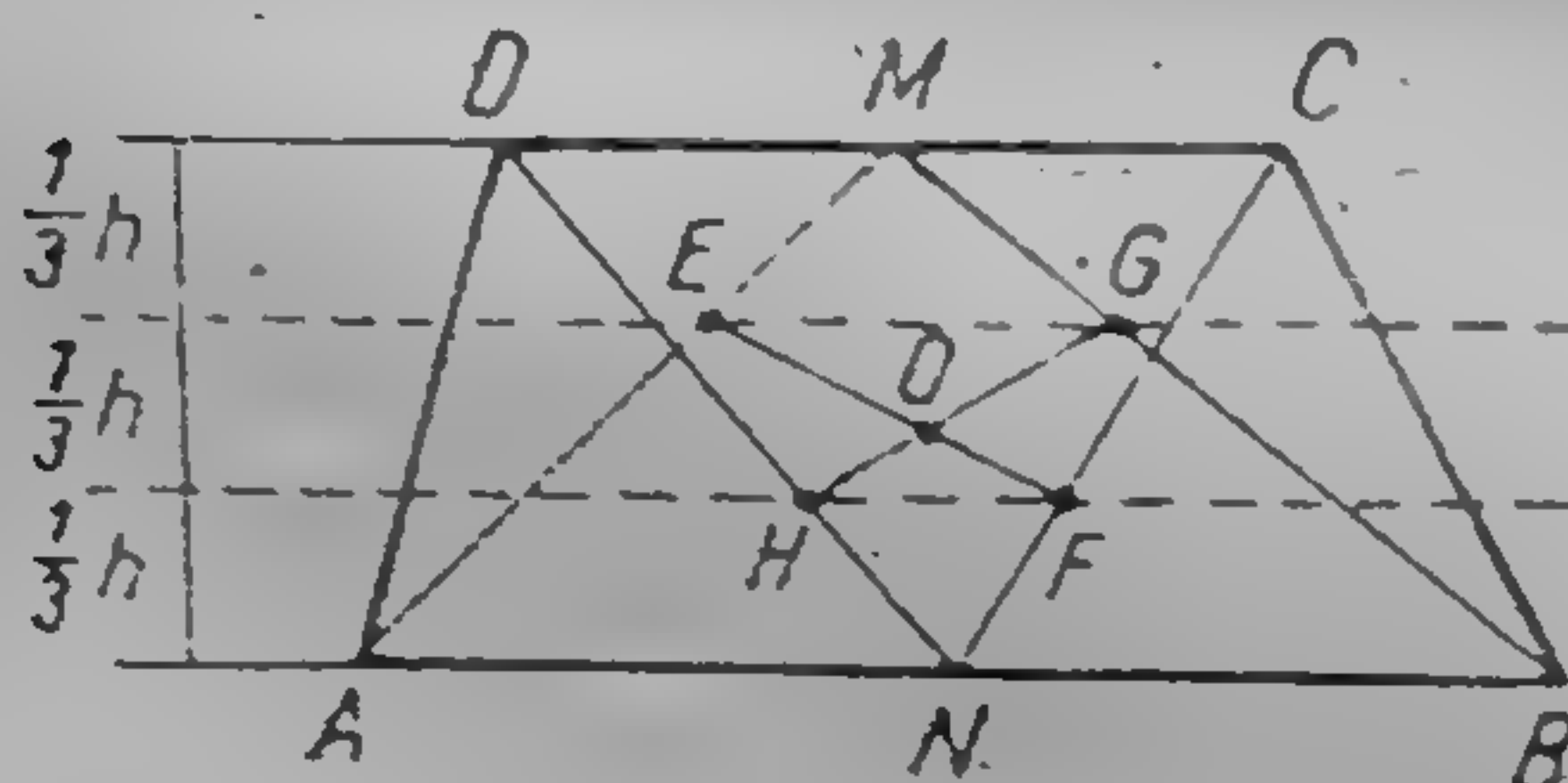


Fig. 61

Dacă  $M$  și  $N$  sînt mijloacele bazelor trapezului, atunci centrul de greutate al primului triunghi se află în punctul  $E$ , al celui de-al doilea în punctul  $F$ , prin urmare centrul de greutate al trapezului se află pe dreapta  $EF$ . Ducând diagonala  $DB$  vom împărți trapezul în triunghiul  $DBC$ , al cărui

centru de greutate se află în punctul  $G$  și în triunghiul  $DBA$  al cărui centru de greutate se află în punctul  $H$ ; deci centrul de greutate al trapezului se află de asemenea pe dreapta  $GH$ . Astfel, centrul de greutate al trapezului este situat în punctul  $O$  de intersecție al dreptelor  $EF$  și  $GH$ .

7. *Centrul de greutate al unui sector circular omogen.* Fie sectorul circular  $OABCO$ , de rază  $R$  și unghi la centru  $2\alpha$



(fig. 62). Ducînd raze foarte apropiate putem împărți segmentul considerat în sectoare infinit de înguste, care se pot compara cu o infinitate de triunghiuri isoscele. Deoarece centrul de greutate al fiecărui triunghi se află pe mediana lui la o treime din lungimea ei considerată de la bază, locul geometric al punctelor echivalente va fi arcul  $DEF$ , a cărui rază  $OD = \frac{2}{3} R$ . Astfel, problema s-a redus la găsirea centrului de greutate al unui arc de cerc omogen  $DEF$  cu raza egală cu  $\frac{2}{3} R$ . Centrul lui de greutate, care este totodată și centrul de greutate al sectorului, se află pe axa  $Ox$  și are conform formulei (6.18) abscisa:

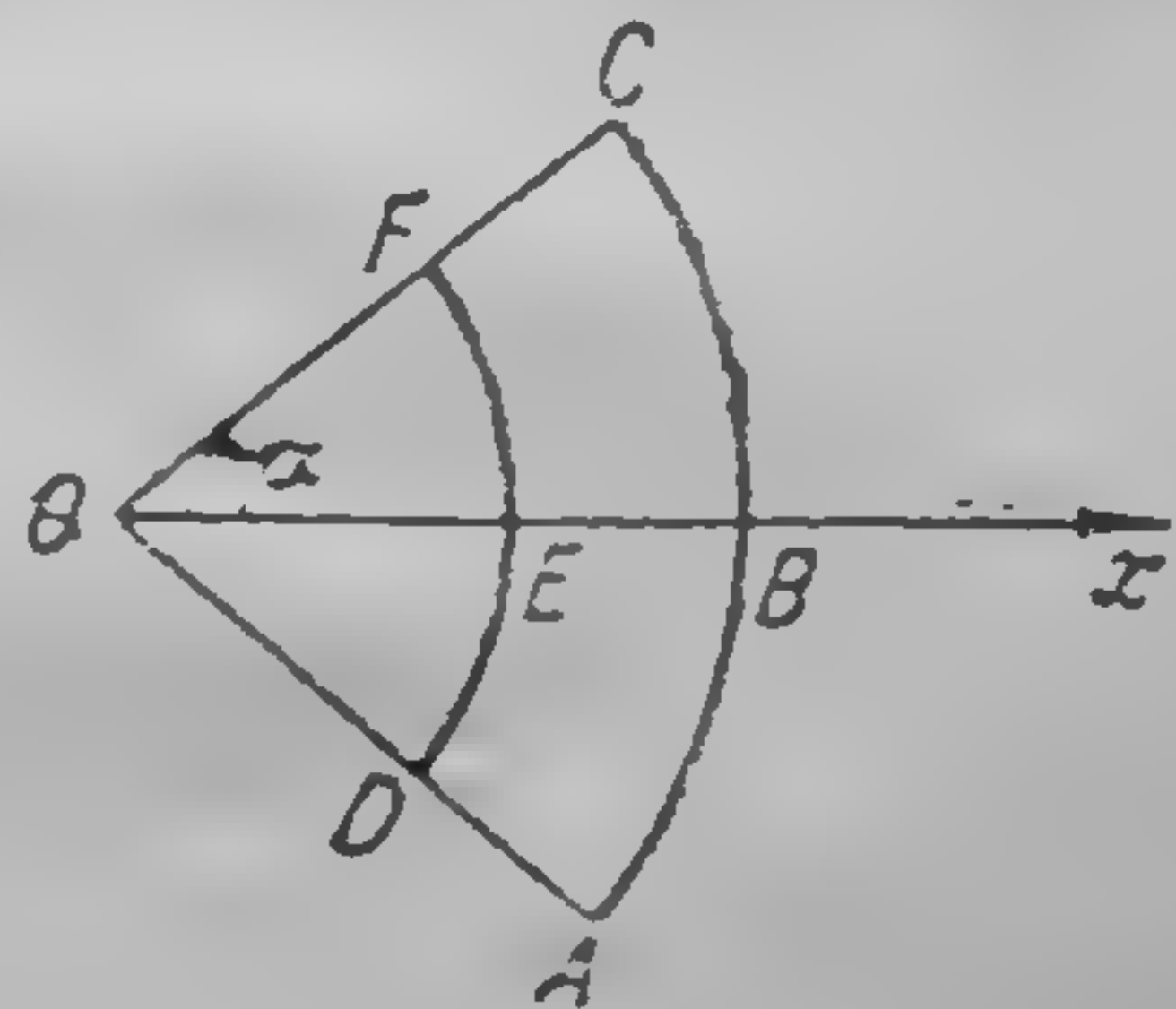


Fig. 62

$$\xi = OD \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (6.19)$$

Să folosim această formulă pentru găsirea centrului de greutate al semicercului cu raza egală cu  $R$ ; deoarece în acest caz  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , vom obține:

$$\xi = \frac{2}{3} R \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,42441 R.$$

8. *Centrul de greutate al unui segment de cerc omogen.* Fie segmentul de cerc  $ABCD$  de rază  $R$  și unghi la centru  $2\alpha$  (fig. 58). Acest segment este diferența dintre sectorul circular  $OABCO$  cu aria  $S'$  și triunghiul  $OAC$  cu aria  $S_1$ . Notînd abscisa centrului de greutate a sectorului prin  $\xi'$ , și al triunghiului prin  $\xi_1$ , pe baza primei formule (6.16) după simplificarea fracției din partea stîngă cu densitatea vom obține următoarea expresie pentru abscisa  $\xi$  la centrul de greutate al segmentului:

$$\xi = \frac{S' \xi' - S_1 \xi_1}{S' - S_1}.$$

Dar noi avem:

$$S' = R^2 \alpha, \quad \xi' = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

$$S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha = R^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \xi_1 = \frac{2}{3} R \cos \alpha.$$



Prin urmare:

$$\bar{x} = \frac{R^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} - R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2}{3} R \cos \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

sau

$$\bar{x} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \quad (6.20)$$

9. *Centrul de greutate al unui paralelipiped omogen.* Fie un paralelipiped omogen. Împărțindu-l prin plane paralele cu baza, într-o infinitate de straturi subțiri, și înlocuind fiecare strat cu un punct echivalent care se află în centrul său de greutate, vom găsi că locul geometric al punctelor echivalente este dreapta ce unește centrele de greutate a ambelor baze. Astfel, problema se reduce la aflarea centrului de greutate a acestei drepte omogene, deci centrul de greutate al paralelipipedului se află în mijlocul ei care coincide cu punctul de intersecție al diagonalelor paralelipipedului.

10. *Centrul de greutate al unui tetraedru omogen.* Fie tetraedrul  $SABC$  (fig. 63). Ducând plane paralele la baza  $ABC$ , tetraedrul se împarte în straturi triunghiulare

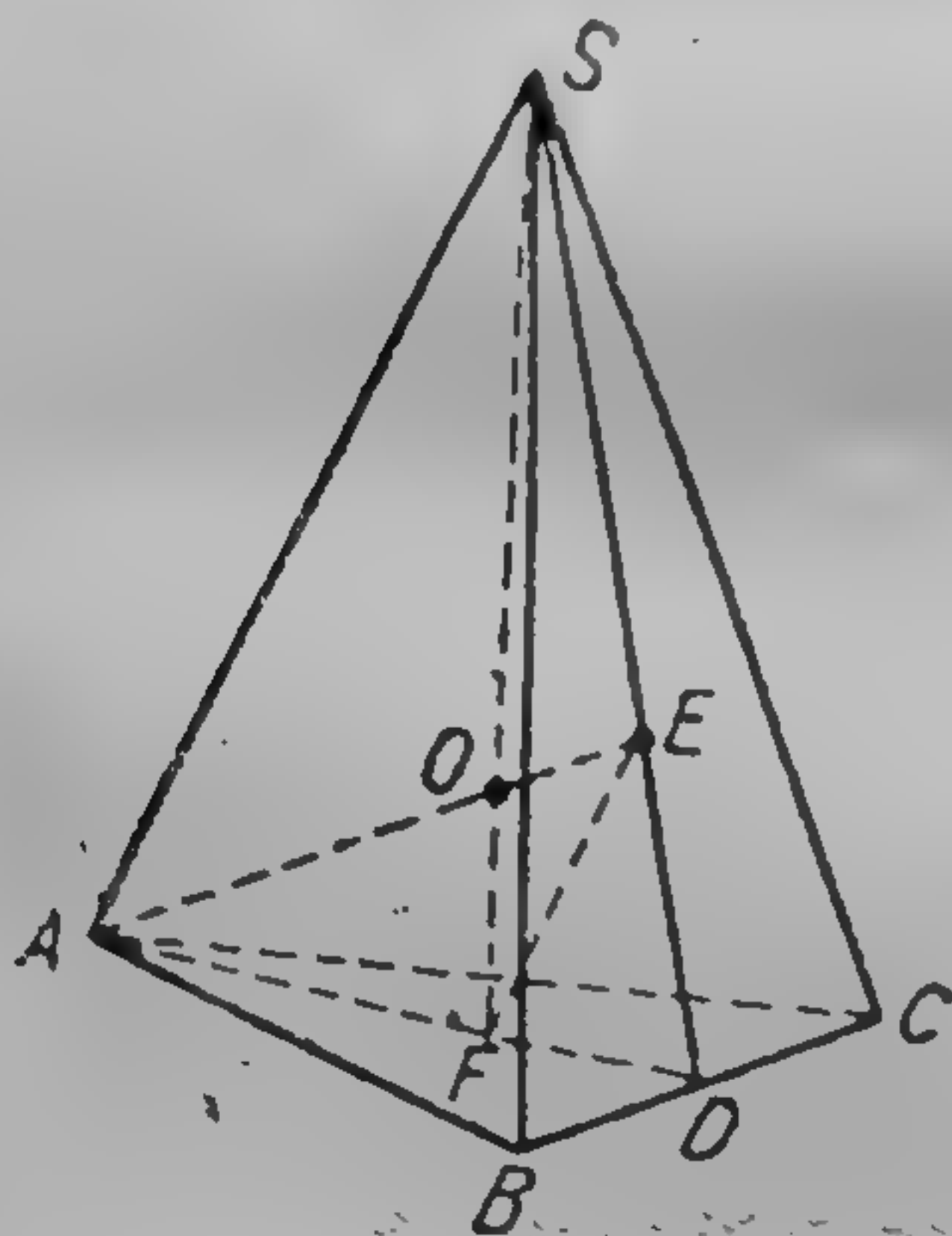


Fig. 63

infinite de subțiri. Să înlocuim fiecare strat cu punctul echivalent aflat în centrul său de greutate. Locul geometric al acestor puncte echivalente este dreapta  $SF$  care unește vârful  $S$  al tetraedrului cu centrul de greutate  $F$  al bazei  $ABC$ . Astfel, problema se reduce, la aflarea centrului de greutate al dreptei neomogene  $SF$ , a cărei densitate crește cu cât ne apropiem de punctul  $F$ . Unind alt vârf  $A$  al tetraedrului cu centrul de greutate  $E$  al bazei  $BCS$ , vom obține alt loc geometric  $AE$  al punctelor echivalente.

Deci, centrul de greutate al tetraedrului se află în punctul de intersecție  $O$  al acestor drepte  $SF$  și  $AE$ . Să observăm că dreptele  $SF$  și  $AE$  sunt în adevăr concurente, deoarece ele se află în planul triunghiului  $ASD$ . Să examinăm cele două triunghiuri  $ASD$  și  $FED$ ; ele au câte un unghi egal cuprins între laturi proporționale, deoarece avem:

$$\frac{AD}{FD} = \frac{SD}{ED} = 3.$$



De aceea, aceste triunghiuri sînt asemenea și trebuie să avem  $FE \parallel AS$ . Din paralelismul laturilor  $FE$  și  $AS$  urmează că  $\triangle ASO \sim \triangle FEO$ , de unde:

$$\frac{SO}{OF} = \frac{AS}{EF} = 3.$$

Prin urmare, centrul de greutate al unui tetraedru omogen se află pe dreapta care unește vîrfurile tetraedrului cu centrul de greutate al bazei sale la distanța de un sfert din lungimea ei măsurată de la bază.

Acest adevăr este valabil pentru orice piramidă omogenă și pentru conul omogen.

**§ 31. Teoremele lui Guldin.** Teoremele următoare care aparțin lui Guldin (1577—1643), și lui Pappus (sec. III î.e.n.), dau posibilitatea să se determine aria unei suprafețe de rotație și volumul unui corp de rotație dacă se cunoaște poziția centrului de greutate al arcului plan și a centrului de greutate al suprafeței plane, care generează prin rotirea lor în jurul unei axe, aflate în planul lor, această suprafață și acest corp.

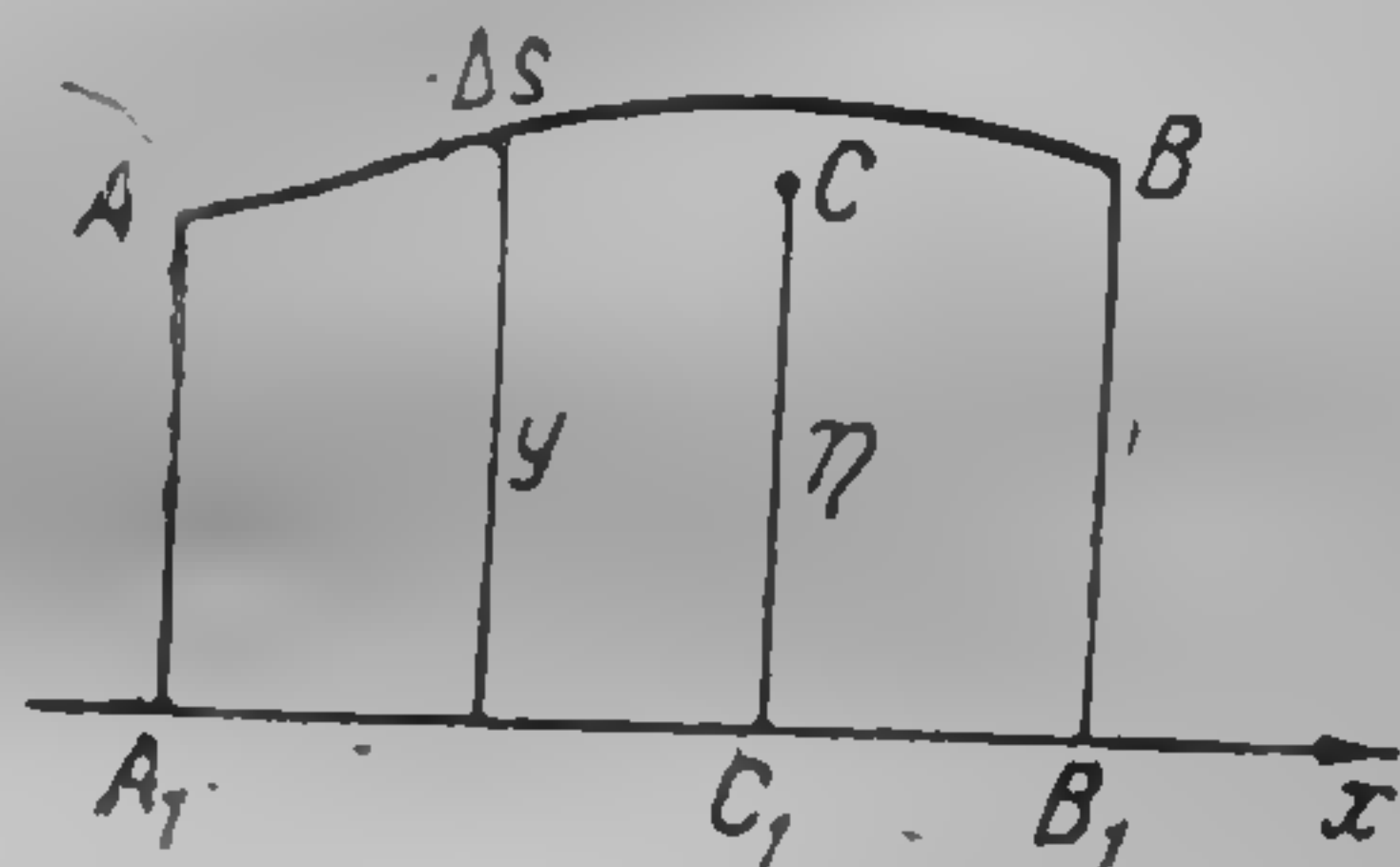


Fig. 64

*Prima teoremă a lui Guldin.* Suprafața laterală a unui corp de rotație descris de un arc de curbă plan care se rotește în jurul unei axe aflate în planul curbei și care nu intersectează arcul, este egală cu lungimea arcului înmulțită cu lungimea circumferinței descrise de centrul de greutate al aceluia arc.

Fie  $AB$  un arc de curbă plan și fie  $x$  axa de rotație pe care o luăm drept axă a absciselor (fig. 64). Ca un caz extrem, unul din punctele  $A$  și  $B$  sau amîndouă punctele pot fi situate pe axa  $x$ . Să luăm axa  $y$  perpendiculară pe axa de rotație. Coborîm din punctele  $A$  și  $B$  perpendicularele  $AA_1$  și  $BB_1$  pe axa de rotație; fie  $C$  centrul de greutate al arcului  $AB$  și  $\eta = CC_1$  ordonata lui. Notăm prin  $\Delta s$  elementul arcului  $AB$ , iar prin  $l$  — lungimea întregului arc. Neglijînd infiniți mici de ordin superior, se poate presupune că în timpul rotirii arcului în jurul axei  $x$ , elementul  $\Delta s$  al arcului  $AB$  va descrie suprafața laterală a unui triunghi de con a cărui generatoare este  $\Delta s$  și rază medie este  $y$ . Deoarece suprafața laterală a trunchiului de con este egală cu generatoarea înmulțită cu lungimea circumferinței descrise de raza medie,



suprafața laterală a conului considerat va fi  $2\pi y\Delta s$ . Însumând toate elementele suprafeței, vom obține la limită suprafața laterală  $\sigma$ :  $\sigma = \lim \sum 2\pi y \Delta s = 2\pi \lim \sum y \Delta s = 2\pi \int y ds$ .

Dar din formula (6.10) se vede că:

$$\lim \sum y \Delta s = \int y ds = \eta l.$$

Prin urmare, vom obține:  $\sigma = 2\pi \eta l$ , (6.21)

ceea ce demonstrează teorema. De aici urmează că, dacă vom roti arcul  $AB$  în planul său în jurul centrului său de greutate  $C$  și apoi vom roti arcul  $AB$  în jurul axei  $x$ , în diferite poziții,

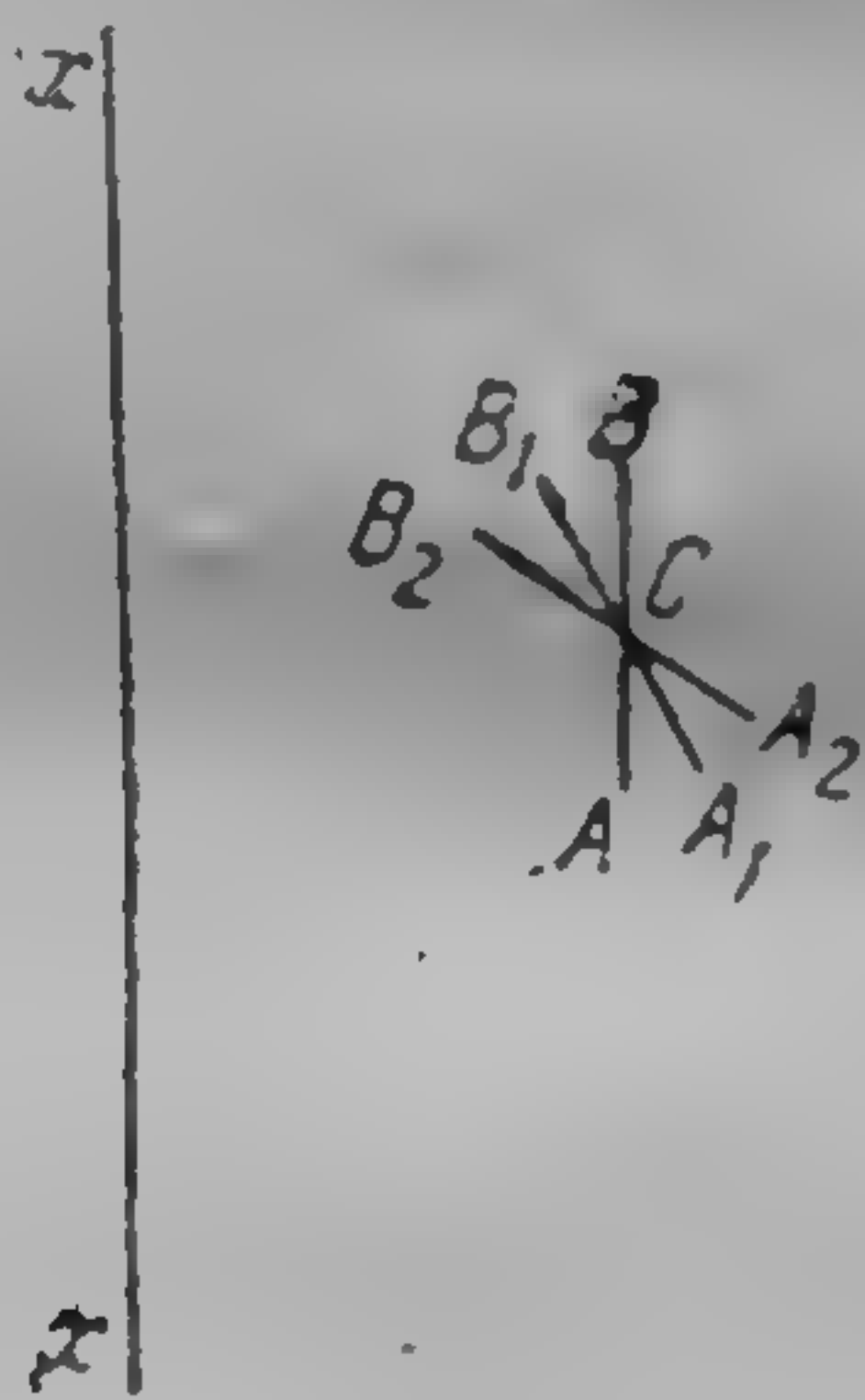


Fig. 65

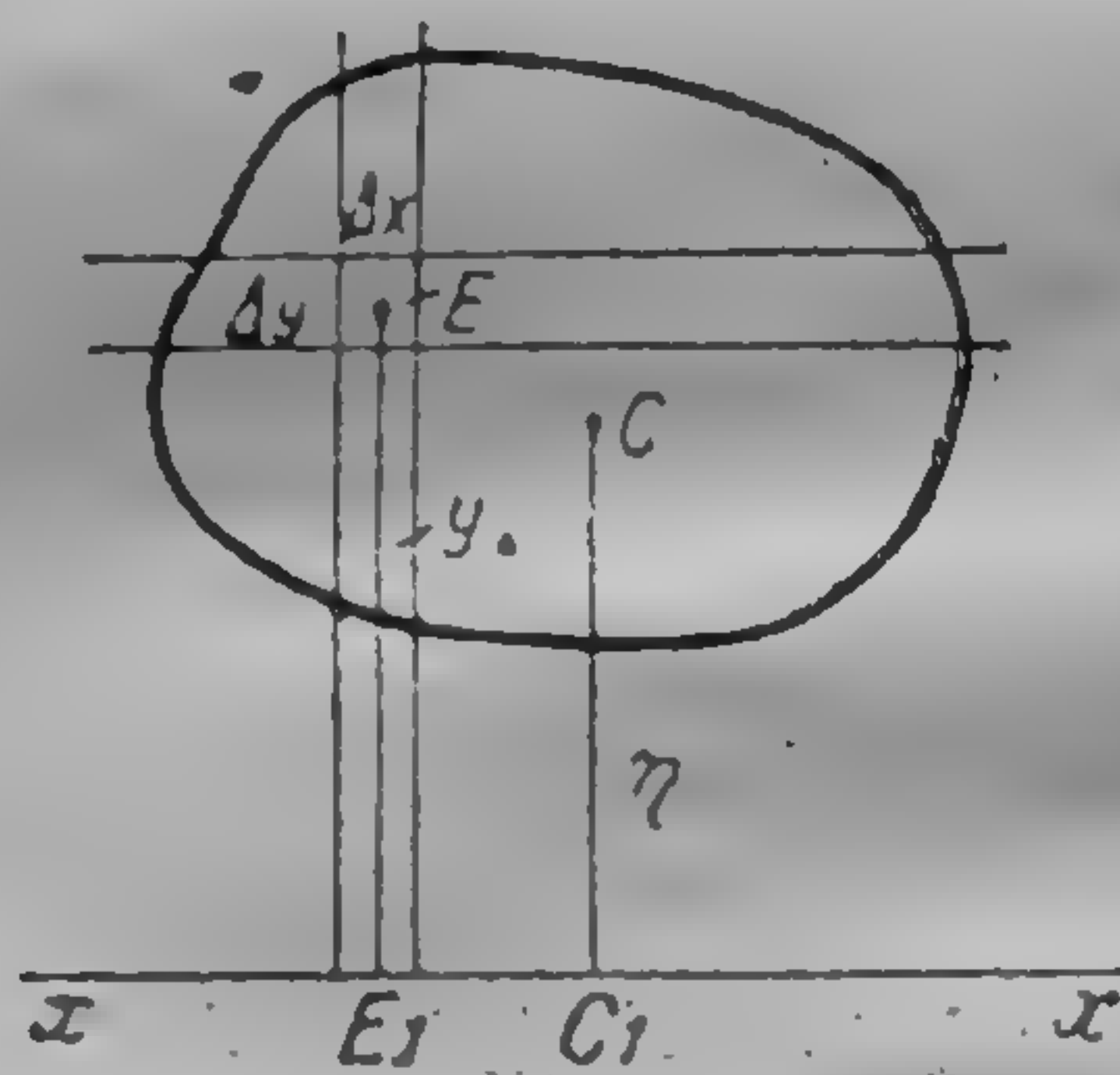


Fig. 66

atunci suprafețele laterale ale tuturor corpurilor obținute prin rotire vor fi egale între ele pentru că prin aceasta valorile  $\eta$  și  $l$  nu se vor modifica. De exemplu, fie segmentul de dreaptă  $AB$  care se rotește în jurul axei  $x$  aflată în același plan cu segmentul  $AB$ ; fie  $C$  mijlocul acestui segment (fig. 65). Vom roti segmentul  $AB$  în jurul punctului  $C$ , lăsându-l în același plan și dându-i pozițiile  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ , ...; atunci suprafețele laterale formate prin rotirea în jurul axei  $x$  a segmentelor  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ , ..., vor fi toate egale între ele. Acest rezultat se poate verifica ușor prin geometria elementară.

*A doua teoremă a lui Guldin. Volumul unui corp de rotație, obținut prin rotirea unei figuri plane în jurul unei axe aflată în planul ei care nu intersectează figura, este egal cu suprafața acelei figuri, înmulțită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al acestei figuri.*



Alegem axa de rotație drept axă a absciselor. Într-un caz extrem, axa de rotație poate fi una din laturile figurii plane. Fie  $C$  centrul de greutate al figurii plane și  $\eta$  ordonata lui (fig. 66). Impărțim întreaga figură plană în elemente de suprafață infinit mici prin drepte paralele la axele de coordonate. Fie  $E$  centrul unuia dintre dreptunghiurile obținute prin această diviziune și  $y = EE_1$  — ordonata lui. Volumul inelului care se formează prin rotirea acestui dreptunghi se poate obține ca diferență a volumelor a doi cilindri cu aceeași înălțime  $\Delta x$  și cu razele  $y + \frac{\Delta y}{2}$  și  $y - \frac{\Delta y}{2}$ ; de aceea, volumul inelului va fi:

$$\pi \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)^2 \Delta x - \pi \left(y - \frac{\Delta y}{2}\right)^2 \Delta x = 2\pi y \Delta x \Delta y = 2\pi y \Delta \sigma,$$

unde  $\Delta \sigma$  este suprafața dreptunghiului elementar cercetat. Însumând toate aceste volume, la limită vom obține volumul  $V$  al corpului de rotație considerat:

$$V = \lim \sum 2\pi y \Delta \sigma = 2\pi \lim \sum y \Delta \sigma = 2\pi \iint y d\sigma$$

Dar din formula (6.12) avem:

$$\lim \sum y \Delta \sigma = \iint y d\sigma = \eta \sigma,$$

unde  $\sigma$  reprezintă suprafața figurii. Astfel, vom obține:

$$V = 2\pi \eta \sigma, \quad (6.22)$$

ceea ce demonstrează teorema. De aici urmează că dacă vom roti figura plană în planul ei în jurul centrului ei de greutate  $C$  și apoi vom roti figura plană în jurul axei  $x$  în diferite poziții, atunci volumele tuturor corpurilor obținute prin rotire vor fi egale între ele, pentru că prin aceasta valorile  $\eta$  și  $\sigma$  nu se vor schimba. De exemplu, avem elipsa cu semiaxele  $a$  și  $b$  în două poziții: în prima poziție axa mică a elipsei este paralelă la axa  $x$ , în a doua poziție axa mare a elipsei este paralelă la axa  $x$ . Centrul elipsei se găsește în ambele cazuri la distanță egală cu  $d$  de axa de rotație (fig. 67). Vom roti aceste elipse în jurul axei  $x$ , atunci, pe baza celor expuse, volumele celor două inele elipsoidale obținute vor fi egale între ele, și anume vor fi egale cu  $2\pi^2 abd$ .

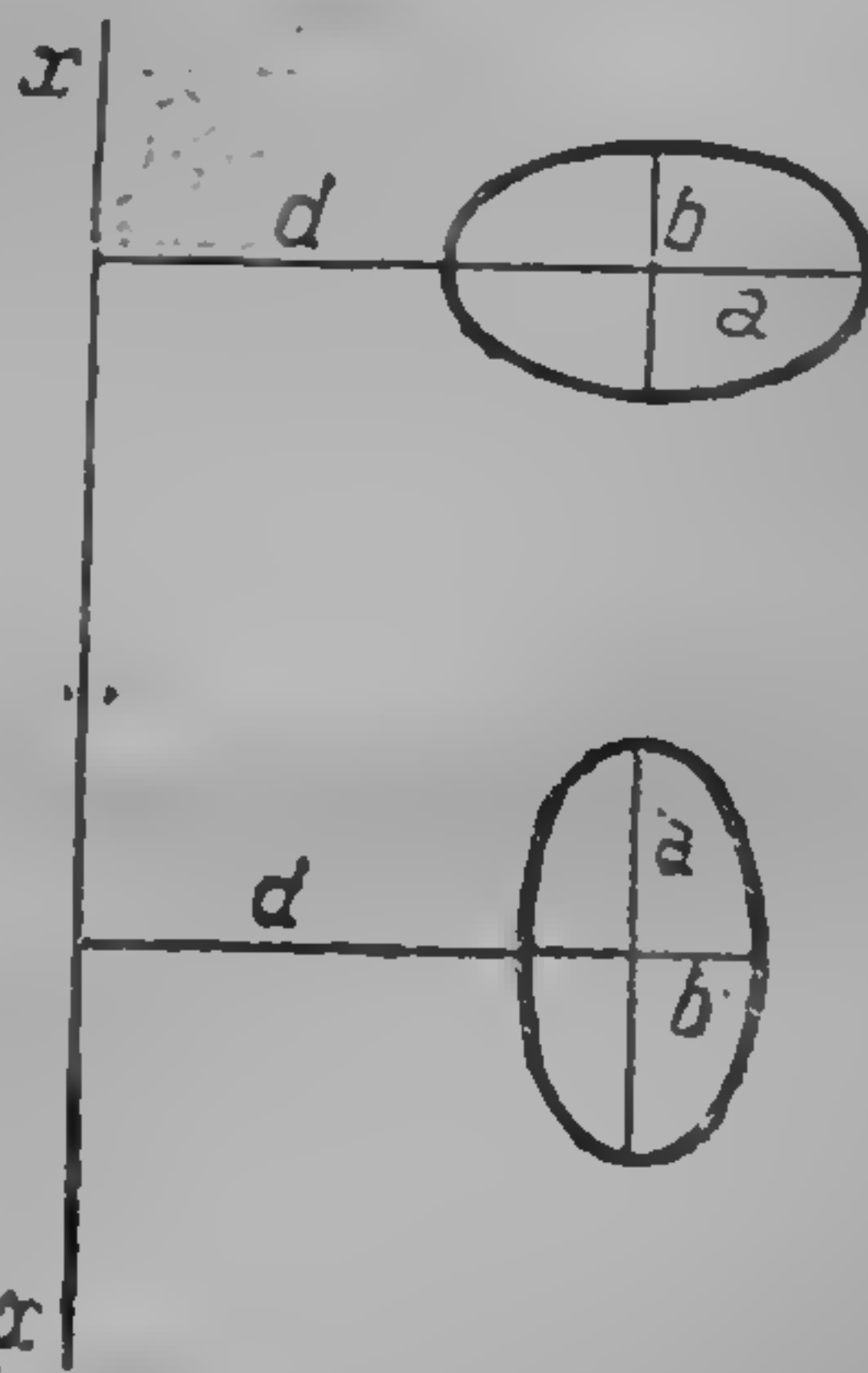


Fig. 67



*Observație.* Axa de rotație nu trebuie să întretaie arcele sau suprafețele, deoarece porțiunile care vor fi situate sub axa de rotație (v. fig. 66) vor da, din cauza ordonatelor negative, elemente negative în sumele calculate și vom obține ca rezultat diferența suprafețelor sau volumelor. Pentru a evita aceasta, trebuie să se execute separat calculele pentru părțile aflate deasupra și dedesubtul axei de rotație.

§ 32. Exemple. 18. Să examinăm figura plană reprezentată în fig. 68 compusă din două dreptunghiuri și un semicerc pe care le vom nota respectiv prin cifrele 1, 2 și 3. Deoarece figura considerată are o axă de simetrie, centrul ei de greutate se va afla pe acea axă; luând axa de simetrie ca axă a absciselor, vom reduce problema găsirii centrului de greutate al

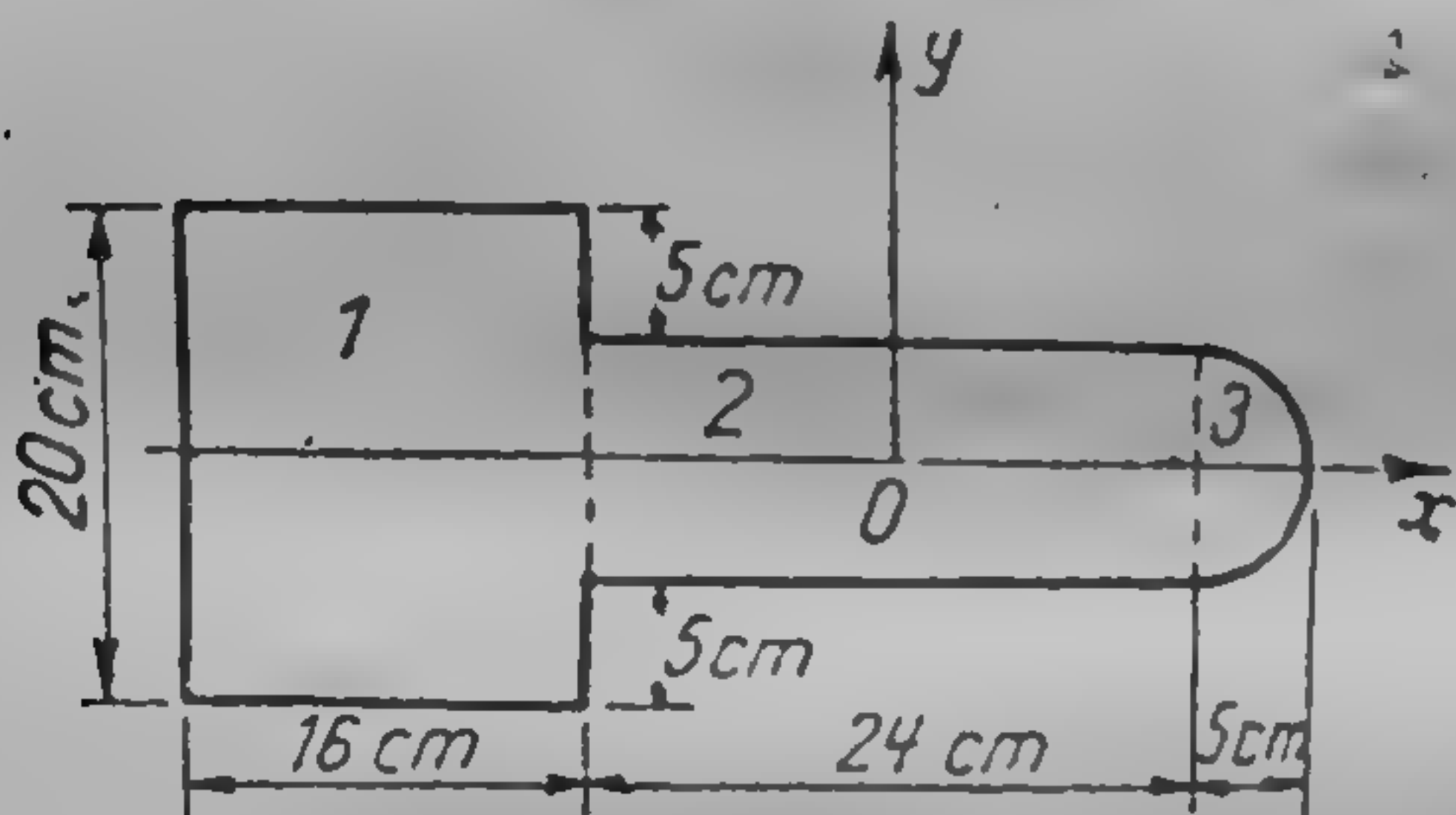


Fig. 68

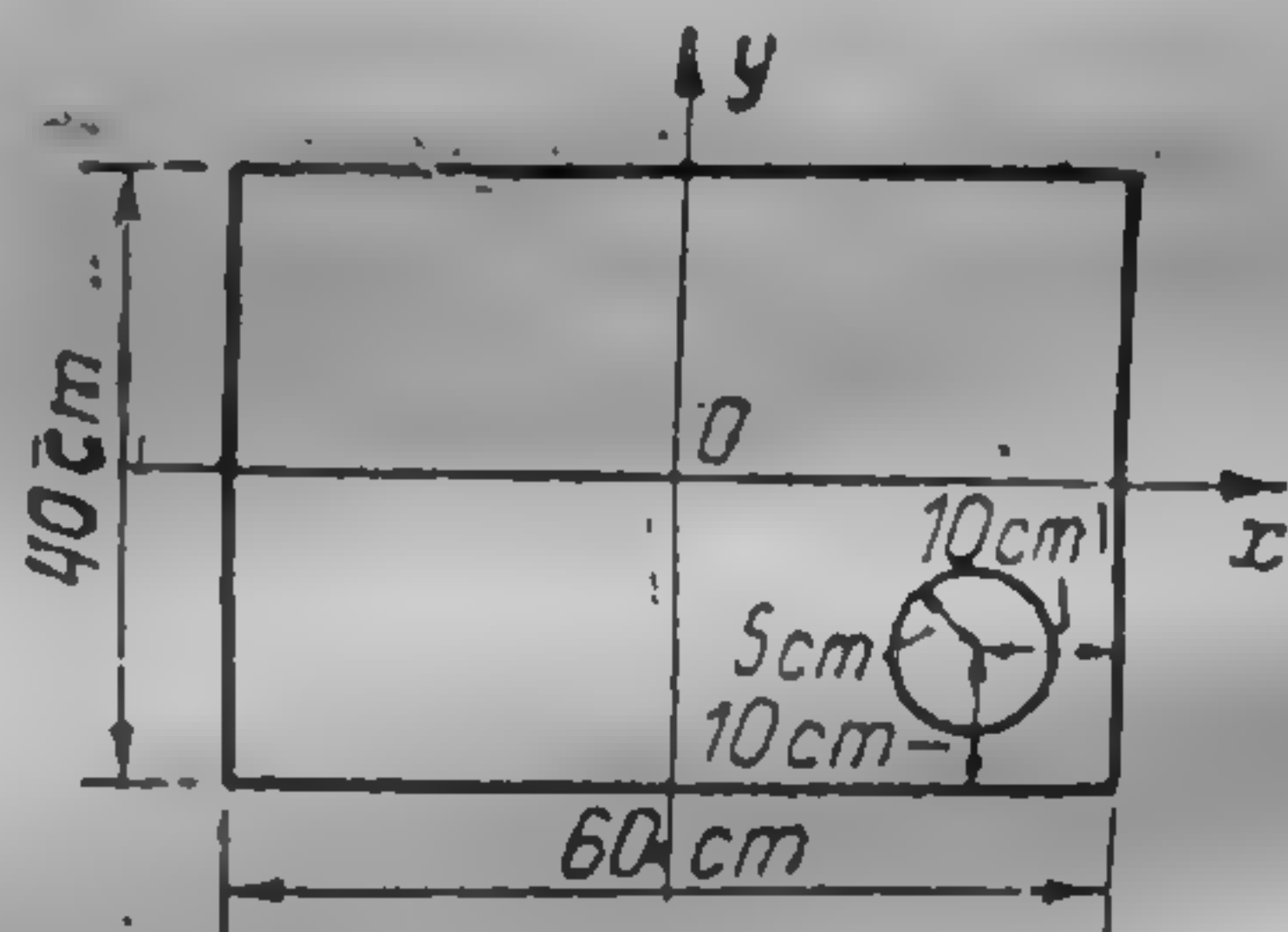


Fig. 69

figurii la găsirea numai a abscisei  $\xi$ . Este ușor de văzut că putem înlocui părțile 1, 2 și 3 ale figurii studiate, prin puncte echivalente și putem calcula coordonata  $\xi$  după formula (6.15). Să alegem originea axelor de coordonate astfel ca una din abscisele punctelor echivalente să fie zero, de exemplu, s-o alegem în centrul de greutate al dreptunghiului 2. Deoarece figura plană studiată este omogenă, putem simplifica în formula (6.15) cu densitatea și, având în vedere că  $\xi_2 = 0$ , vom obține:

$$\xi = \frac{\sigma_1 \xi_1 + \sigma_3 \xi_3}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}$$

Ținând seama de dimensiunile indicate pe desen, vom avea:

$$\sigma_1 = 16 \cdot 20, \quad \sigma_2 = 10 \cdot 24, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \pi 5^2,$$

$$\xi_1 = -(12 + 8) = -20, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 12 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 12 + \frac{20}{3\pi}.$$



Prin urmare, formula precedentă devine:

$$\xi = \frac{-16 \cdot 20 \cdot 20 + \frac{1}{2} \pi 5^2 \left(12 + \frac{20}{3\pi}\right)}{16 \cdot 20 + 10 \cdot 24 + \frac{1}{2} \pi 5^2}$$

sau

$$\xi = \frac{-16 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 6 + 25 (36\pi + 20)}{16 \cdot 20 \cdot 6 + 10 \cdot 24 \cdot 6 + 25 \cdot \pi \cdot 3}$$

De aici obținem:

$$\xi = \frac{(9\pi - 379) 20}{(5\pi + 224) 3}$$

sau

$$\xi = -9,75 \text{ cm.}$$

19. Să se găsească poziția centrului de greutate al unui dreptunghi omogen din care s-a tăiat o gaură rotundă (fig. 69). Laturile dreptunghiului sînt 60 și 40 cm, raza găurii este egală cu 5 cm și centrul găurii se găsește la cîte 10 cm de laturile dreptunghiului.

Aplicînd la această problemă metoda scăderii, trebuie să determinăm ambele coordonate  $\xi$  și  $\eta$ , deoarece, în această problemă nu există axă de simetrie. Luînd originea coordonatelor în centrul de greutate al dreptunghiului (pentru a elimina coordonatele  $\xi'$  și  $\eta'$ , ale centrului său de greutate) și simplificînd în formulele (6.16) cu densitatea, vom obține:

$$\xi = -\frac{\sigma_1 \xi_1}{\sigma' - \sigma_1}, \quad \eta = -\frac{\sigma_1 \eta_1}{\sigma' - \sigma_1}.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \sigma' &= 40 \cdot 60, & \sigma_1 &= \pi \cdot 5^2, \\ \xi_1 &= 20, & \eta_1 &= -10. \end{aligned}$$

În acest fel găsim

$$\xi = -\frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 20}{4 \cdot 60 - \pi \cdot 5^2}, \quad \eta = +\frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 10}{40 \cdot 60 - \pi \cdot 5^2}$$

adică

$$\xi = -\frac{20\pi}{96 - \pi}, \quad \eta = \frac{10\pi}{96 - \pi}$$

sau:

$$\xi = -0,68 \text{ cm}, \quad \eta = +0,34 \text{ cm.}$$

20. Să se găsească volumul și suprafața unui inel circular (tor) care rezultă din rotirea cercului de rază  $a$  în jurul axei  $\Delta$  care se află în planul acestui cerc la distanța  $R$  de centru (fig. 70).

Pentru calculul volumului vom aplica formula (6.22), și, deoarece avem:

$$\eta = R,$$

$$\sigma = \pi a^2,$$

atunci:

$$V = 2\pi^2 a^2 R.$$



Pentru a calcula suprafața vom aplica formula (6.21) la părțile dinăuntru și dinafară ale inelului; vom avea:

$$\sigma = 2\pi(R + \xi_0)\pi a + 2\pi(R - \xi_0)\pi a,$$

unde  $\xi_0$  este distanța centrului de greutate al semicercului pînă la centrul cercului. De aici găsim:

$$\sigma = 4\pi^2 a R.$$

21. Să considerăm o dreaptă neomogenă  $OA$ , a cărei lungime este  $l$ ; să luăm axa  $Ox$  de-a lungul acestei drepte (fig. 71). Să se afle poziția centrului de greutate al acestei drepte dacă se știe că  $\rho = \rho_0 - kx^\mu$  unde  $\rho_0, k, \mu$  sînt constante.

După prima din formulele (6.9) rezultă:

$$\xi = \frac{\int_0^l x \rho dx}{\int_0^l \rho dx} = \frac{\rho_0 \int_0^l x dx - k \int_0^l x^{\mu+1} dx}{\rho_0 \int_0^l dx - k \int_0^l x^\mu dx}$$

Calculînd aceste integrale definite vom obține:

$$\xi = \frac{\frac{\rho_0 l^2}{2} - \frac{k}{\mu+2} l^{\mu+2}}{\rho_0 l - \frac{k}{\mu+1} l^{\mu+1}}, \text{ sau: } \xi = \frac{l}{2} \frac{\rho_0 - \frac{2k}{\mu+2} l^\mu}{\rho_0 - \frac{k}{\mu+1} l^\mu}.$$

Această formulă poate fi utilizată pentru găsirea centrului de greutate al unui trunchi de copac.

22. Fie dat solidul compus dintr-un cilindru de rază  $R$  și înălțime  $2a$  și un cilindru coaxial de rază  $r$  și înălțime  $2b$  (fig. 72). Acești doi cilindri

sînt confecționați din același material care are densitatea  $\rho$ .  $C_1$  este centrul de greutate al primului cilindru și  $O$  este centrul de greutate al celui de-al doilea cilindru. În partea dreaptă a cilindrului este turnat un dop cilindric coaxial cu el cu densitatea  $\rho_2 (\rho_2 > \rho)$  cu raza egală cu  $r_2$ . Să se afle înălți-

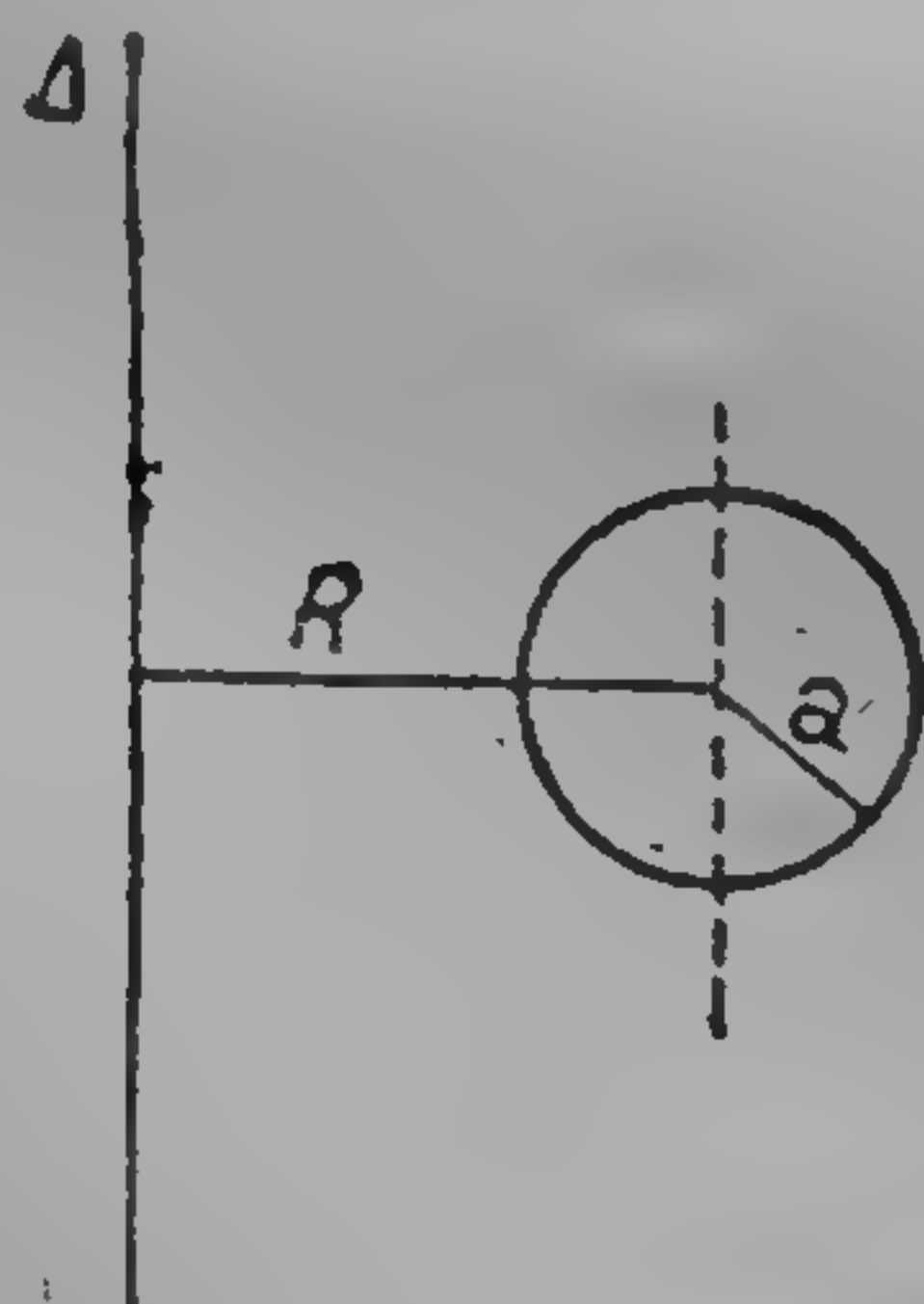


Fig. 70



Fig. 71

mea  $2h$  a acestui dop cilindric, astfel ca centrul de greutate al întregului sistem să se găsească în punctul  $C$  situat la dreapta punctului  $O$ , unde abscisa  $\xi_0 = OC$  este dată.



Pentru rezolvarea problemei vom considera sistemul dat format din cei doi cilindri și din dopul cilindric cu densitatea  $\rho_2 - \rho$ , și vom lua originea coordonatelor în punctul  $O$ . Este evident că centrul de greutate al sistemului

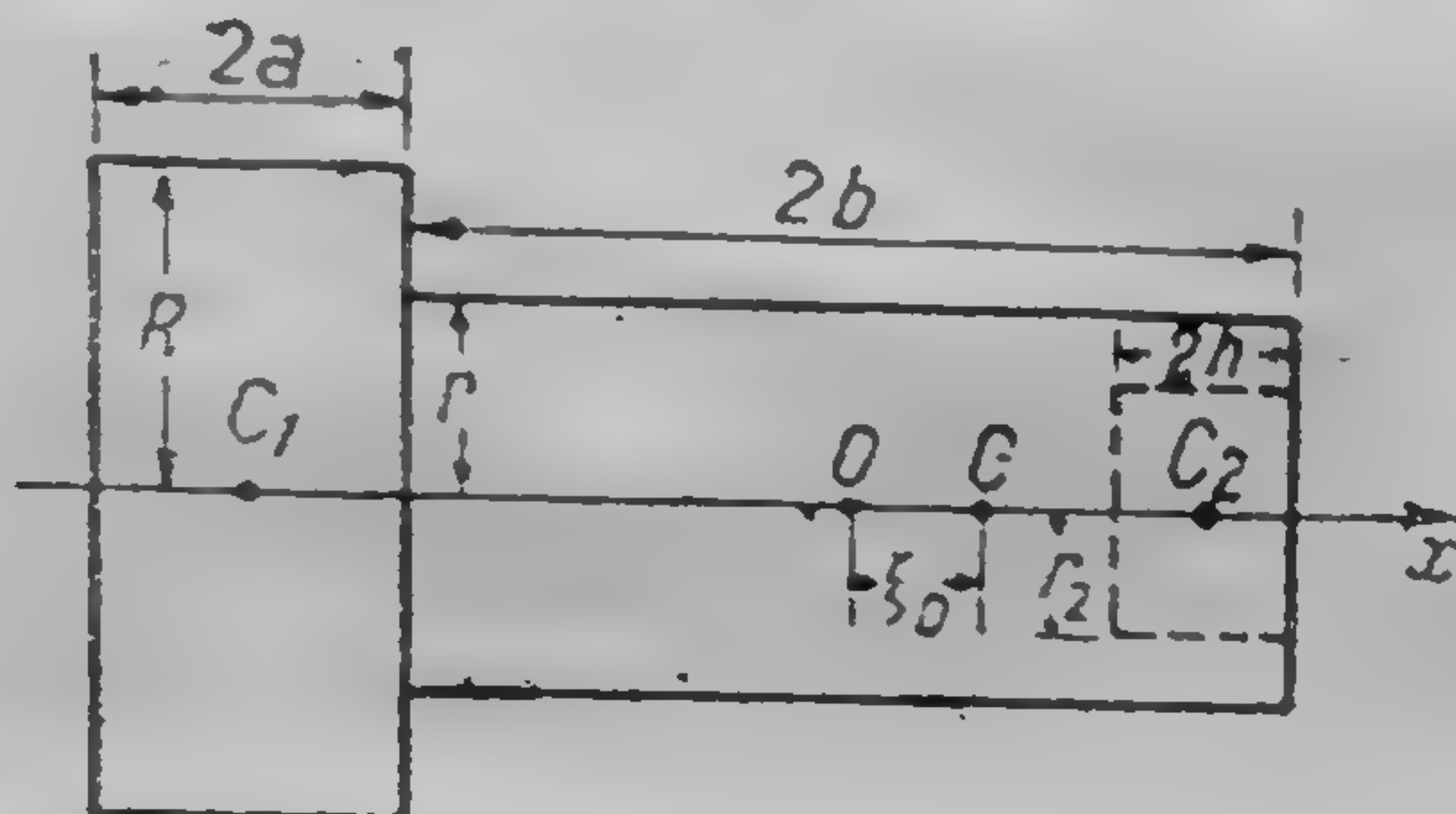


Fig. 72

trebuie să se afle pe axa de simetrie  $Ox$  care trece prin punctele  $C_1$ ,  $O$ ,  $C$  și  $C_2$ , unde  $C_2$  este centrul de greutate al dopului turnat. Avem:

$$(\text{primul cilindru}) \quad M_1 = 2\pi R^2 a \rho, \quad \xi_1 = -(a+b);$$

$$(\text{al doilea cilindru}) \quad M = 2\pi r^2 b \rho, \quad \xi = 0;$$

$$(\text{dop}) \quad M_2 = 2\pi r^2 h (\rho_2 - \rho), \quad \xi_2 = b-h.$$

Aplicînd formula (6.15) obținem:

$$\xi_0 = \frac{M_1 \xi_1 + M \xi + M_2 \xi_2}{M_1 + M + M_2},$$

sau:

$$\xi_0 = \frac{\xi + \frac{M_2}{M_1} \xi_2}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M_2}{M_1}}.$$

Introducînd aici valorile date mai sus pentru mase și coordonate, vom avea:

$$\xi_0 = \frac{-(a+b) + \frac{r^2}{R^2} \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \frac{h}{a} (b-h)}{1 + \frac{r^2}{R^2} \frac{b}{a} + \frac{r^2}{R^2} \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \frac{h}{a}}.$$

Presupunem pentru simplificare:

$$\frac{r^2}{R^2} \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \frac{1}{a} = n, \quad \frac{r^2}{R^2} \frac{b}{a} = k;$$

atunci:

$$\xi_0 = \frac{-(a+b) + nh(b-h)}{1+k+nh}.$$



De aici obținem pentru  $h$  ecuația de gradul doi

$$h^2 - (b - \xi_0)h + \frac{a + b + (1 + k)\xi_0}{n} = 0,$$

de unde găsim:

$$h = \frac{b - \xi_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b - \xi_0}{2}\right)^2 - \frac{a + b + (1 + k)\xi_0}{n}}.$$

Prin urmare, lungimea dopului cilindrului va fi:

$$2h = b - \xi_0 \pm \sqrt{(b - \xi_0)^2 - \frac{4a + 4b + 4(1 + k)\xi_0}{n}}.$$

Existența a două valori pentru lungimea  $h$  se explică ușor.

În adevăr, în loc de dopul cilindrului cu lungimea  $2h < b$  arătată în fig. 72, se poate lua un dop, al cărui capăt se găsește în stînga punctului  $C$ , distanța de la punctul  $C$  la capătul dopului fiind egală cu distanța de la punctul  $C$  la primul dop. Să notăm această distanță prin  $d$ ; în cazul figurii 72 vom avea:

$$\xi_0 + d + 2h = b,$$

adică

$$2h = b - \xi_0 - d.$$

Este ușor să ne convingem geometric că în cazul cînd capătul dopului se va găsi în stînga punctului  $C$  atunci

$$2h = b - \xi_0 + d.$$

Astfel, existența celor două soluții este justificată și se dă chiar o interpretare fizică a rădăcinii pătrate ce intervine în expresia lui  $2h$ , și anume:

$$d = \sqrt{(b - \xi_0)^2 - \frac{4a + 4b + 4(1 + k)\xi_0}{n}}.$$

Nu vom analiza cazurile nerezolvabile.

23. Se dă parabola  $y^2 = 2px$ , raportată la un sistem ortogonal de coordonate  $Oxy$ . În punctul  $C$  axa  $Ox$  se intersectează cu coarda  $AB$  a parabolei perpendiculară pe axa  $Ox$  și situată la distanța  $OC = h$ , de la vârful  $O$ . Să se găsească centrul de greutate al segmentului  $OACBO$  al parabolei, presupunîndu-l omogen. Deoarece centrul de greutate căutat se află pe axa de simetrie  $Ox$  a parabolei, pentru găsirea lui este suficient să cunoaștem abscisa lui  $\xi$ , care se determină din formula:

$$\xi = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\sigma}$$



de la sfârșitul § 28. Reprezentînd elementul de suprafață  $d\sigma$  al parabolei prin:  $2y dx = 2\sqrt{2px} dx = 2\sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}} dx$ , vom înlocui integralele duble cu integrale simple și vom obține:

$$\sigma = 2\sqrt{2p} \int_0^h x^{\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2p} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{2ph} \cdot h,$$

$$\iint x d\sigma = 2\sqrt{2p} \int_0^h x^{\frac{3}{2}} dx = 2\sqrt{2p} \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \sqrt{2ph} \cdot h^2.$$

De aici, pentru coordonata  $\xi$ , găsim:

$$\xi = \frac{\frac{4}{5} \sqrt{2ph} \cdot h^2}{\frac{4}{3} \sqrt{2ph} \cdot h} = \frac{3}{5} h = 0,6 h.$$

Dacă vîrful  $O$  se unește cu capetele  $A$  și  $B$  ale coardei  $AB$  prin dreptele  $OA$  și  $OB$ , atunci triunghiul isoscel obținut  $AOB$  va avea centrul său de greutate, de asemenea, pe axa  $Ox$  la o distanță de  $\frac{2}{3} h$  de la punctul  $O$ . Prin urmare, centrul de greutate al segmentului de parabolă va fi mai aproape de punctul  $O$  decît centrul de greutate al triunghiului isoscel considerat, așa cum era de așteptat, și distanța dintre ambele centre de greutate va fi egală cu  $\frac{2}{3} h - \frac{3}{5} h = \frac{1}{15} h$ .



## CAPITOLUL VII

### ECHILIBRUL FORTELOR PARALELE

§ 33. Ecuatiile de echilibru. Fiind dat un sistem de forțe paralele aplicate unui solid rigid, știm că aplicînd succesiv teorema compunerii forțelor paralele dirijate în același sens și teorema compunerii forțelor antiparalele, sistemul de forțe considerat se reduce, fie la o rezultantă, fie la un cuplu. Determinarea pe cale geometrică a cazului care are loc nu întîmpină dificultăți. Ca să dăm o rezolvare analitică a acestei probleme, să facem mai întîi cîteva observații. Fie dat sistemul de forțe paralele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ , al căror moment resultant în raport cu un punct oarecare din spațiu este egal cu  $\vec{M}$ . Presupunem că în conformitate cu teoremele compunerii forțelor paralele vom înlocui cîteva forțe ale sistemului dat, prin rezultanta lor  $\vec{F}'$ ; fie  $C'$  punctul de aplicare al forței  $\vec{F}'$ , iar vectorul  $\vec{OC}' = \vec{p}'$ .

Nu este greu de observat că prin această înlocuire a cîtorva forțe cu o singură rezultantă a lor  $\vec{F}'$  momentul resultant al sistemului nu se poate schimba, deoarece conform teoremei lui Varignon momentul  $\vec{p}' \times \vec{F}'$  al forței  $\vec{F}'$  este egal cu suma momentelor forțelor componente și toate aceste momente ale componentelor intră în expresia momentului resultant  $\vec{M}$ . De aici urmează că, dacă sistemul de forțe paralele se reduce la un cuplu de forțe, atunci momentul cuplului este egal cu momentul resultant al acestui sistem de forțe paralele.

Să trecem acum la determinarea ecuațiilor de echilibru ale sistemului de forțe paralele. În primul rînd acest sistem de forțe nu trebuie să aibă rezultantă, adică trebuie ca  $\sum_n F_n = 0$ , unde  $F_n$  sînt mărimi algebrice. În acest caz, conform formulei (5.16) momentul resultant al sistemului trebuie să fie constant pentru toate punctele din spațiu, deci sistemul de forțe se poate reduce la un cuplu cu momentul egal cu momentul resultant al sistemului. Pentru a nu avea cuplul de forțe, momentul resultant



$\bar{M} = \sum_n \bar{M}_n$  al sistemului trebuie să fie egal cu zero. Astfel, ecuațiile de echilibru ale sistemului de forțe paralele, în formă vectorială, au următoarea expresie:

$$\sum_n \bar{F}_n = 0, \quad \sum_n \bar{M}_n = 0. \quad (7.1)$$

Deoarece forțele  $\bar{F}_n$  sînt paralele, toți vectorii  $\bar{M}_n$  avînd punctul de aplicație în punctul  $O$  se vor găsi într-un plan care trece prin punctul  $O$  și este perpendicular pe direcția forțelor  $\bar{F}_n$ . Pentru a obține ecuațiile de echilibru sub formă analitică, vom alege un sistem ortogonal de axe de coordonate  $Oxyz$ , a cărui axă  $Oz$  va fi paralelă cu forțele  $\bar{F}_n$ ; deoarece proiecțiile tuturor forțelor pe axele  $Ox$  și  $Oy$  vor fi egale cu zero, din cele trei ecuații de proiecții:

$$\sum_n X_n = 0, \quad \sum_n Y_n = 0, \quad \sum_n Z_n = 0$$

primele două se vor transforma în identități, iar a treia va deveni  $\sum_n F_n = 0$ . Din cele trei ecuații de momente:

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0$$

ultima se va transforma într-o identitate deoarece toate forțele sînt paralele cu axa  $Oz$ , iar primele două:

$$M_x = \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) = 0, \quad M_y = \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) = 0$$

vor avea forma:

$$\sum_n y_n F_n = 0, \quad \sum_n x_n F_n = 0.$$

Astfel, obținem următoarele trei ecuații de echilibru sub formă analitică

$$\sum_n F_n = 0, \quad \sum_n x_n F_n = 0, \quad \sum_n y_n F_n = 0, \quad (7.2)$$

axa  $Oz$  coîncizînd cu unul din cele două sensuri ale forțelor  $\bar{F}_n$ ; condițiile exprimate prin ecuațiile (7.2) sînt condiții necesare și suficiente. Deoarece ecuațiile de echilibru sînt numai în număr de trei, orice probleme de echilibru a forțelor paralele care conțin mai mult decît trei reacțiuni, va fi o problemă static nedeterminată.



§ 34. Exemple. 24. O grindă de greutate  $P$  este așezată pe două reazeme  $A_1$  și  $A_2$ ; în punctele  $A$  și  $B$  ale grinzii acționează forțele  $\bar{P}_1$  și  $\bar{P}_2$ ; să se determine reacțiunile  $\bar{R}_1$  și  $\bar{R}_2$  din reazeme (fig. 73).

Deoarece grinda nu este articulată în reazemele  $A_1$  și  $A_2$ , neglijând frecarea, vom admite că forțele  $\bar{R}_1$  și  $\bar{R}_2$  sînt normale la grindă. Se dă  $A_1A_2=2l$ ,  $A_1C=l$ ,  $CA=a$ ,  $AB=b$ . Alegem axa  $z$  normal pe grindă în sensul reacțiunii reazemelor, axa  $y$  de-a lungul grinzii și originea coordonatelor, o vom alege în punctul  $A_1$ , pentru a elimina din ecuația momentelor momentul forței  $\bar{R}_1$ . Din ecuațiile (7.2) rămîn ecuațiile:

$$\sum_n F_n = 0, \quad \sum_n y_n F_n = 0.$$

Aplicate la problema noastră, ele capătă forma:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 - P - P_1 - P_2 &= 0, \\ R_2 2l - Pl - P_1(l+a) - P_2(l+a+b) &= 0. \end{aligned}$$

Din ecuația a doua avem:

$$R_2 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P_1\left(1 + \frac{a}{l}\right) + \frac{1}{2}P_2\left(1 + \frac{a}{l} + \frac{b}{l}\right).$$

Introducînd această valoare a lui  $R_2$  în prima ecuație, avem:

$$R_1 = P + P_1 + P_2 - \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P_1\left(1 + \frac{a}{l}\right) - \frac{1}{2}P_2\left(1 + \frac{a}{l} + \frac{b}{l}\right),$$

sau:

$$R_1 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P_1\left(1 - \frac{a}{l}\right) + \frac{1}{2}P_2\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{b}{l}\right).$$

Metoda de rezolvare poate fi simplificată, făcînd ca fiecare ecuație de echilibru să conțină numai cîte o singură reacțiune necunoscută. Pentru aceasta vom raționa în felul următor: Vom pune condiția ca momentul resultant al sistemului de forțe în raport cu punctul  $A_1$  să fie egal cu zero; această condiție este echivalentă cu condiția ca să nu existe cuplu. S-ar putea însă ca să existe o resultantă care trece prin punctul  $A_1$  al cărui moment în raport cu punctul  $A_1$  ar fi egal cu zero. Vom pune apoi condiția ca momentul resultant al sistemului de forțe, în raport cu punctul  $A_2$  să fie

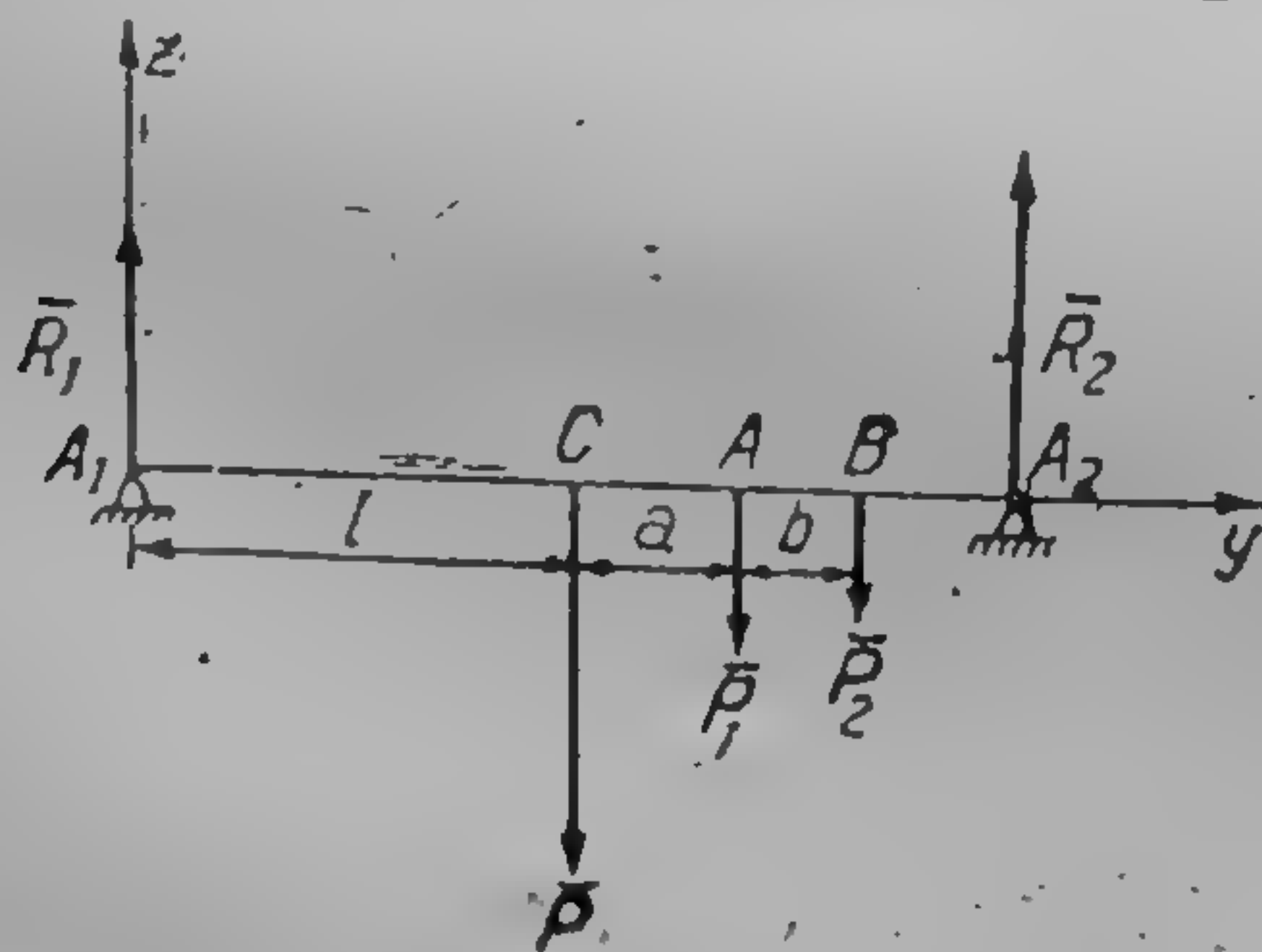


Fig. 73

de asemenea egal cu zero. Deoarece rezultanta care trebuie să fie perpendiculară pe grindă nu poate să treacă concomitent prin punctele  $A_1$  și  $A_2$ ,



această rezultantă trebuie să fie egală cu zero și grinda este în echilibru. Scriind aceste două ecuații de momente, vom avea:

$$+R_2 2l - Pl - P_1(l+a) - P_2(l+a+b) = 0,$$

$$-R_1 2l + Pl + P_1(l-a) + P_2(l-a-b) = 0;$$

vedem că în fiecare din ecuațiile precedente intervine numai câte una din reacțiunile necunoscute  $R_1$  și  $R_2$ . Determinînd de aici mărimile  $R_1$  și  $R_2$  ajungem la valorile găsite anterior.

25. Să se determine reacțiunile  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$  și  $\bar{R}_3$  care apar pe cele trei picioare ale unei mese grele care se găsește în repaus pe o pardoseală orizontală lucie (fig. 74).

Luăm un sistem ortogonal de axe de coordonate  $Oxyz$ , astfel încît planul  $Oxy$  coincide cu planul pardoselii iar axa  $Oz$  este dirijată după verticală în sus. Notăm coordonatele capetelor picioarelor mesei  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$

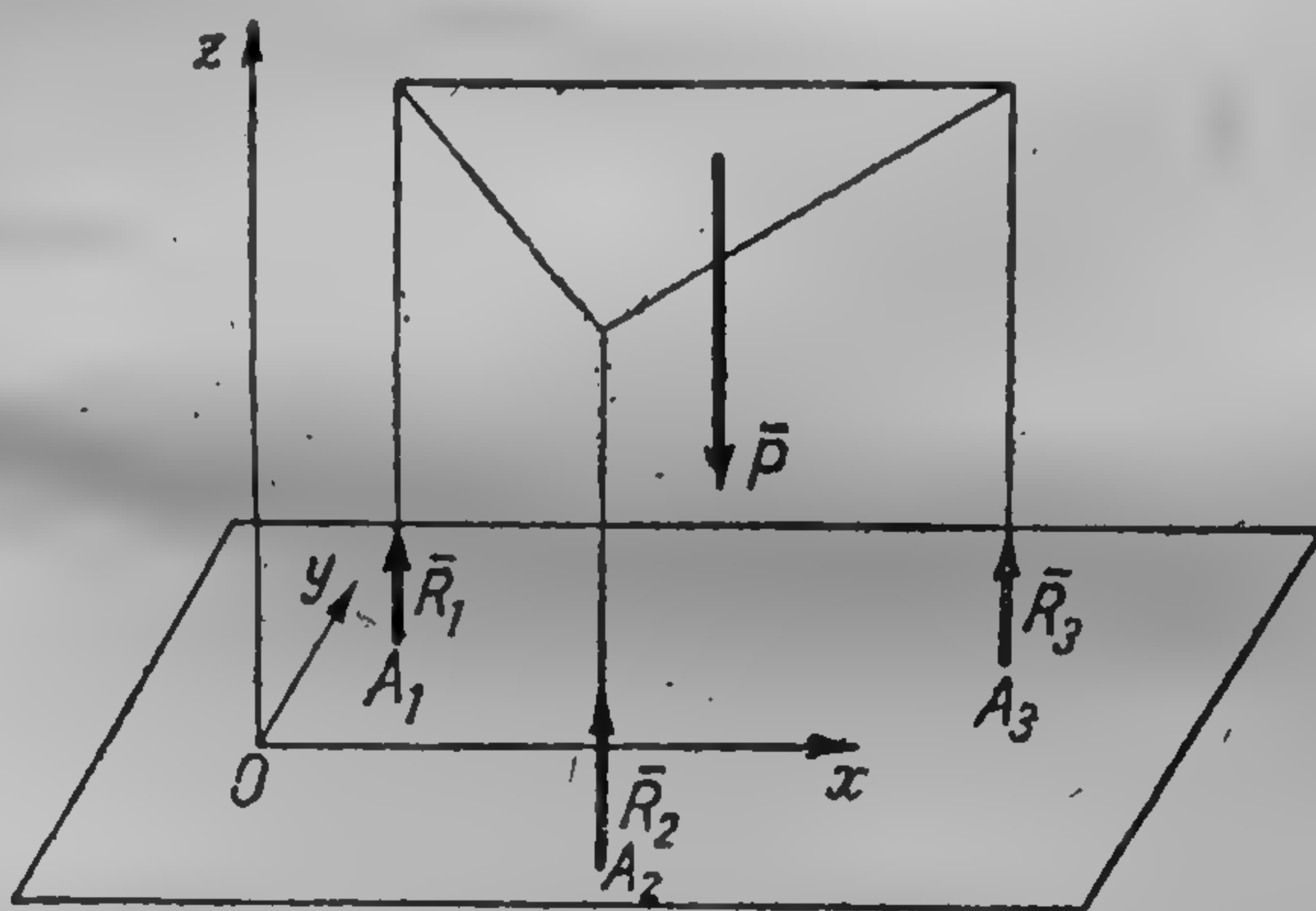


Fig. 74

prin  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , iar coordonatele centrului de greutate  $C$  în care se aplică greutatea  $\bar{P}$  a mesei prin  $(x, y, z)$ . Deoarece nu există frecare, rezultă că reacțiunile  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$ ,  $\bar{R}_3$  trebuie să fie normale pe planul pardoselii, adică paralele la axa  $Oz$ . Aplicînd ecuațiile (7.2), obținem:

$$R_1 + R_2 + R_3 - P = 0,$$

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 - xP = 0,$$

$$y_1 R_1 + y_2 R_2 + y_3 R_3 - yP = 0,$$

sau:

$$R_1 + R_2 + R_3 = P,$$

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 = xP,$$

$$y_1 R_1 + y_2 R_2 + y_3 R_3 = yP.$$

Din aceste trei ecuații de gradul întâi cu trei necunoscute vom determina valoarea acestor necunoscute.



26. Să se determine reacțiunile  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$ ,  $\bar{R}_3$  și  $\bar{R}_4$  pe cele patru picioare ale unei mese dreptunghiulare grele, care se găsește în repaus pe o pardoseală orizontală lucie (fig. 75):

Presupunem că distanțele între picioarele mesei sînt respectiv egale cu  $2a$  și  $2b$  și că greutatea mesei aplicată în punctul  $C$  este egală cu  $P$ . Luăm axe de coordonate cum se arată în fig. 75, axa  $Oz$  dirijată pe

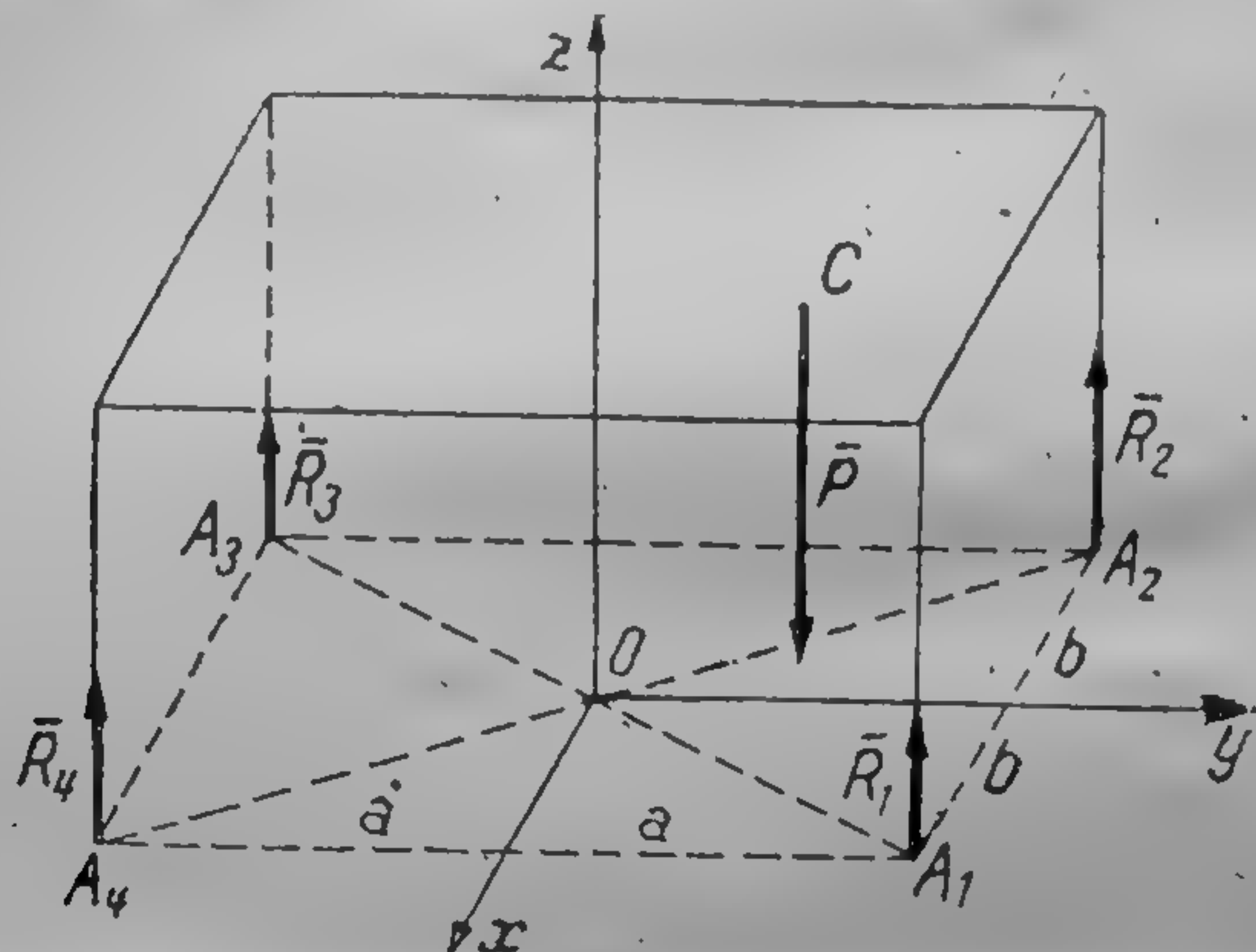


Fig. 75

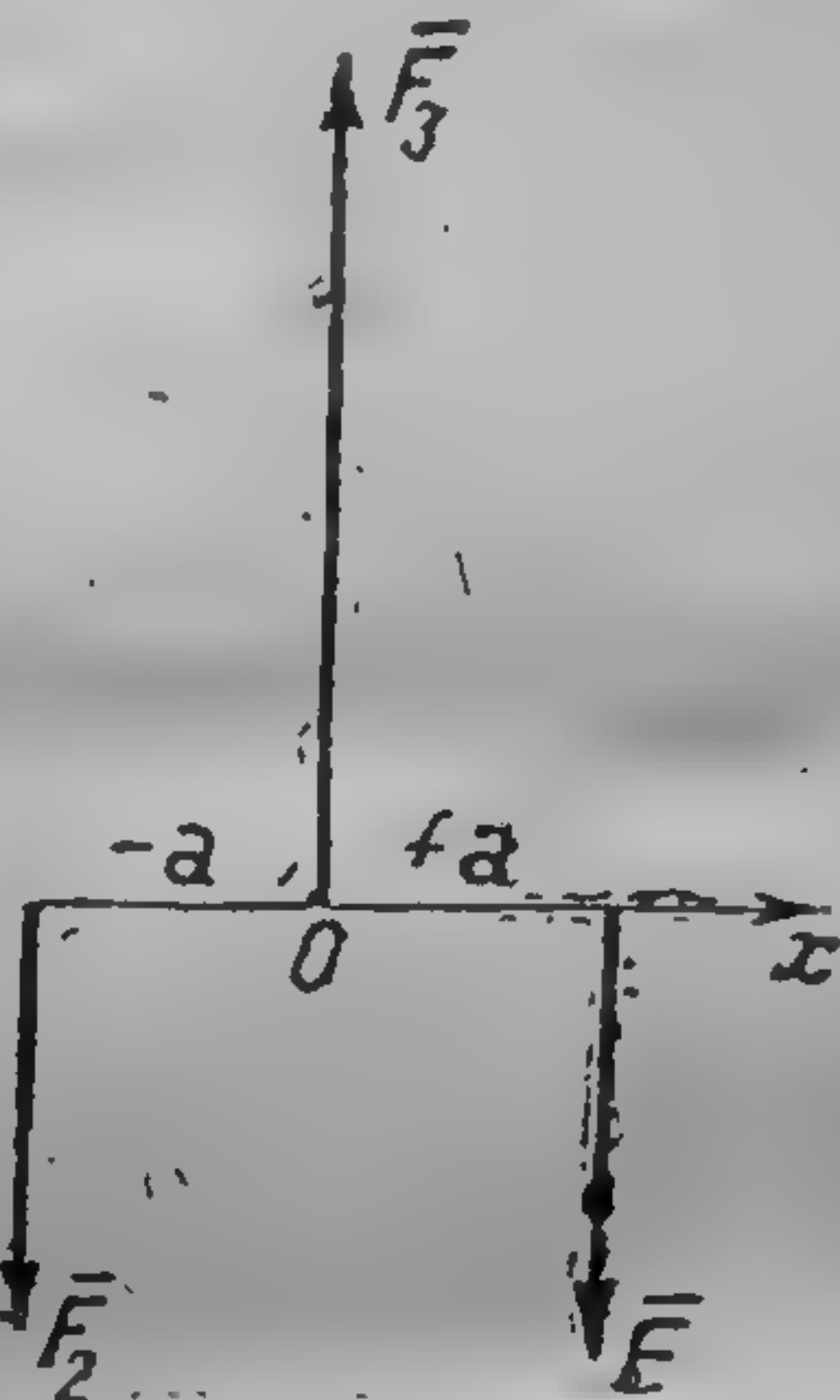


Fig. 76

verticală în sus, axa  $Ox$  paralelă cu dreapta  $A_1A_2$ , axa  $Oy$  paralelă cu dreapta  $A_4A_1$  și originea coordonatelor  $O$ , în punctul de intersecție al dreptelor  $A_1A_3$  și  $A_2A_4$ .

Coordonatele capetelor picioarelor vor fi:  $A_1(b, a)$ ,  $A_2(-b, a)$ ,  $A_3(-b, -a)$ ,  $A_4(b, -a)$ .

Notăm coordonatele punctului  $C$  prin  $(x, y, z)$ . Din cauză că nu există frecare, reacțiunile  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  sînt normale la pardoseală, adică sînt paralele cu axa  $Oz$ . Din ecuațiile (7.2) avem:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - P = 0,$$

$$bR_1 + bR_2 - bR_3 + bR_4 - xP = 0,$$

$$-aR_1 + aR_2 - aR_3 - aR_4 - yP = 0.$$

După cum era de așteptat, conform indicației de la sfîrșitul § 33, această problemă va fi static nedeterminată. Dacă ținem însă seama de deformațiile elastice ale pardoselii, se poate obține o ecuație suplimentară. Să presupunem că picioarele  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  ale mesei deformează pardoseala, iar deplasările lor în jos  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ ,  $\epsilon_4$  sînt proporționale cu presiunea pe pardoseală, adică:

$$\epsilon_1 = kR_1,$$

$$\epsilon_2 = kR_2,$$

$$\epsilon_3 = kR_3,$$

$$\epsilon_4 = kR_4.$$

(presupunem că proprietățile elastice ale pardoselii sînt aceleași în dreptul tuturor picioarelor). Presupunem că după deformarea pardoselii, punctele



$A_1, A_2, A_3, A_4$  vor ocupa pozițiile  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$ , iar cele patru puncte  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  vor fi situate din nou în același plan.

Să examinăm diagonala  $A_1A_3$ ; după deformație ea va ocupa poziția  $A'_1A'_3$ , iar punctul  $O$  se va deplasa în poziția  $O'$  la distanța  $s=OO'$ , unde

$$s = \frac{s_1 + s_3}{2}$$

este lungimea unui segment ce unește mijloacele laturilor trapezului  $A_1A_3A'_3A'_1$ . Exact la fel, pornind de la trapezul  $A_2A_4A'_4A'_2$  vom obține:

$$s = \frac{s_2 + s_4}{2}$$

De aici vom avea:

$$s_1 + s_3 = s_2 + s_4,$$

sau:

$$R_1 - R_2 + R_3 - R_4 = 0.$$

Sistemul de ecuații care rezolvă problema este:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = P,$$

$$R_1 - R_2 - R_3 + R_4 = P \frac{x}{b},$$

$$R_1 + R_2 - R_3 - R_4 = P \frac{y}{a},$$

$$R_1 - R_2 + R_3 - R_4 = 0.$$

Rezolvând aceste ecuații, găsim:

$$R_1 = \frac{1}{4}P \left( 1 + \frac{x}{b} + \frac{y}{a} \right), \quad R_2 = \frac{1}{4}P \left( 1 - \frac{x}{b} + \frac{y}{a} \right),$$

$$R_3 = \frac{1}{4}P \left( 1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{a} \right), \quad R_4 = \frac{1}{4}P \left( 1 + \frac{x}{b} - \frac{y}{a} \right).$$

Vedem că ținând seamă de proprietățile elastice ale legăturilor, am putut determina toate reacțiunile, așa cum s-a arătat în § 17 cap. III.

27. Să demonstrăm că sistemul forțelor paralele  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  se găsește în echilibru, dacă avem:

$$F_1 = F_2 = P, \quad F_3 = -2P;$$

$$x_1 = +a, \quad x_2 = -a, \quad x_3 = 0;$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0;$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0.$$

Acest caz este reprezentat în fig. 76.

Aplicând formulele (5.14), vedem că ele sînt satisfăcute, adică sistemul forțelor date se găsește în adevăr în echilibru. Evident, că forțele  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  prin compunere dau o rezultantă care trece prin punctul  $O$  și se echilibrează cu forța  $\bar{F}_3$ .



## CAPITOLUL VIII

### TEORIA CUPLURILOR

§ 35. Echivalența cuplurilor. Să considerăm un cuplu oarecare format din două forțe al căror modul este egal cu  $F$  aplicat unui solid rigid; vom folosi uneori pentru prescurtare notația convențională  $(\vec{F}, -\vec{F})$ . Deoarece într-un solid absolut rigid

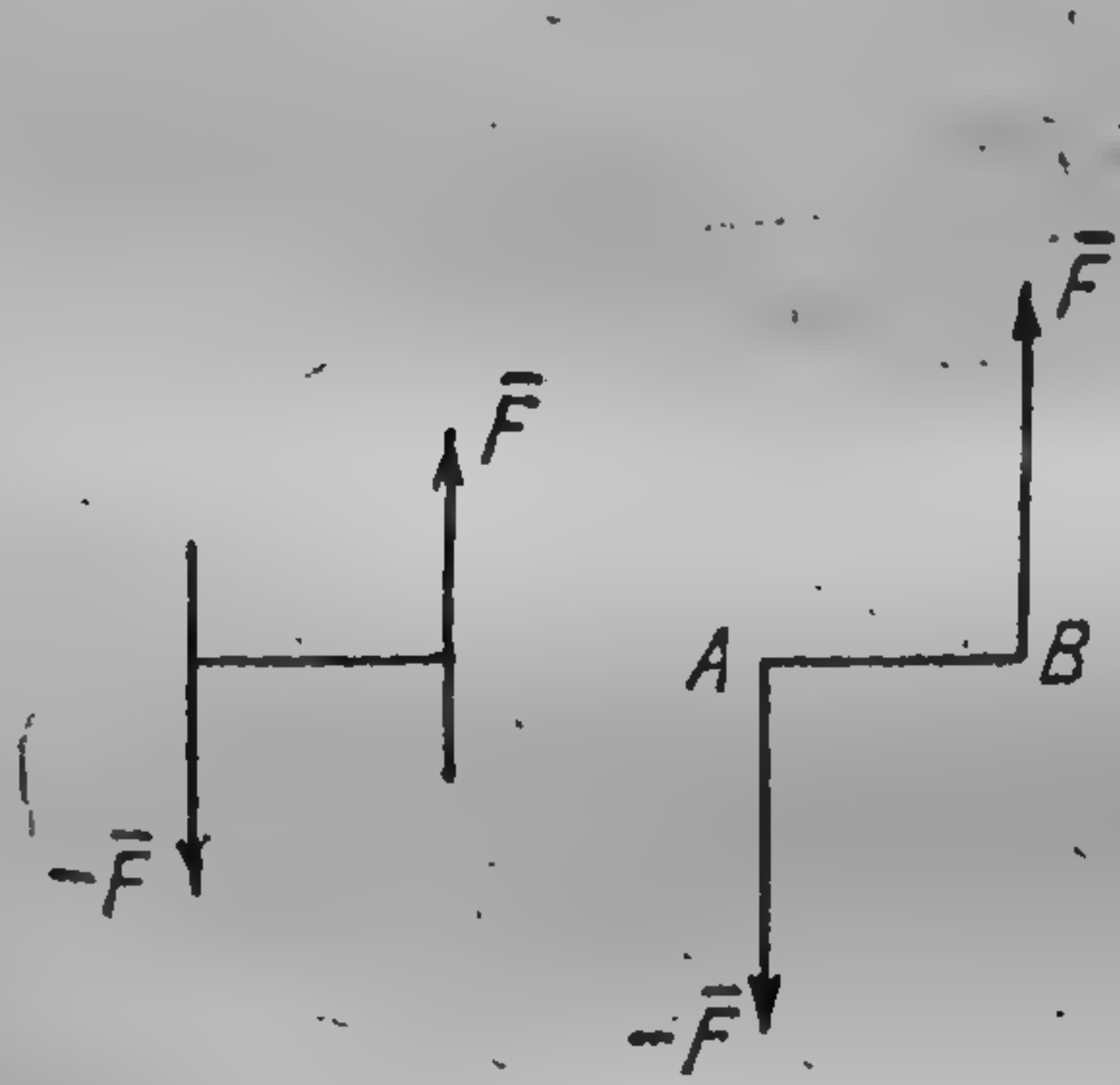


Fig. 77

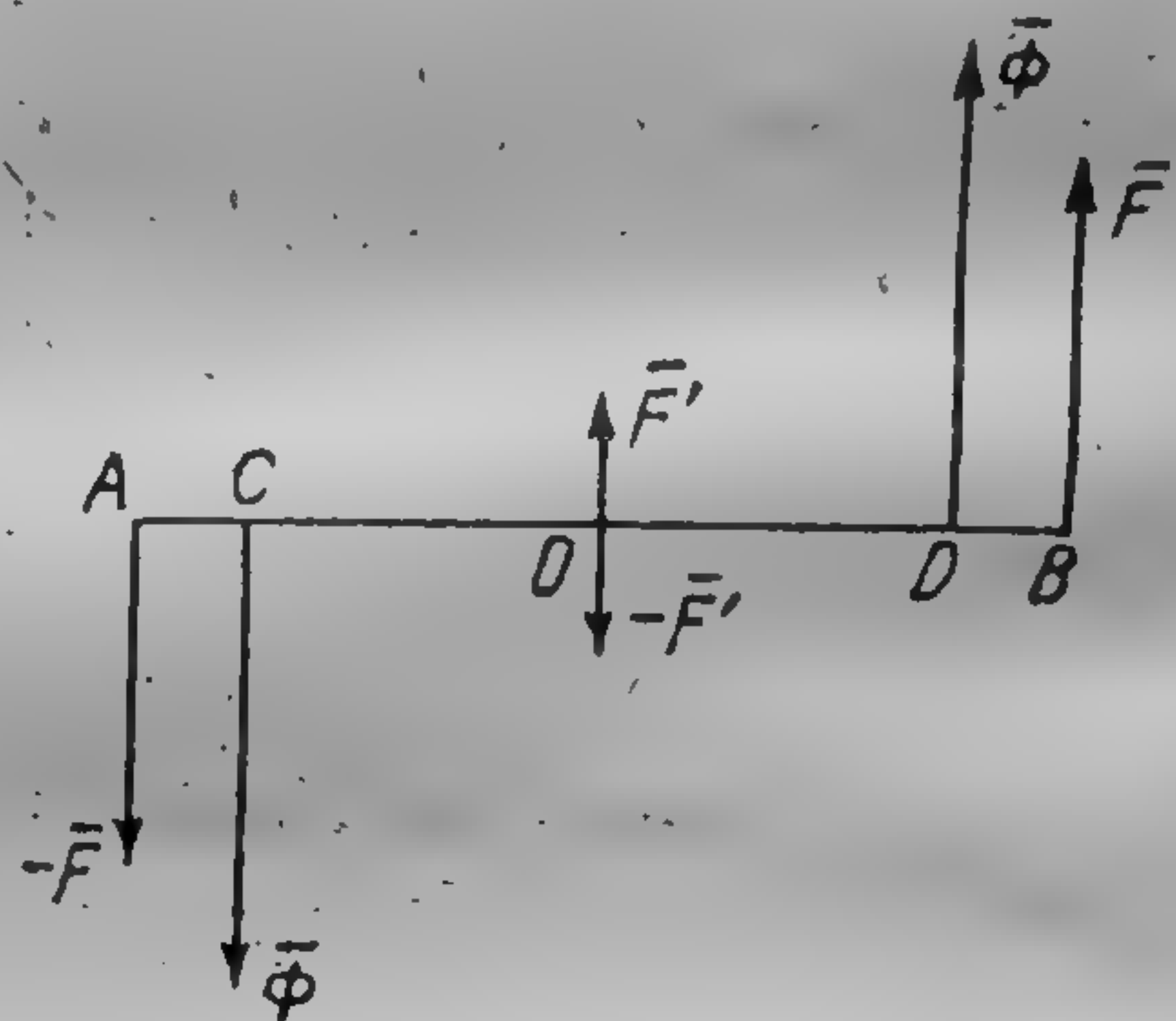


Fig. 78

forțele pot fi mutate de-a lungul suporturilor lor, se poate face totdeauna ca forțele ce alcătuiesc cuplul să fie aplicate la extremitățile brațului  $AB$ , așa cum se vede în fig. 77. În acest capitol vom presupune totdeauna cuplul redus la această formă. Să demonstrăm câteva teoreme privind cuplurile.

1. *Futem modifica modulul forțelor cuplului și lungimea brațului cuplului astfel încât momentul cuplului să rămână neschimbat.* Fie cuplul  $(\vec{F}, -\vec{F})$  cu brațul  $AB$  (fig. 78), să transformăm cuplul într-un cuplu având modulul forțelor  $\Phi$ ; presupunem de exemplu  $\Phi > F$ . Aplicăm în mijlocul  $O$  al brațului  $AB$  două forțe egale și de sens contrar  $\vec{F}'$  și  $-\vec{F}'$  paralele la forța  $\vec{F}$ , cu modulul  $F' = \Phi - F$ . Compunând forțele  $F$  și  $\vec{F}'$  și apoi forțele  $-\vec{F}$



și  $-\bar{F}'$ , vom obține cuplul  $(\Phi, -\Phi)$  cu brațul  $CD$ . Din teorema compunerii forțelor paralele dirijate în același sens, se știe că trebuie să avem:

$$\frac{OD}{DB} = \frac{F}{F'} = \frac{F}{\Phi - F}.$$

De aici găsim:

$$OD \cdot (\Phi - F) = DB \cdot F,$$

sau

$$OD \cdot \Phi = OD \cdot F + DB \cdot F = OB \cdot F.$$

Înmulțind ambele părți ale acestei egalități cu 2, obținem:

$$\Phi \cdot CD = F \cdot AB,$$

adică momentul cuplului a rămas același. Astfel teorema este demonstrată. Reciproc este evident că se poate alege o lungime nouă a brațului cuplului schimbând modulul forțelor astfel încât momentul cuplului să rămână același.

2. Cuplul poate fi deplasat paralel cu el însuși. Fie cuplul  $(\bar{F}, -\bar{F})$  situat în planul  $\pi$ . Să presupunem că vrem să transpor-

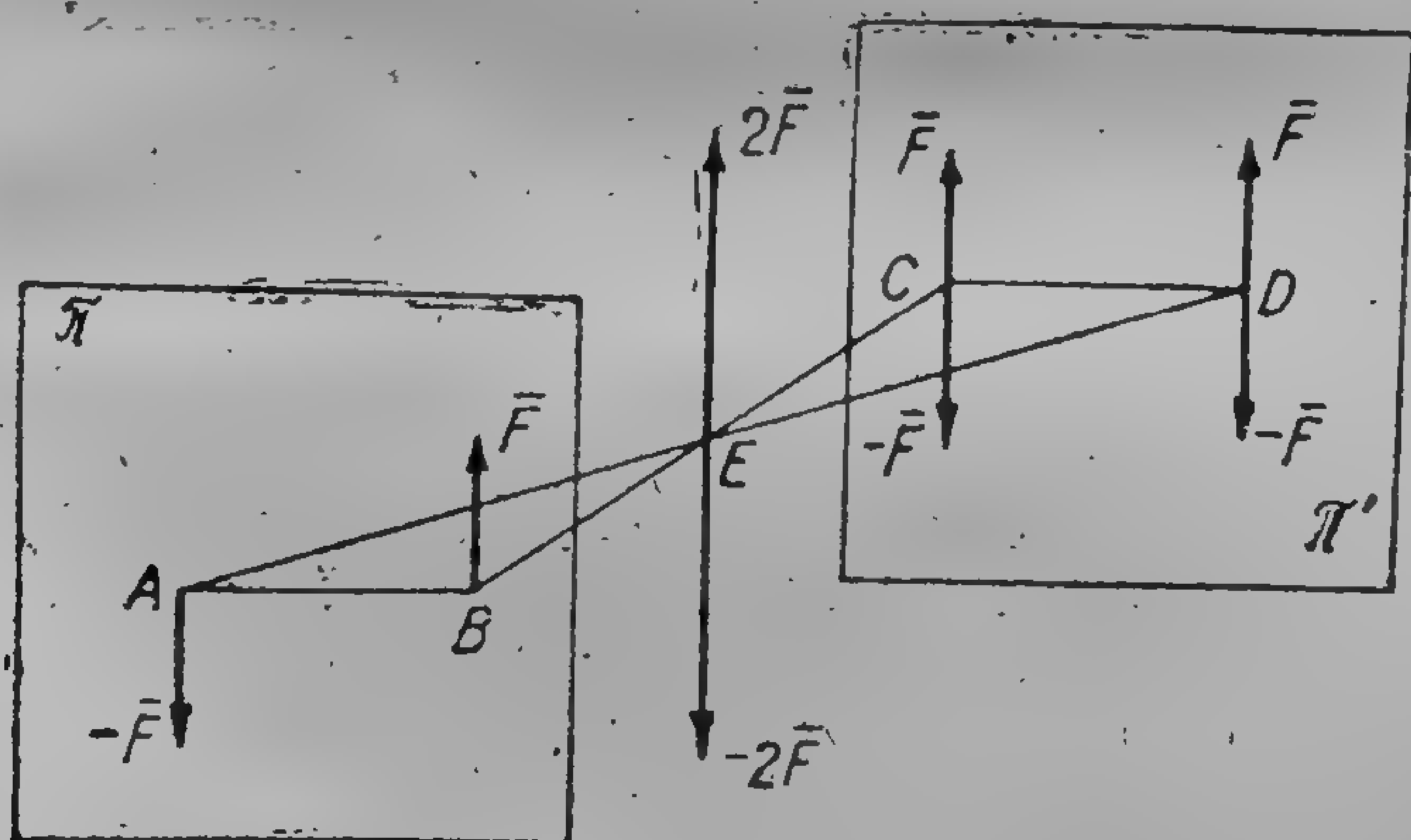


Fig. 79.

tăm acest cuplu în planul  $\pi'$  iar  $\pi' \parallel \pi$  (fig. 79). Să ducem în planul  $\pi'$  dreapta  $CD \parallel AB$  și să aplicăm în punctele  $C$  și  $D$  câte două forțe egale și de sens contrar având modulul  $F$  și perpendiculare pe  $CD$ . Deoarece  $CD \parallel AB$ , dreptele  $BC$  și  $AD$ , ca diagonale ale unui paralelogram, se intersectează într-un punct  $E$  împărțindu-se în două părți egale. Este evident că cele două forțe paralele  $\bar{F}$  aplicate în punctele  $B$  și  $C$  vor da în punctul  $E$



rezultanta  $2\vec{F}$ , iar cele două forțe paralele  $-\vec{F}$ , aplicate în punctele  $A$  și  $D$  vor da în punctul  $E$ , rezultanta  $-2\vec{F}$ . Ambele rezultante  $+2\vec{F}$  și  $-2\vec{F}$  aplicate în punctul comun  $E$ , se echilibrează, și rămâne cuplul  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , situat în planul  $\pi'$ . Este evident că momentul acestui cuplu este egal cu momentul cuplului precedent. Ca un caz particular planul  $\pi'$  poate să coincidă cu planul  $\pi$  și vom avea deplasarea cuplului paralel cu el însuși în planul său.

3. *Cuplul poate fi rotit cu un unghi arbitrar în planul său.* Fie dat cuplul  $(\vec{F}, -\vec{F})$ . Să examinăm mai întâi un caz particular

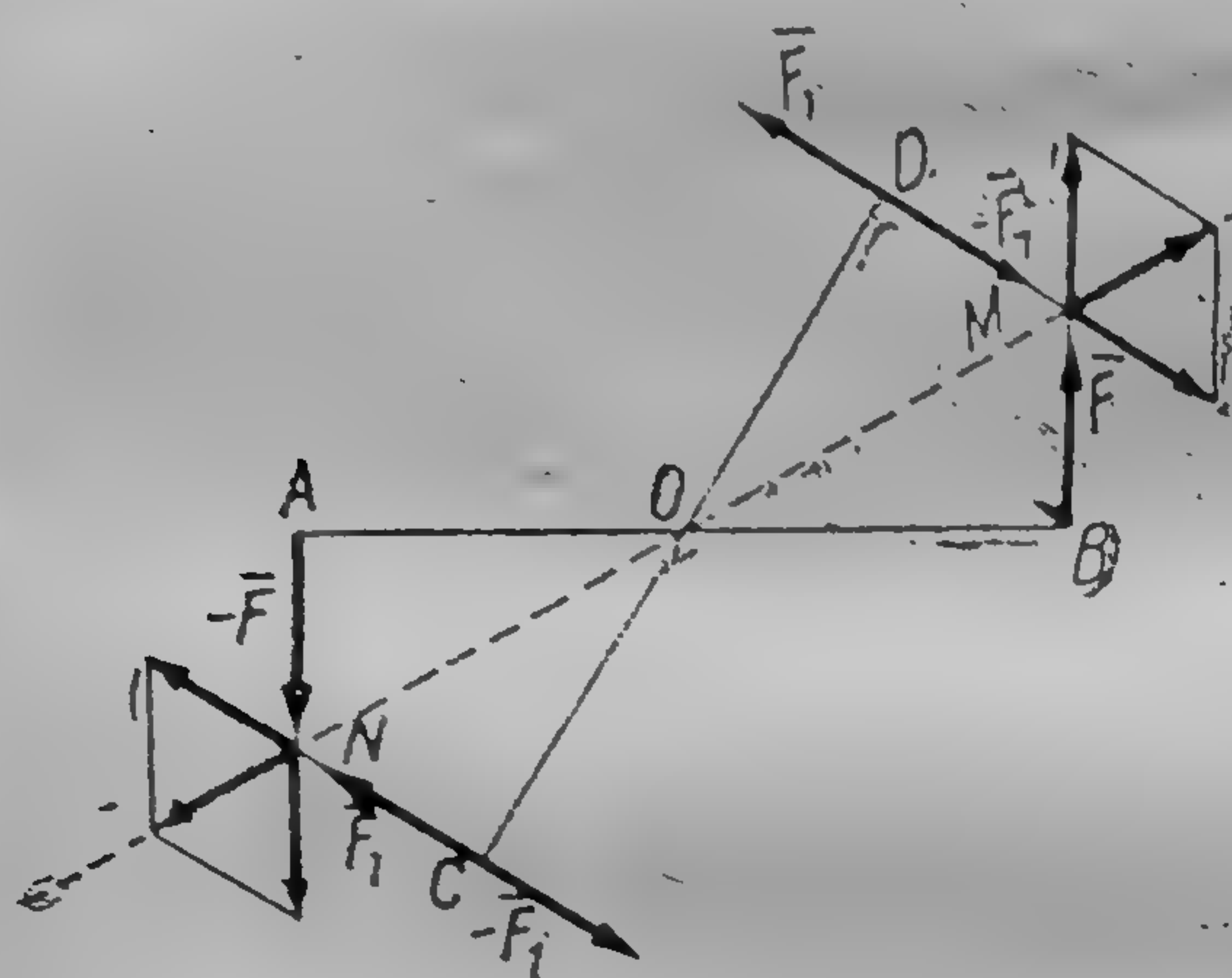


Fig. 80

când cuplul se rotește în jurul mijlocului  $O$  al brațului  $AB$ . Ducem prin punctul  $O$ , dreapta  $CD=AB$ , care formează un unghi dat cu dreapta  $AB$  astfel ca să avem  $CO=DO$ . Aplicăm în punctele  $C$  și  $D$  câte două forțe de sens contrar perpendiculare pe dreapta  $CD$  având modulele  $F$ . Mutăm forțele situate în interiorul unghiului  $BOD$ , în punctul lor de concurență  $M$ , iar forțele situate în interiorul unghiului  $AOC$ , în punctul lor de concurență  $N$ . Unim punctele  $M$  și  $N$  cu punctul  $O$ . Din egalitățile

$$\triangle OBM = \triangle ODM, \quad \triangle OAN = \triangle OCN,$$

rezultă că  $OM$  și  $ON$  sînt bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf  $AOC$  și  $BOD$  și, de aceea, dreptele  $ON$  și  $OM$  sînt în prelungire. Compunînd forțele aplicate în punctele  $M$  și  $N$ , după legea paralelogramului, vom obține romburi egale; rezultantele vor fi dirijate după diagonalele acestor romburi, situate în prelungirea dreptelor  $OM$  și  $ON$ . De aceea aceste rezultante se echilibrează între ele și rămîne numai cuplul forțelor  $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$  cu brațul  $CD$ .

Combinînd rotirea în jurul punctului  $O$  cu o translație, putem roti cuplul în jurul oricărui punct din planul său. Este



evident că și în acest caz momentul cuplului rămâne neschimbat. De aici rezultă că:

*Două cupluri cu momentele egale sînt echivalente*, deoarece ele pot fi transformate unul în altul cu ajutorul celor trei operații arătate mai sus.

În adevăr, presupunem că sînt date două cupluri  $(\vec{F}, -\vec{F})$  și  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  aplicate unui solid și că momentele lor  $\vec{M}$  și  $\vec{M}'$  sînt egale. Din egalitatea  $\vec{M} = \vec{M}'$  tragem în primul rînd concluzia că cuplurile  $(\vec{F}, -\vec{F})$  și  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  sînt situate în plane paralele. Ca să ne convingem că cuplul  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  este echivalent cu cuplul  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , rotim cuplul  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  în planul său, astfel încît brațul său să devină paralel cu brațul cuplului  $(\vec{F}, -\vec{F})$ . Înlocuim forțele sale cu modulul  $\vec{F}'$ , prin forțele cu modulul  $\vec{F}$ ; ca urmare a egalității  $\vec{M}' = \vec{M}$  brațele ambelor cupluri vor deveni egale. Printr-o mișcare de translație, putem face ca un cuplu să coincidă cu celălalt, și astfel rezultă că aceste cupluri sînt echivalente.

Am arătat în § 25 că construcția vectorului moment al unui cuplu dat în raport cu un punct oarecare dat  $O$ , este o problemă complet determinată; ca rezultat al acestei construcții obținem un vector  $\vec{M}$  bine determinat aplicat în punctul  $O$ . Invers, fie dat momentul  $\vec{M}$  al unui cuplu aplicat în punctul  $O$ . Se cere să se găsească cuplul corespunzător lui. Pentru aceasta se poate duce un plan oarecare  $\pi$  perpendicular pe vectorul moment  $\vec{M}$ , oriunde, la alegere, în acest plan  $\pi$ , construim cuplul cu o pereche oarecare de forțe  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$  și cu un astfel de braț  $AB$  încît să aibă loc egalitatea  $F \cdot AB = M$ . În plus, va trebui ca sensul de rotație al cuplului  $(\vec{F}, -\vec{F})$  să corespundă sensului vectorului  $\vec{M}$ . Vedem că această problemă inversă este nedeterminată, deoarece duce la o infinitate de cupluri, dar toate aceste cupluri sînt *echivalente*, adică se pot transforma unul într-altul aplicîndu-li-se operațiile expuse mai sus. Prin urmare, această varietate infinită de cupluri obținută este numai aparentă, căci fiind dat momentul  $\vec{M}$ , nu putem obține cupluri neechivalente. Astfel, ajungem la următoarea concluzie:

*Cuplul este complet caracterizat prin momentul său.*

De aceea, în mecanică, cuplul se determină totdeauna prin momentul lui și trebuie să ne deprîndem ca în loc de cuplul dat,



să considerăm totdeauna momentul lui, adică vectorul moment  $\bar{M}$ , care este un vector liber, în timp ce vectorul forță  $\bar{F}$  este un vector alunecător.

§ 36. **Compunerea cuplurilor.** Cuplul, ca și forța, este un element primar nereductibil. La fel ca în unele cazuri descrise mai înainte, unde am avut posibilitatea să înlocuim mai multe forțe printr-o singură forță rezultantă, tot așa se pot înlocui și mai multe cupluri printr-un singur cuplu. O asemenea reducere a unui sistem de cupluri la un singur cuplu, se numește *compunerea cuplurilor*.

*Compunerea cuplurilor situate în plane paralele.* Fie, de exemplu, trei cupluri  $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$ ,  $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$ ,  $(\bar{F}_3, -\bar{F}_3)$  situate în plane paralele. Din cele expuse în paragraful precedent vom putea deplasa aceste cupluri printr-o mișcare de translație într-un



Fig. 81

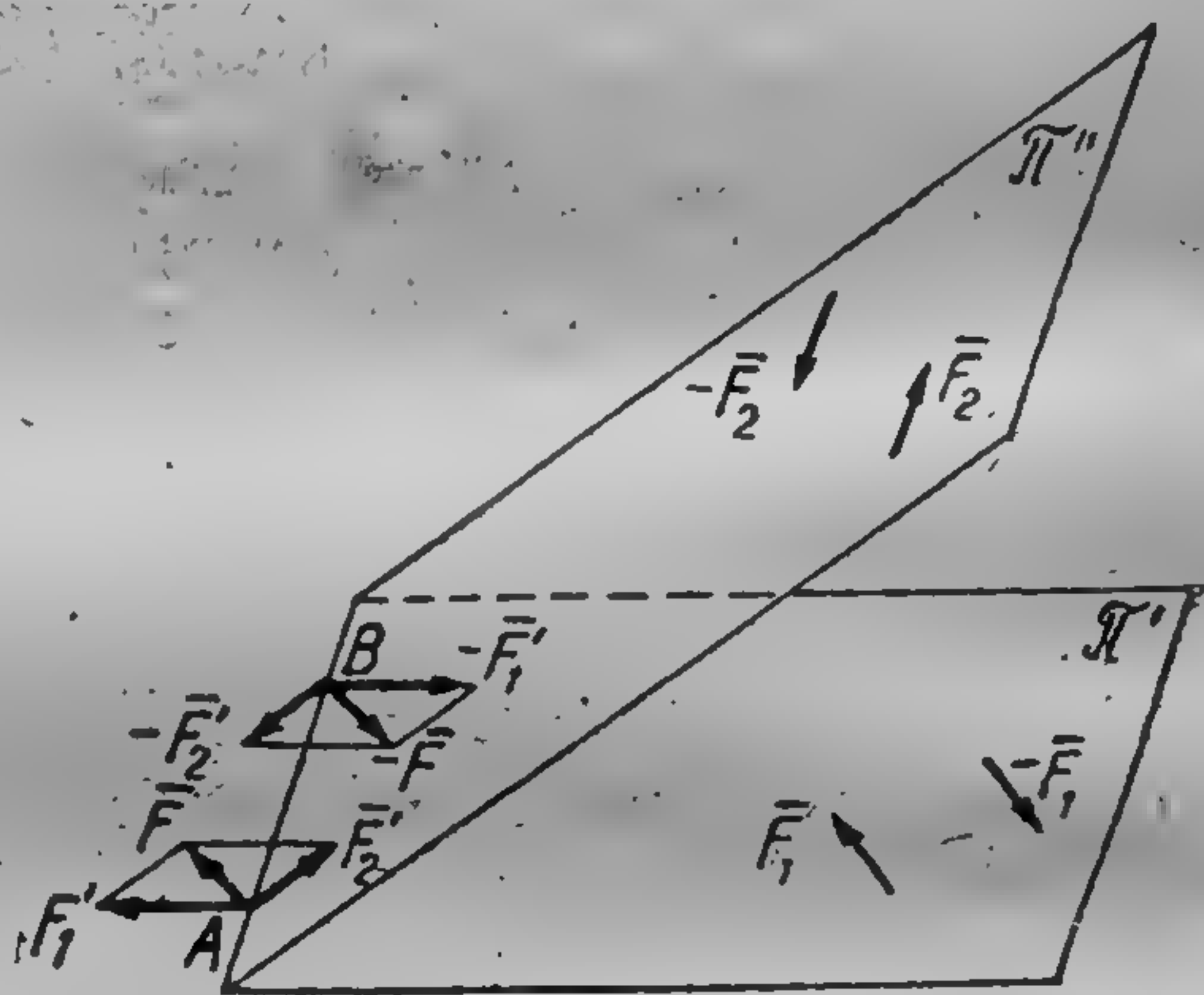


Fig. 82

plan paralel cu planele cuplurilor date. Tot din proprietățile expuse în paragraful precedent vom putea transforma aceste trei cupluri în cupluri avînd un braț comun, schimbînd într-un mod convenit modulele forțelor cuplurilor prin translații și rotații convenabile ale cuplurilor în planul lor. Astfel vom putea reduce cele trei cupluri date la cuplurile  $(\bar{F}'_1, -\bar{F}'_1)$ ,  $(\bar{F}'_2, -\bar{F}'_2)$ ,  $(\bar{F}'_3, -\bar{F}'_3)$ , cu brațul comun  $Ab$ , reprezentate în fig. 81. Compunînd forțele:

$$\bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 + \bar{F}'_3 = \bar{F},$$

obținem rezultanta lor  $\bar{F}$ ; în același mod, vom avea:

$$-\bar{F}'_1 - \bar{F}'_2 - \bar{F}'_3 = -\bar{F}.$$



Prin urmare, în loc de trei cupluri  $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$ ,  $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$ ,  $(\bar{F}_3, -\bar{F}_3)$  vom obține un singur cuplu  $(\bar{F}, -\bar{F})$ . Astfel, am demonstrat posibilitatea compunerii cuplurilor situate în plane paralele. Rămîne de demonstrat că momentul  $\bar{M}$  al cuplului  $(\bar{F}, -\bar{F})$  este egal cu suma geometrică  $\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3$  a momentelor celor trei cupluri date, sau, ceea ce este același lucru, a cuplurilor  $(\bar{F}'_1, -\bar{F}'_1)$ ,  $(\bar{F}'_2, -\bar{F}'_2)$ ,  $(\bar{F}'_3, -\bar{F}'_3)$ . Dar acest din urmă lucru este evident. În adevăr, deoarece momentul cuplului în raport cu un punct oarecare din spațiu este același, vom lua momentele tuturor cuplurilor în raport cu punctul  $A$ . Atunci momentul cuplului  $(\bar{F}'_1, -\bar{F}'_1)$  în raport cu punctul  $A$  se va reduce la momentul forței  $\bar{F}'_1$  în raport cu punctul  $A$ , momentul cuplului  $(\bar{F}'_2, -\bar{F}'_2)$ , la momentul forței  $\bar{F}'_2$  în raport cu punctul  $A$  și așa mai departe. Dar după teorema lui Varignon pentru forțele concurente, momentul  $\bar{M}$  al rezultantei  $\bar{F}$  este egal cu suma geometrică a momentelor  $\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3$  a forțelor  $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}'_3$  și teorema este demonstrată. Este evident că în acest caz suma geometrică a momentelor se reduce la suma lor algebrică. Astfel, pentru a compune cuplurile situate în plane paralele, este suficient să se adune algebric momentele lor.

*Cazul general de compunere a cuplurilor.* Ca să ajungem la cazul general rămîne de examinat numai cazul cînd cuplurile sînt situate în plane secante. Fie două cupluri  $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$  și  $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$  situate în planele secante  $\pi'$  și  $\pi''$  (fig. 82).

Prelungind aceste plane pînă la intersecția lor și modificînd forțele cuplurilor putem transforma și muta cuplurile astfel încît ele să aibă un braț comun  $AB$  situat pe dreapta de intersecție a planelor  $\pi'$  și  $\pi''$ . Astfel vom obține cuplurile  $(\bar{F}'_1, -\bar{F}'_1)$  și  $(\bar{F}'_2, -\bar{F}'_2)$ . Vedem că pentru obținerea unui singur cuplu  $(\bar{F}, -\bar{F})$  este suficient să adunăm geometric forțele:

$$\begin{aligned}\bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 &= \bar{F}, \\ -\bar{F}'_1 - \bar{F}'_2 &= -\bar{F},\end{aligned}$$

aplicate în punctele  $A$  și  $B$ ; prin urmare, posibilitatea compunerii cuplurilor situate în plane secante este demonstrată. Rămîne de demonstrat că momentul  $\bar{M}$  al cuplului  $(\bar{F}, -\bar{F})$  este egal cu suma geometrică a momentelor  $\bar{M}_1$  și  $\bar{M}_2$  ale cuplurilor  $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$  și  $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$  sau ceea ce este același lucru ale cuplurilor



$(\bar{F}'_1, -\bar{F}'_1)$  și  $(\bar{F}'_2, -\bar{F}'_2)$ . Folosindu-ne de faptul că momentul cuplului în raport cu oricare punct din spațiu este constant, luăm momentele tuturor cuplurilor în raport cu punctul  $B$  (v. § 25). Atunci momentul  $\bar{M}$  al cuplului  $(\bar{F}, -\bar{F})$  în raport cu punctul  $B$  se reduce la momentul forței  $\bar{F}$  în raport cu punctul  $B$ , momentul  $\bar{M}_1$  al cuplului  $(\bar{F}'_1, -\bar{F}'_1)$ , la momentul forței  $\bar{F}'_1$  în raport cu punctul  $B$  și momentul  $\bar{M}_2$  al cuplului  $(\bar{F}'_2, -\bar{F}'_2)$  la momentul forței  $\bar{F}'_2$  în raport cu punctul  $B$ . Dar conform teoremei lui Varignon pentru forțe concurente, momentul  $\bar{M}$  al forței  $\bar{F}$  este egal cu suma geometrică a momentelor  $\bar{M}_1$  și  $\bar{M}_2$ , și teorema este demonstrată.

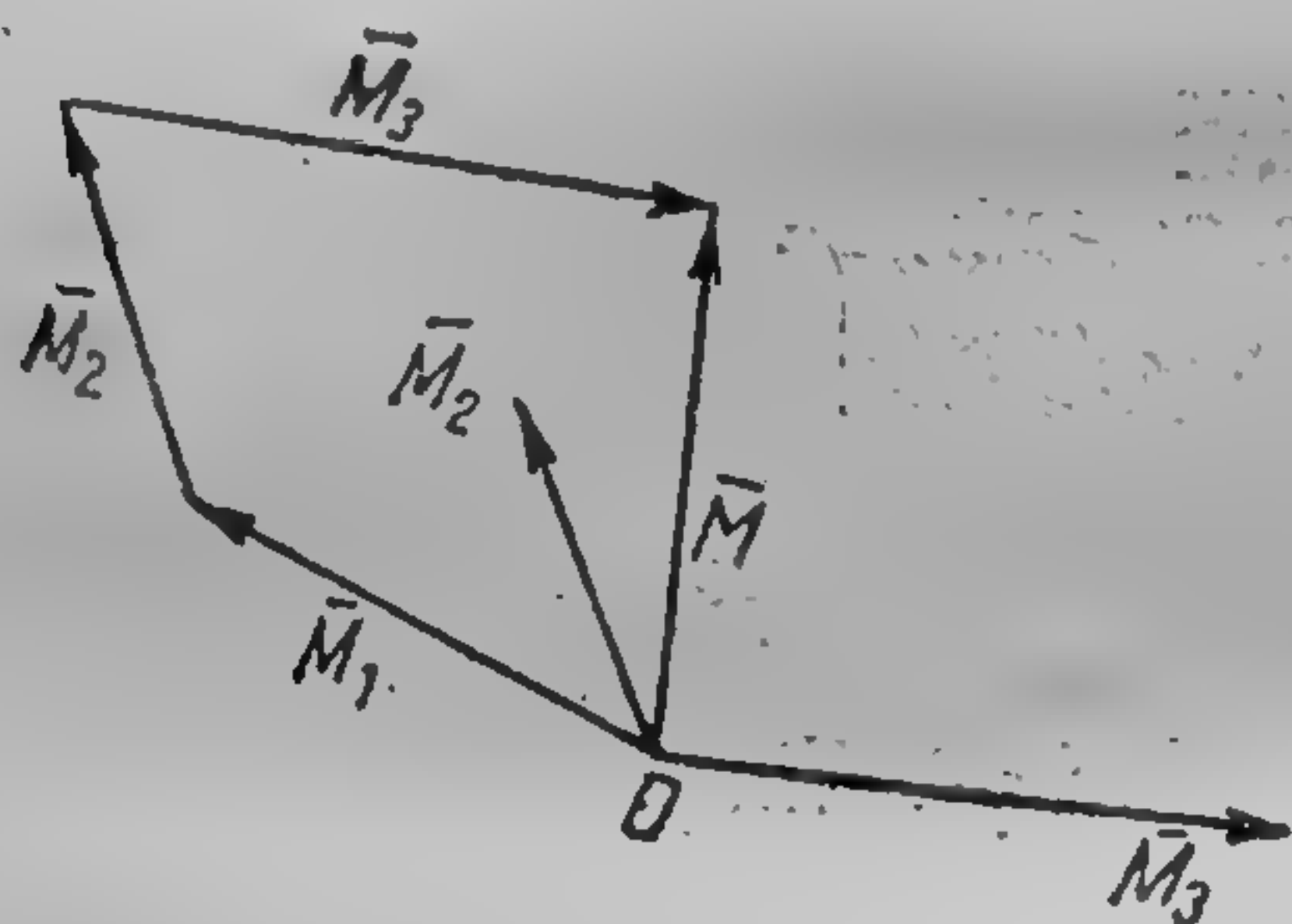


Fig. 83.

De aici obținem o teoremă generală aplicabilă în toate cazurile:

*Pentru compunerea cuplurilor este suficient să se adune geometric momentele lor.*

Fie date de exemplu trei cupluri arbitrare:  $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$ ,  $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$  și  $(\bar{F}_3, -\bar{F}_3)$ . Deoarece momentul cuplului în raport cu un oricare punct din spațiu este constant, vom considera un punct arbitrar din spațiu  $O$  și vom construi în el vectorii moment  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  și  $\bar{M}_3$  ai cuplurilor considerate (fig. 83). Adunând geometric aceste momente vom obține momentul  $\bar{M}$ :

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3$$

al cuplului unic care poate înlocui cele trei cupluri date.

§ 37. Aparatul lui Tepler. Cele expuse în capitolul de față și în cele precedente se pot verifica cu aparatul lui Tepler (fig. 84).

Aparatul se compune dintr-o masă cu trei picioare pe care este instalat pe trei șuruburi de reglaj un disc circular cu fața superioară foarte bine lustruită. Cu ajutorul celor trei șuruburi, fața superioară a discului poate fi așezată perfect orizontal. Pe acest disc se așează trei bile de oțel cu diametrul de circa 1,5 cm, deasupra cărora se așază un al doilea disc rotund cu fața lustruită, care prin urmare poate să se deplaseze foarte ușor pe acele bile. Pe partea superioară a suprafeței acestui de-al doilea disc sînt făcute o serie de găuri în care se pot introduce știfturi mici.



De aceste știfturi se pot prinde fire ce sînt petrecute peste scripeți, care pot fi fixați cu ajutorul unor dispozitive, în orice punct de pe periferia primului disc; la capetele firelor se atîrnă greutăți. Să se verifice, de exemplu, pe cale experimentală, legea paralelogramului. Introducem un știft într-una din găurile discului superior; prindem de știft trei fire dintre care primele două le întindem de exemplu, sub un unghi de  $90^\circ$  unul față de celălalt, agățînd de ele greutăți de 300 g și 400 g. Atunci rezultanta acestor forțe va fi egală cu 500 g, deoarece  $300^2 + 400^2 = 500^2$  și va fi dirijată după diagonala dreptunghiului construit pe suporturile forțelor de 300 g și 400 g. Indreptînd al treilea fir în sens opus acestei rezultante și atîrnînd de el o greutate de 500 g vom vedea că discul superior va rămîne fix. Pentru ca în timpul pregătirii experienței, discul superior așezat pe bilă să rămîna fix, el se poate fixa cu un dispozitiv special de prindere.

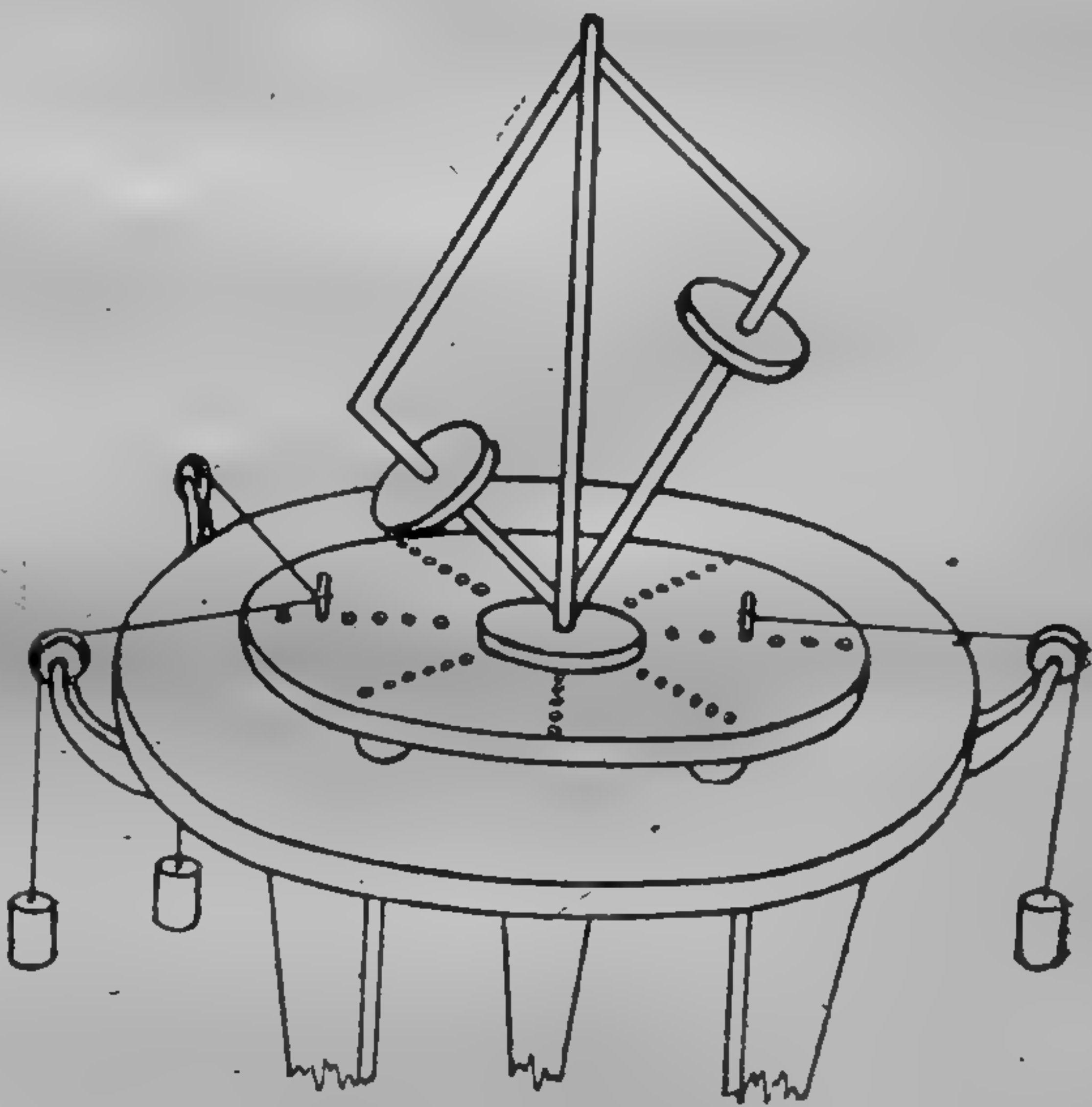


Fig. 84

Ca să ne convingem de echivalența cuplurilor cu momentele egale, vom introduce două știfturi  $A_1$  și  $A_2$  și vom suspenda cu ajutorul unor fire, perpendiculare pe dreapta  $A_1A_2$  și dirijate în sens opus, două greutăți, de exemplu, de cîte 400 g fiecare. Vom obține un cuplu cu un moment de modul egal cu  $400 A_1A_2$ . Vom introduce apoi alte două știfturi  $B_1$  și  $B_2$  astfel încît să avem, de exemplu,  $B_1B_2 = 2A_1A_2$  și să fixăm de ele cu ajutorul unor fire perpendiculare pe dreapta  $B_1B_2$  și dirijate în sens opus două greutăți de cîte 200 g, fiecare, astfel încît momentul celui de-al doilea cuplu să fie de sens contrar cu momentul primului cuplu; desigur, nu este necesar ca  $B_1B_2$  să fie paralel cu  $A_1A_2$ . Vom vedea că prin aceasta discul superior rămîne fix.



Cu acest aparat se poate verifica experimental și teorema compunerii cuplurilor. Pentru verificarea experimentală a cazului compunerii cuplurilor, situate în plane secante, aparatul este prevăzut cu un dispozitiv avînd forma unui dreptunghi confecționat din bare metalice. Bara ce reprezintă diagonala dreptunghiului este dreijată pe verticală în sus cînd dispozitivul este fixat în centrul discului mobil. Pe două laturi perpendiculare ale acestui dreptunghi sînt fixate două discuri metalice egale ca diametru, perpendiculare pe aceste laturi. Cuplurile componente se obțin fixînd pe periferia acestor discuri metalice fire acționate de greutate, momentele acestor cupluri componente fiind dirijate de-a lungul laturilor dreptunghiului. Vom putea alege greutatele ce acționează la capetele firelor astfel încît modulele acestor momente să fie proporționale cu laturile dreptunghiului. În acest caz momentul cuplului rezultat va fi dirijat după diagonala dreptunghiului și modulul lui va fi proporțional cu lungimea acestei diagonale. Este suficient ca la periferia discului orizontal fixat pe diagonală și avînd diametrul egal cu diametrele discurilor înclinate, să fixăm două fire acționate de greutate, astfel ca să obținem un cuplu cu un moment egal ca modul și direcție și de sens contrar cu momentul cuplului rezultat, ca discul superior să rămîna în echilibru.

În cazul mutării cuplului printr-o mișcare de translație, se poate naște întrebarea cum pot fi echivalente cupluri situate în diferite locuri. În dinamică se va demonstra că în cazul cînd asupra unui solid acționează cupluri, centrul de greutate al solidului rămîne fix, iar solidul începe să rotească în jurul centrului său de greutate, mișcarea nedepinzînd de poziția cuplurilor. Aceasta se poate verifica cu aparatul lui Tepler. Oriunde va acționa un cuplu pe discul superior, centrul discului superior va rămîne fix, iar discul va începe să se rotească în jurul centrului său de greutate care coincide cu centrul geometric; pentru toate cuplurile cu momente egale, mișcarea de rotație va fi asemănătoare, viteza variînd în același mod.

§ 38. Exemple. 28. Se dau două puncte  $A_1$  și  $A_2$ , avînd în raport cu un sistem de axe ortogonale  $Oxyz$ , coordonatele  $(x_1=10, y_1=6, z_1=10)$  și  $(x_2=4, y_2=8, z_2=12)$ . În aceste puncte sînt aplicate două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  cu proiecțiile  $(X_1=2, Y_1=3, Z_1=-4)$  și  $(X_2=-2, Y_2=-3, Z_2=4)$ . Să se studieze sistemul acestor două forțe și să se găsească momentul lor rezultat, în raport cu un punct oarecare. Deoarece proiecțiile forțelor sînt respectiv egale între ele în valoare absolută, dar de sens contrar, sistemul dat se reduce fie la un cuplu de forțe, fie la două forțe egale de sens contrar situate de-a lungul unei drepte; în ambele cazuri momentul rezultat



al acestui sistem de forțe este un vector liber. Deoarece cosinuşii directori ai forței  $F_1$ , sînt proporționali cu  $2:3:-4$  iar cosinuşii directori ai segmentului  $A_1A_2$  sînt proporționali cu diferența coordonatelor punctelor  $A_2$  și  $A_1$ , adică să determinăm momentul forței  $F_2$  în raport cu punctul  $A_1$ , și  $A_1$ , adică proporționali cu  $-6:2:2$ , rezultă că cele două forțe nu au același suport și prin urmare formează un cuplu. Să găsim momentul acestui cuplu în raport cu un punct oarecare, de exemplu în raport cu punctul  $A_1$ , adică să determinăm momentul forței  $\bar{F}_2$  în raport cu punctul  $A_1$ . Aplicînd formulele (2.24) vom obține:

$$M_x = (8-6)4 + (12-10)3 = 14,$$

$$M_y = -(12-10)2 - (4-10)4 = 20,$$

$$M_z = -(4-10)3 + (8-6)2 = 22.$$

Modulul momentului  $\bar{M}$  al cuplului considerat va fi:

$$M = \sqrt{14^2 + 20^2 + 22^2} = \sqrt{1080} = 32,863.$$

Deoarece modulul fiecărei forțe din cuplu este egal cu  $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$  și modulul momentului cuplului este egal cu  $\sqrt{29} \cdot d$ , unde  $d$  este brațul cuplului, vom avea:

$$\sqrt{29} \cdot d = \sqrt{1080},$$

sau

$$d = \sqrt{\frac{1080}{29}} = \sqrt{37,241379} = 6,103.$$

29. Se dau cinci forțe avînd modulele  $F_1=4$ ,  $F_2=6$ ,  $F_3=2$ ,  $F_4=7$ ,  $F_5=3$ , situate în planul  $Oxy$ , aplicate respectiv în punctele 0, 1, 2, 3, 4, ale axei  $Oy$ . Forțele sînt paralele cu axa  $Ox$ ,  $F_1$  și  $F_4$  fiind orientate în același sens cu axa  $Ox$ , iar  $F_2$ ,  $F_3$  și  $F_5$  fiind orientate în sens invers axei  $Ox$ , la ce se reduce acest sistem de forțe paralele. Deoarece suma algebrică  $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 4 - 6 - 2 + 7 - 3 = 0$ , sistemul forțelor fie că se reduce la un cuplu, fie că se găsește în echilibru. Deoarece momentul resultant al acestui sistem în raport cu punctul  $O$  este egal cu

$$6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 1,$$

sistemul forțelor se reduce la un cuplu de moment egal în modul cu 1, vectorul moment fiind paralel și de același sens cu axa  $Oz$ .

30. Se dau trei cupluri cu momente, avînd direcții paralele cu direcțiile pozitive ale axelor sistemului ortogonal de coordonate  $Oxyz$ , și module egale respectiv cu 1, 2, 3. Să se găsească al patrulea cuplu  $\bar{M}_4$ , astfel încît sistemul celor patru cupluri să se echilibreze. Scriind condiția vectorială de echilibru, obținem:

$$\bar{M}_4 + \bar{i} \cdot 1 + \bar{j} \cdot 2 + \bar{k} \cdot 3 = 0$$

sau

$$\bar{M}_4 = -\bar{i} \cdot 1 - \bar{j} \cdot 2 - \bar{k} \cdot 3.$$

De aici găsim:

$$M_4 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3,742.$$

Momentul celui de-al patrulea cuplu este egal ca vector cu diagonala paralelipipedului dreptunghi construit în punctul  $O$  pe părțile negative ale axelor  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ , cu laturile respectiv egale cu 1, 2, 3.



## CAPITOLUL IX

### SISTEM DE FORȚE ÎN PLAN

§ 39. Reducerea unui sistem de forțe în plan la cel mai simplu sistem. Un sistem de forțe în plan este un sistem de forțe având toate forțele așezate în același plan. Acest caz al sistemului de forțe este foarte important, deoarece majoritatea aplicațiilor practice ale staticii se referă la probleme de forțe coplanare. Ne vom ocupa de reducerea unui sistem de forțe în plan aplicat unui solid la cel mai simplu sistem. Pentru aceasta vom demonstra în prealabil următoarea temă:

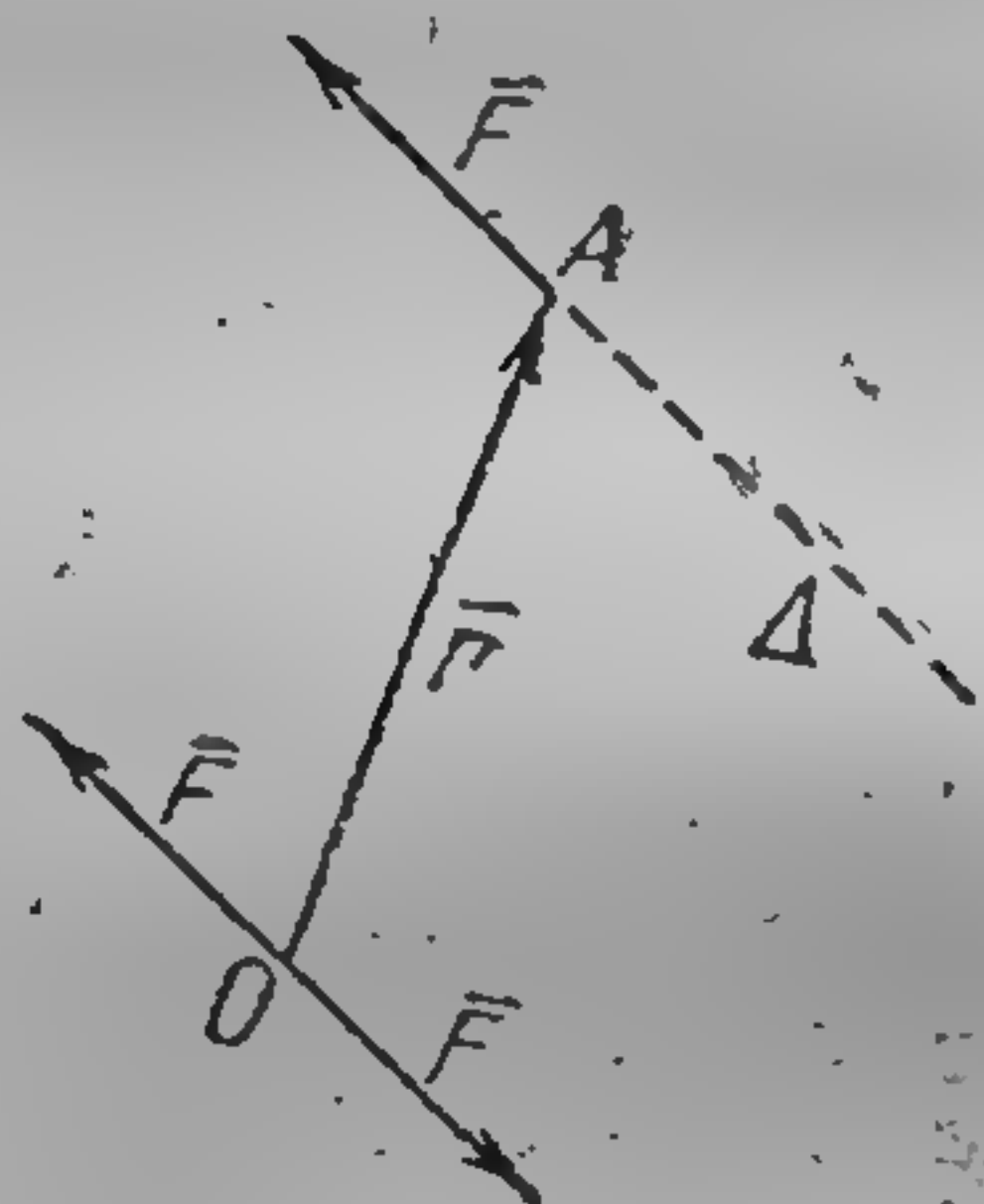


Fig. 85:

*Functul de aplicație al oricărei forțe poate fi mutat în orice alt punct din spațiu, prin adăugarea unui cuplu suplimentar de moment egal cu momentul forței în raport cu acel punct.*

Să presupunem că avem forța  $\vec{F}$  aplicată într-un punct oarecare  $A$  al suportului ei  $\Delta$  (fig. 85). Să considerăm un punct oarecare  $O$  din spațiu și să aplicăm în el două forțe, opuse, paralele cu forța  $\vec{F}$  și egale în modul cu forța  $\vec{F}$ ; acest lucru este posibil, deoarece forțele aplicate în punctul  $O$  se echilibrează între ele. Pe de altă parte însă, sistemul celor trei forțe obținute, se poate considera în felul următor: forța  $\vec{F}$  din punctul  $A$  este mulată în punctul  $O$  și la ea se mai adaugă cuplul  $(\vec{F}, -\vec{F})$  al cărui moment este egal cu momentul forței  $\vec{F}$  în raport cu punctul  $O$ . Dacă vom nota  $\vec{OA} = \vec{r}$ , atunci momentul acestui cuplu suplimentar va fi egal cu produsul vectorial  $\vec{r} \times \vec{F}$ . Este evident că momentul cuplului suplimentar va fi egal cu zero, numai în cazul când punctul  $O$  este situat pe dreapta  $\Delta$ ; regăsim astfel proprietatea că într-un solid, forța este un vector alunecător.



Să examinăm acum un sistem arbitrar de forțe coplanare  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ , aplicate respectiv în punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots$  ale solidului. Să alegem un punct oarecare  $O$  în acest plan și să-l

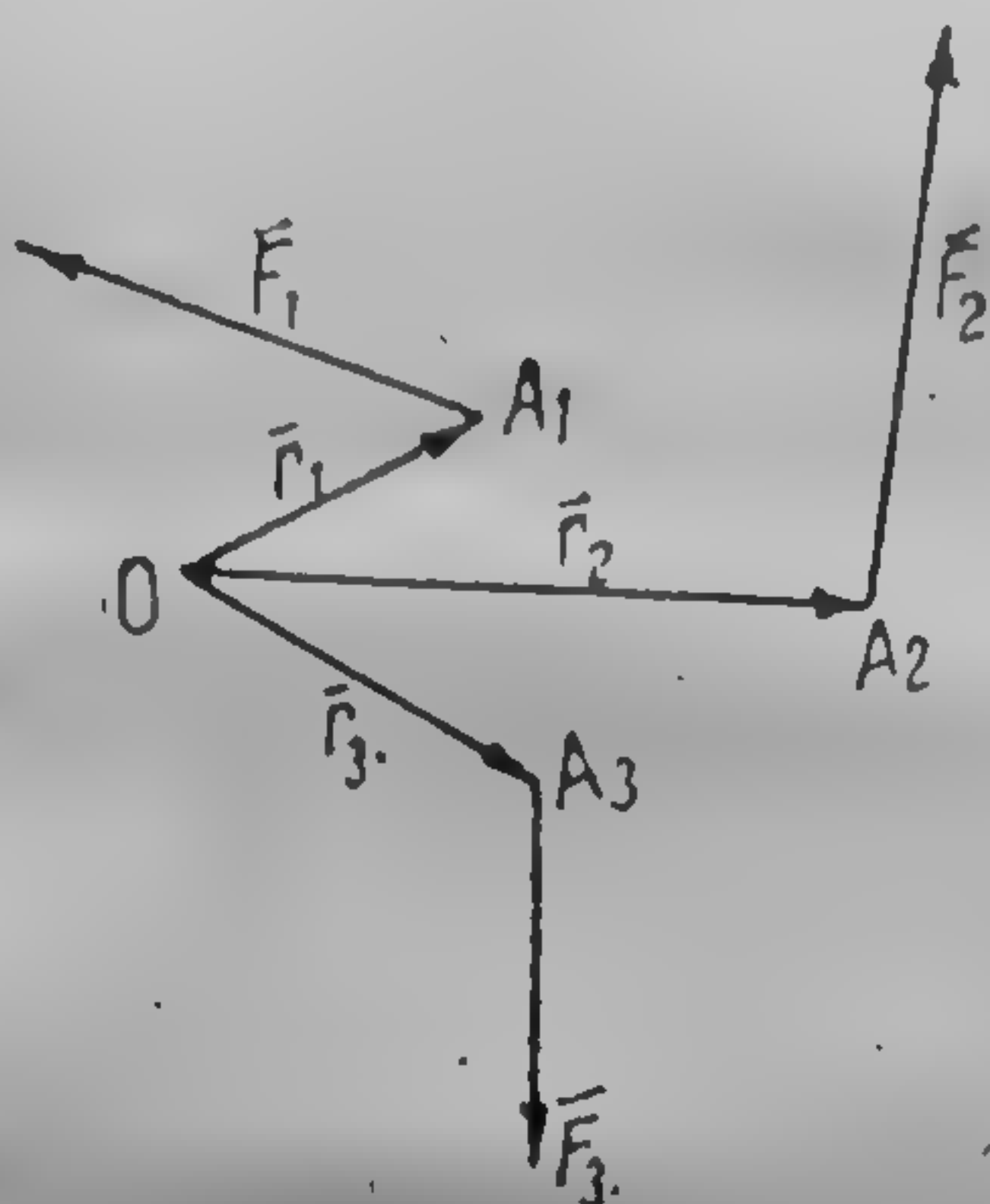


Fig. 86

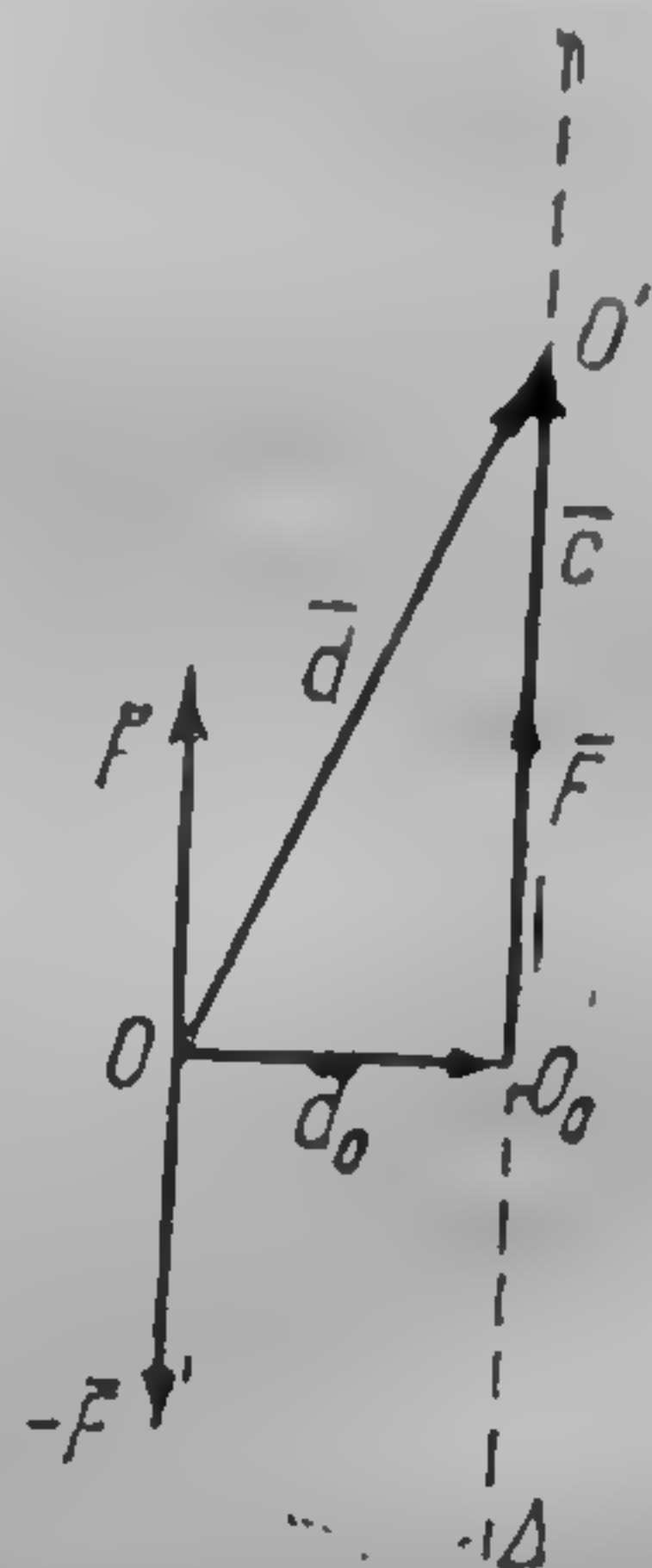


Fig. 87

denumim *punct de reducere* (fig. 86). Mutăm punctele de aplicație ale tuturor forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  în punctul  $O$ , adăugând cuplurile suplimentare având momentele  $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ ,  $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ ,  $\vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3, \dots$ , toți vectorii  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, \dots$ , vor fi perpendiculari pe planul în care se află forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ . Forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  aplicate în punctul  $O$  se pot compune și înlocui printr-o forță rezultantă  $\vec{F}$  (§ 20).

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_n \vec{F}_n.$$

Conform § 36, toate cuplurile se pot compune, adunând geometric momentele lor (adunarea lor geometrică se reduce la cea algebrică); astfel vom obține un cuplu rezultat de moment

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \sum_n \vec{M}_n.$$

Vom modifica forțele cuplului astfel încât modulul lor să devină egal cu  $F$ ; în acest caz brațul cuplului va fi egal cu  $d_0$ , astfel încât  $M = F d_0$ . Vom roti apoi cuplul în planul său, în așa fel încât brațul său să devină perpendicular pe forța  $\vec{F}$  aplicată în



punctul  $O$  și vom deplasa cuplul în planul său paralel cu el însuși, astfel ca forța  $-\bar{F}$  a cuplului să ajungă în punctul  $O$  (fig. 87); fie în acest caz  $O_0$  punctul de aplicație al forței  $\bar{F}$  a cuplului, unde  $\overline{OO}_0 = \bar{d}_0$  și  $\bar{d}_0 \perp \bar{F}$ . Este evident că forțele  $\bar{F}$  și  $-\bar{F}$  aplicate în punctul  $O$  se echilibrează și întregul sistem de forțe se reduce la o singură forță rezultantă  $\bar{F}$  aplicată în punctul  $O_0$  iar punctul de aplicație al acestei forțe  $\bar{F}$  îl putem muta în orice alt punct  $O'$  al suportului ei  $\Delta$ , care trece prin punctul  $O_0$ . Dreapta  $\Delta$  în lungul căreia este situată rezultanta  $\bar{F}$  a sistemului de forțe, se numește *axa centrală* a acestui sistem de forțe.

Poziția axei centrale poate fi determinată și vectorial. În adevăr, presupunem că, luând ca punct de reducere un punct oarecare  $O$  am obținut:

$$\bar{F} = \sum_n \bar{F}_n, \quad \bar{M} = \sum_n \bar{M}_n;$$

dacă însă vom lua ca punct de reducere un alt punct  $O'$  al planului în care sînt așezate forțele, vom obține:

$$\bar{F} = \sum_n \bar{F}_n, \quad \bar{M}' = \sum_n \bar{M}'_n.$$

Aplicînd formula (2.22) vom avea:

$$\bar{M}'_n = \bar{M}_n - \bar{d} \times \bar{F}_n,$$

unde  $\bar{d} = \overline{OO'}$ . De aici găsim:

$$\bar{M}' = \sum_n \bar{M}_n - \sum_n \bar{d} \times \bar{F}_n = \bar{M} - \bar{d} \times \sum_n \bar{F}_n,$$

sau

$$\bar{M}' = \bar{M} - \bar{d} \times \bar{F}.$$

Dacă vom alege vectorul  $\bar{d}$  în așa fel încît să aibă loc egalitatea  $\bar{M}' = 0$ , atunci punctul  $O'$  va fi un punct al axei centrale. Prin urmare, vectorul  $\bar{d}$  se determină din ecuația:

$$\bar{d} \times \bar{F} = \bar{M}, \quad (9.1)$$

a cărei rezolvare este asemănătoare cu o împărțire, deoarece pe baza produsului vectorial dat  $\bar{M}$  și a unui factor  $\bar{F}$  se cere să se găsească al doilea factor  $\bar{d}$ . Spre deosebire de ecuațiile scalare,



ecuația vectorială considerată admite o infinitate de soluții. În adevăr, fie  $\vec{d}_0$  una din soluții determinată de exemplu prin condițiile  $\vec{d}_0 \times \vec{F} = \vec{M}$  și  $\vec{d}_0 \perp \vec{F}$ ; atunci ecuația va fi verificată și de soluția  $\vec{d} = \vec{d}_0 + \vec{c}$ , unde  $\vec{c}$  este un vector arbitrar paralel cu  $\vec{F}$  (fig. 87).

Efectuând produsul vectorial între vectorii  $\vec{d}_0 + \vec{c}$  și  $\vec{F}$  și ținând seamă că vectorii  $\vec{c}$  și  $\vec{F}$  sînt paraleli, adică  $\vec{c} \times \vec{F} = 0$ , vom obține:

$$(\vec{d}_0 + \vec{c}) \times \vec{F} = \vec{d}_0 \times \vec{F} + \vec{c} \times \vec{F} = \vec{d}_0 \times \vec{F} = \vec{M}.$$

Dar așa cum se vede din fig. 87, vectorul  $\vec{d}_0$  determină punctul  $O_0$  și vectorul  $\vec{d} = \vec{d}_0 + \vec{c}$  determină un punct arbitrar  $O'$  al axei centrale, adică găsim poziția axei centrale.

Dacă, mutînd toate forțele într-un punct oarecare de reducere vom obține

$$\vec{F} = \sum_n \vec{F}_n = 0,$$

atunci trebuie să avem  $\vec{M}' = \vec{M}$  și sistemul de forțe considerat se reduce la un cuplu. În stîrșit, dacă avem  $\vec{F} = 0$  și  $\vec{M} = 0$ , nu va exista nici rezultantă, nici cuplu, adică sistemul considerat de forțe este în echilibru. Astfel:

*Un sistem de forțe în plan este fie echivalent cu o rezultantă situată de-a lungul axei centrale a sistemului, fie cu un cuplu, fie că este în echilibru.*

Aceste rezultate obținute prin metoda geometrică-vectorială desigur că pot avea și o reprezentare analitică. Pentru aceasta considerăm în planul forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ , un sistem de coordonate ortogonale  $Oxy$ . Alegem ca punct de reducere originea  $O$  a coordonatelor. Notăm proiecțiile forțelor pe axe de coordonate, prin

$$\vec{F}_1(X_1, Y_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2), \vec{F}_3(X_3, Y_3), \dots,$$

iar coordonatele punctelor lor de aplicație  $A_1, A_2, A_3, \dots$  respectiv prin

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots$$

Deoarece toate forțele sînt așezate în planul  $Oxy$ , momentele lor în raport cu axe  $Ox$  și  $Oy$  sînt identic egale cu zero și rămîn numai momentele în raport cu axa  $Oz$ , adică:

$$M_{1z} = x_1 Y_1 - y_1 X_1, M_{2z} = x_2 Y_2 - y_2 X_2, M_{3z} = x_3 Y_3 - y_3 X_3, \dots$$



Notînd prin  $X, Y$  proiecțiile rezultantei  $\bar{F}$  și prin  $M_z$  proiecția pe axa  $Oz$  a momentului resultant  $\bar{M}$ , vom obține pentru punctul  $O$ :

$$X = \sum_n X_n, \quad Y = \sum_n Y_n, \quad M_z = \sum_n M_{nz} = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n). \quad (9.2)$$

Luăm acum ca punct de reducere un alt punct oarecare  $O'$  cu coordonatele  $(x', y')$ . Pentru punctul  $O'$  forța  $\bar{F}$  va rămîne aceeași, dar momentul resultant nu va mai fi  $\bar{M}$  și se va schimba în  $\bar{M}'$ , care conform formulei (2.25) va fi:

$$M'_z = \sum_n M'_{nz} = \sum_n M_{nz} - \sum_n (x' Y_n - y' X_n),$$

sau

$$M'_z = M_z - (x' \sum_n Y_n - y' \sum_n X_n),$$

adică:

$$M'_z = M_z - (x' Y - y' X).$$

Punînd punctului  $O'$  condiția  $\bar{M}' = 0$  adică  $M'_z = 0$ , vom avea:

$$x' Y - y' X = M_z. \quad (9.3)$$

Vedem că locul geometric al punctelor  $O'$  este dreapta reprezentată prin ecuația (9.3), ceea ce este cunoscut din studiile geometrico-vectoriale precedente, astfel ecuația (9.3) în care  $x'$  și  $y'$  sînt coordonatele curente, este ecuația axei centrale a sistemului. Mărimile  $X, Y$  și  $M_z$  în formula (9.3) sînt determinate prin formulele (9.2). Prin urmare, la rezolvarea problemei reducerii unui sistem de forțe în plan prin metoda analitică, trebuie mai întîi să se determine mărimile  $X, Y$  și  $M_z$  după formulele (9.2) și apoi pe baza formulei (9.3) se poate scrie ecuația axei centrale. Resultanta al cărei modul este  $F = \sqrt{X^2 + Y^2}$  va fi situată în lungul axei centrale. Dacă avem  $X=0, Y=0$  și  $M_z \neq 0$ , atunci nu există rezultantă și sistemul se reduce la un cuplu situat în planul  $Oxy$  cu momentul în raport cu axa  $Oz$ , egal cu  $M_z$ . Dacă însă  $X=0, Y=0$ , și  $M_z=0$ , sistemul de forțe este în echilibru.

§ 40. Echilibrul unui sistem de forțe în plan. Din cele expuse în paragraful precedent, rezultă că pentru echilibrul unui sistem



de forțe situat într-un plan oarecare  $\pi$  trebuie să se satisfacă două ecuații vectoriale:

$$\bar{F} = \sum_n \bar{F}_n = 0, \quad \bar{M} = \sum_n \bar{M}_n = 0, \quad (9.4)$$

unde vectorul  $\bar{F}$  este situat în planul  $\pi$  și vectorul  $\bar{M}$  este perpendicular pe planul  $\pi$  așa că  $\bar{M} \perp \bar{F}$ . Aceste două ecuații vectoriale se pot reduce la trei ecuații scalare luând planul  $\pi$  drept planul  $Oxy$ :

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_n X_n = 0, & Y &= \sum_n Y_n = 0, \\ M_z &= \sum_n M_{nz} = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Este evident că acest rezultat se poate generaliza luând ca punct de reducere nu originea  $O$  a coordonatelor, ci un punct oarecare al planului  $Oxy$  și ca direcții de proiectare, orice direcții neparalele situate în acest plan.

Să dăm acum alte metode de alcătuire a ecuațiilor de echilibru. Deoarece, conform rezultatelor paragrafului precedent, sistemul plan de forțe se reduce fie la o rezultantă, fie la un cuplu, fie se echilibrează, rezultă că dacă momentul rezultat în raport cu un punct oarecare  $O_1$  al planului va fi egal cu zero:

$$M_{O_1} = 0,$$

sistemul de forțe nu se poate reduce la un cuplu și deci fie se echilibrează, fie se reduce la o rezultantă care trece prin punctul  $O_1$ . Dacă momentul rezultat al aceluiași sistem de forțe, în plan în raport cu un alt punct oarecare  $O_2$  este de asemenea egal cu zero:

$$M_{O_2} = 0,$$

atunci sistemul de forțe fie se echilibrează, fie se reduce la o rezultantă care trece prin punctul  $O_2$ . Astfel, în cazul cînd avem relațiile  $M_{O_1} = 0$  și  $M_{O_2} = 0$ , toate forțele fie se reduc la o rezultantă care trece prin punctele  $O_1$  și  $O_2$ , fie se echilibrează. Dacă suma proiecțiilor tuturor forțelor pe o direcție neperpendiculară pe dreapta  $O_1 O_2$  este egală cu zero, este evident că nu există rezultantă și că sistemul de forțe se găsește în echilibru. În sfîrșit, să presupunem că momentele rezultante ale sistemului de forțe în raport cu trei puncte necoliniare  $O_1, O_2, O_3$  din planul forțelor, sînt egale cu zero:

$$M_{O_1} = 0, \quad M_{O_2} = 0, \quad M_{O_3} = 0;$$



deoarece rezultanta nu poate să treacă prin trei puncte necoliniare, rezultă că nu există rezultantă și sistemul de forțe este în echilibru. Astfel, obținem trei moduri de alcătuire a ecuațiilor de echilibru ale unui sistem de forțe în plan aplicat unui solid și anume, pentru ca sistemul de forțe în plan să fie în echilibru, este necesar și suficient ca:

1. Sumele proiecțiilor tuturor forțelor pe două direcții neparalele și momentul resultant al tuturor forțelor în raport cu un punct oarecare din plan să fie egale cu zero.

2. Momentele rezultante ale tuturor forțelor în raport cu două puncte oarecare din plan și suma proiecțiilor tuturor forțelor pe o direcție perpendiculară pe dreapta care unește aceste două puncte, să fie egale cu zero.

3. Momentele rezultante ale tuturor forțelor în raport cu trei puncte oarecare din plan, care nu sînt situate pe aceeași dreaptă, să fie egale cu zero.

Dacă sistemul de forțe în plan, este format din forțe paralele, atunci problema alcătuirii ecuațiilor de echilibru se simplifică și vom deduce ușor că, pentru echilibrul sistemului plan de forțe paralele, este necesar și suficient ca:

1. Suma proiecțiilor tuturor forțelor pe o direcție perpendiculară pe direcția forțelor și momentul resultant al tuturor forțelor în raport cu un punct oarecare din plan, să fie egale cu zero.

2. Momentele rezultante ale tuturor forțelor în raport cu două puncte din plan care nu sînt situate pe o dreaptă paralelă cu forțele, să fie egale cu zero.

Cu ultima condiție ne-am întâlnit cu ocazia examinării exemplului 24.

**Observație.** În exemplul 10 am văzut că pentru eliminarea din ecuația de echilibru a reacțiunii cunoscute ca direcție, este suficient să egalăm cu zero suma proiecțiilor forțelor pe o axă perpendiculară pe direcția reacțiunii. Trebuie subliniat că utilizarea calculului momentelor reprezintă un procedeu mai eficient pentru eliminarea reacțiunilor decât proiectarea forțelor pe o axă. În adevăr, dacă o reacțiune oarecare  $\bar{R}$  aplicată în punctul  $A$  nu este cunoscută ca direcție, atunci luînd momentele forțelor în raport cu punctul  $A$ , vom elimina această reacțiune  $\bar{R}$  din ecuația de echilibru, în timp ce din cauza necunoașterii direcției reacțiunii, metoda proiectării forțelor pe o axă este inaplicabilă aici. Dacă în problemă avem două reacțiuni  $\bar{R}_1$  și  $\bar{R}_2$ , avînd punctul de



concurență  $A$ , atunci luând momentele forțelor în raport cu punctul  $A$  eliminăm aceste două reacțiuni, în timp ce metoda proiecției, evident, este și în acest caz inaplicabilă.

§ 41. **Moment de stabilitate și moment de răsturnare.** Să considerăm un solid rigid greu, de greutate  $\bar{P}$ , și să presupunem că asupra lui acționează forța  $\bar{Q}$ , care tinde să rotească solidul în

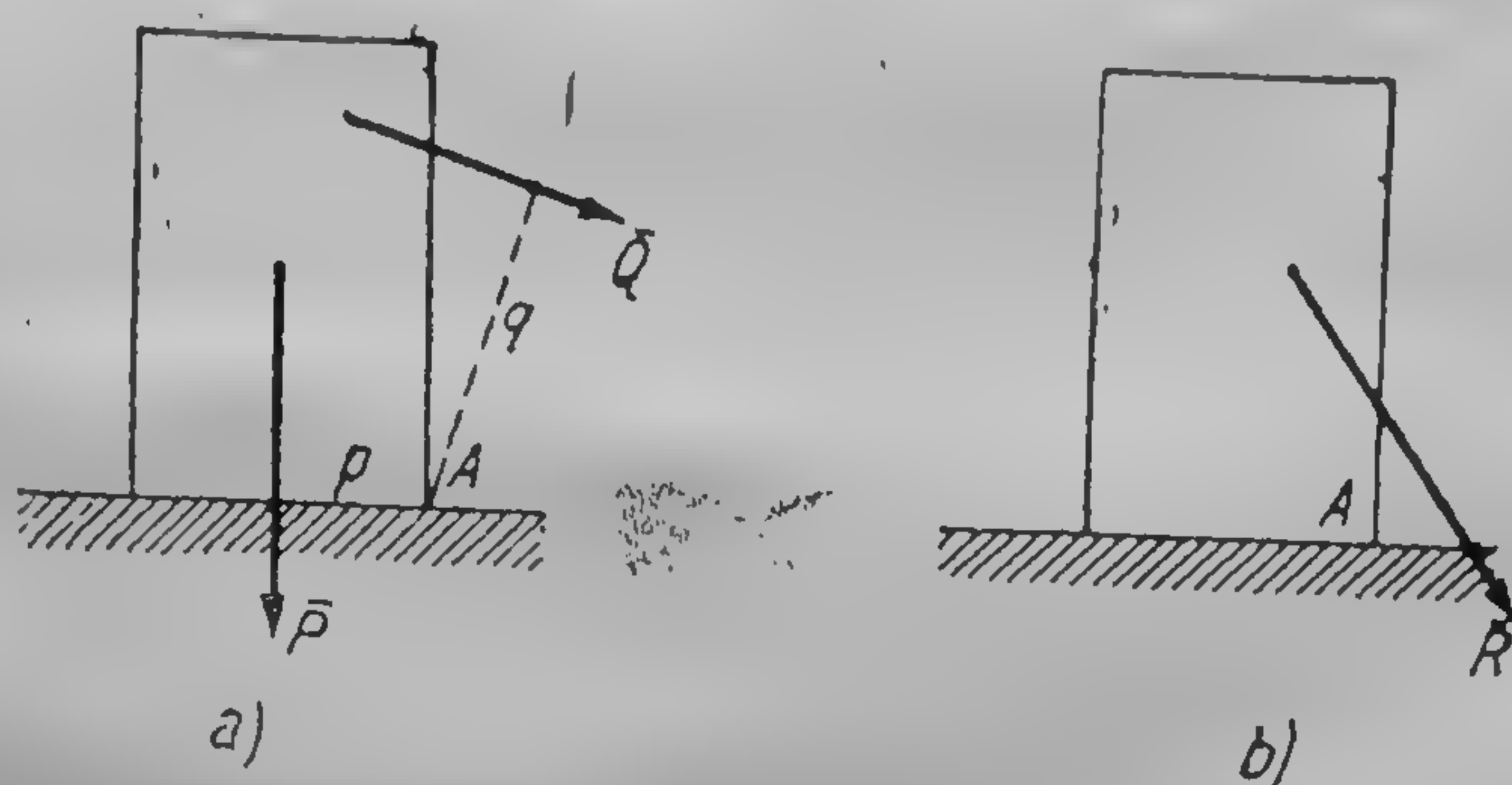


Fig. 88

jurul muchiei  $A$  (fig. 88,  $a$ ). Să presupunem de asemenea, ceea ce are loc în majoritatea aplicațiilor că  $\bar{P}$  și  $\bar{Q}$  sînt situate în același plan. Atunci forțele  $P$  și  $Q$  sînt concurente și vom găsi rezultanta lor după regula paralelogramului. Dacă direcția rezultantei va trece la stînga punctului  $A$ , atunci corpul va fi în echilibru și acest echilibru va fi stabil. Dacă însă direcția rezultantei va trece la dreapta punctului  $A$ , echilibrul este imposibil (fig. 88,  $b$ ). Considerînd, așa cum s-a adoptat în general în acest curs momentul unei forțe în raport cu punctul  $A$  pozitiv cînd tinde să rotească corpul în jurul punctului  $A$  în sens contrar acelor unui ceasornic, tragem concluzia că în primul caz momentul rezultantei va fi pozitiv, iar în al doilea caz negativ. Pe baza teoremei lui Varignon, pentru forțe concurente, momentul rezultantei este egal cu:  $-Qq + Pp$ ; prin urmare, pentru stabilitatea echilibrului, trebuie să avem:

$$-Qq + Pp > 0,$$

sau

$$Pp > Qq.$$

Produsul  $Pp$  se numește *moment de stabilitate*, iar produsul  $Qq$  *moment de răsturnare*. Deci, pentru stabilitatea echilibrului este necesar ca *momentul de stabilitate* să fie mai mare decît *momentul de răsturnare*.



§ 42. Exemple. 31. O bară omogenă grea  $AB$ , de greutate  $P$ , se reazemă fără frecare cu extremitățile ei  $A$  și  $B$  respectiv pe o pardoseală orizontală  $Ox$  și pe un perete vertical  $Oy$  (fig. 89). În punctul  $D$  este legat de bară firul  $OD$ . Se dă  $BC=AC=l$ ,  $\angle BAO=\alpha$ ,  $\angle AOD=\beta$ ; să se găsească tensiunea  $T$  din fir. Deoarece bara, afară de fir mai este supusă și la alte legături fiind rezemată pe pardoseala  $Ox$  și pe peretele  $Oy$ , putem considera bara liberă sub acțiunea a patru forțe:  $\bar{P}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$ , dintre care forța  $P$  este dată, iar reacțiunile  $\bar{T}$ ,  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$  sînt cunoscute ca direcție dar necunoscute ca modul. Pentru determinarea reacțiunii  $\bar{T}$ , egalăm cu zero momentul rezultat al sistemului de forțe în raport cu punctul  $E$ , în care se intersectează forțele  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$ , așa cum se indică în observația din § 40.

Notînd prin  $EK$  perpendiculara coborîtă din punctul  $E$  pe dreapta  $OD$ , vom obține:

$$\text{mom}_E \bar{T} = -T \cdot EK = -T \cdot 2l \sin(\alpha - \beta),$$

$$\text{mom}_E \bar{P} = +P \cdot \frac{BE}{2} = +P \cdot l \cos \alpha,$$

și ecuația din echilibru va fi:

$$-T \cdot 2l \sin(\alpha - \beta) + Pl \cos \alpha = 0,$$

de unde

$$T = \frac{1}{2} P \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Atît timp cît  $D$  este situat mai jos decît  $C$ , avem  $\beta > \alpha$  și soluția este posibilă. Dacă punctul  $D$  coincide cu punctul  $C$ , atunci  $\beta = \alpha$  și  $T$  va avea

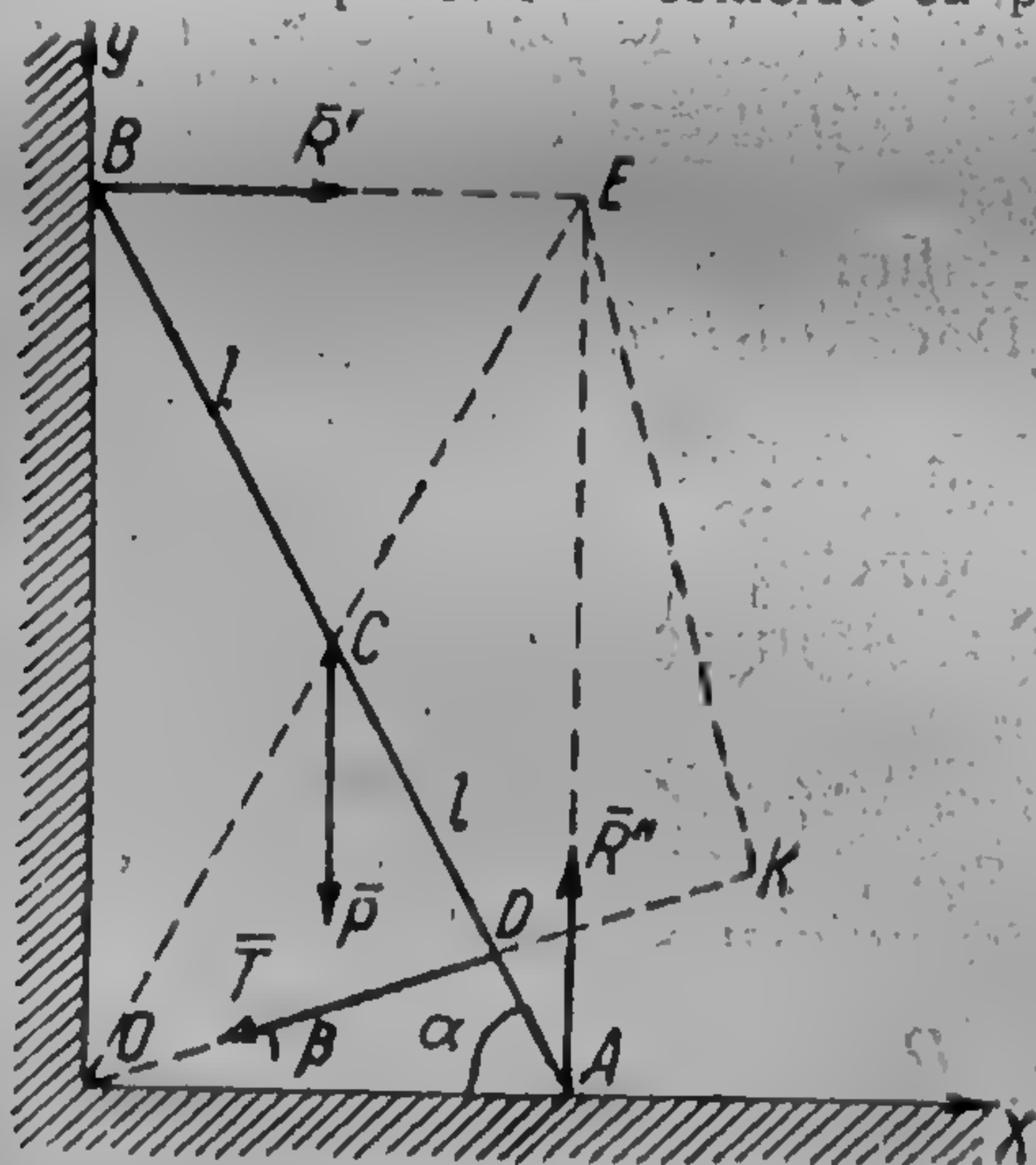


Fig. 89

o valoare infinită; în acest caz dacă bara  $AB$  alunecă pe pereții  $Ox$  și  $Oy$ , punctul  $C$  va descrie un cerc cu centrul în punctul  $O$ , firul nu se va întinde și nu va putea susține bara, decît dacă tensiunea din fir ar tinde către infinit, ca limită a tensiunilor extrem de mari care apar în fir cînd  $\beta$  este mai mic dar foarte apropiat de  $\alpha$ . În sfîrșit, dacă punctul  $D$  va fi situat mai sus decît punctul  $C$ , atunci vom avea  $\alpha < \beta$  și pentru  $T$  vom obține o valoare negativă. Aceasta arată că forța nu va fi dirijată către punctul  $O$ , ci dinspre punctul  $O$ ; firul este comprimat și pentru a împiedica alunecarea barei  $AB$ , trebuie să se înlocuiască firul  $OD$  cu o bară rigidă. Pentru

determinarea reacțiunilor  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$ , se pot folosi ecuațiile de proiecții pe axele  $Ox$  și  $Oy$ , deoarece forța  $\bar{T}$  este determinată, iar forțele  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$



sînt respectiv perpendiculare pe axele  $Ox$  și  $Oy$ . Proiectînd forțele pe axa  $Ox$  obținem:

$$R' - T \cos \beta = 0,$$

sau

$$R' - T \cos \beta = \frac{1}{2} P \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Proiectînd forțele pe axa  $Oy$ , vom avea:

$$R'' - P - T \sin \beta = 0,$$

sau

$$R'' = P + \frac{1}{2} P \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Vedem că dintre cele trei metode de formare a ecuației de echilibru, arătate în paragraful precedent, am folosit aici prima metodă. Dacă s-ar cere să se determine numai reacțiunea  $R'$ , ar fi suficient să se ia momentele în raport cu punctul de intersecție al forțelor  $\bar{T}$  și  $\bar{R}''$ ; pentru determinarea numai a forței  $R''$  ar fi suficient să se ia momentele în raport cu punctul de intersecție al forțelor  $\bar{T}$  și  $\bar{R}'$ . Astfel, aplicarea la această problemă a metodei a treia luînd momentele forțelor față de punctele de intersecție ale reacțiunilor  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$ ,  $\bar{T}$  și  $\bar{R}''$ ,

$\bar{T}$  și  $\bar{R}'$  ne permite să izolăm reacțiunile necunoscute, fără a obține totuși nici o simplificare substanțială, deoarece și prin primul procedeu, astfel cum l-am prezentat aici, reacțiunile  $\bar{T}$ ,  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$  au fost izolate în ecuațiile de echilibru. În această problemă, poziția de echilibru era dată și deci nu au existat condiții de echilibru pentru determinarea ei.

32. O bară omogenă  $AB$  de lungime  $2l$  și greutate  $P$ , se reazemă fără frecare cu capătul  $A$  pe o pardoseală orizontală; bara formează unghiul  $\alpha$  cu pardoseala. Știînd că asupra capătului  $A$  al barei acționează forța orizontală  $\bar{T}$  și că de capătul  $B$  al ei este legat un fir care face unghiul  $\beta$  cu orizontala și este trecut printr-un scripete, la capătul firului fiind legată sarcina  $Q$ , se cere să se găsească condițiile de echilibru.

Deoarece capătul  $A$  al barei se reazemă fără frecare pe pardoseală, reacțiunea  $\bar{R}$  a pardoselii trebuie să fie normală la pardoseală (fig. 90). Să aplicăm la această problemă primul procedeu, luînd sumele proiecțiilor forțelor pe orizontală și pe verticală, și momentul resultant al sistemului de forțe în raport cu punctul  $A$ ; atunci vom obține două ecuații care nu

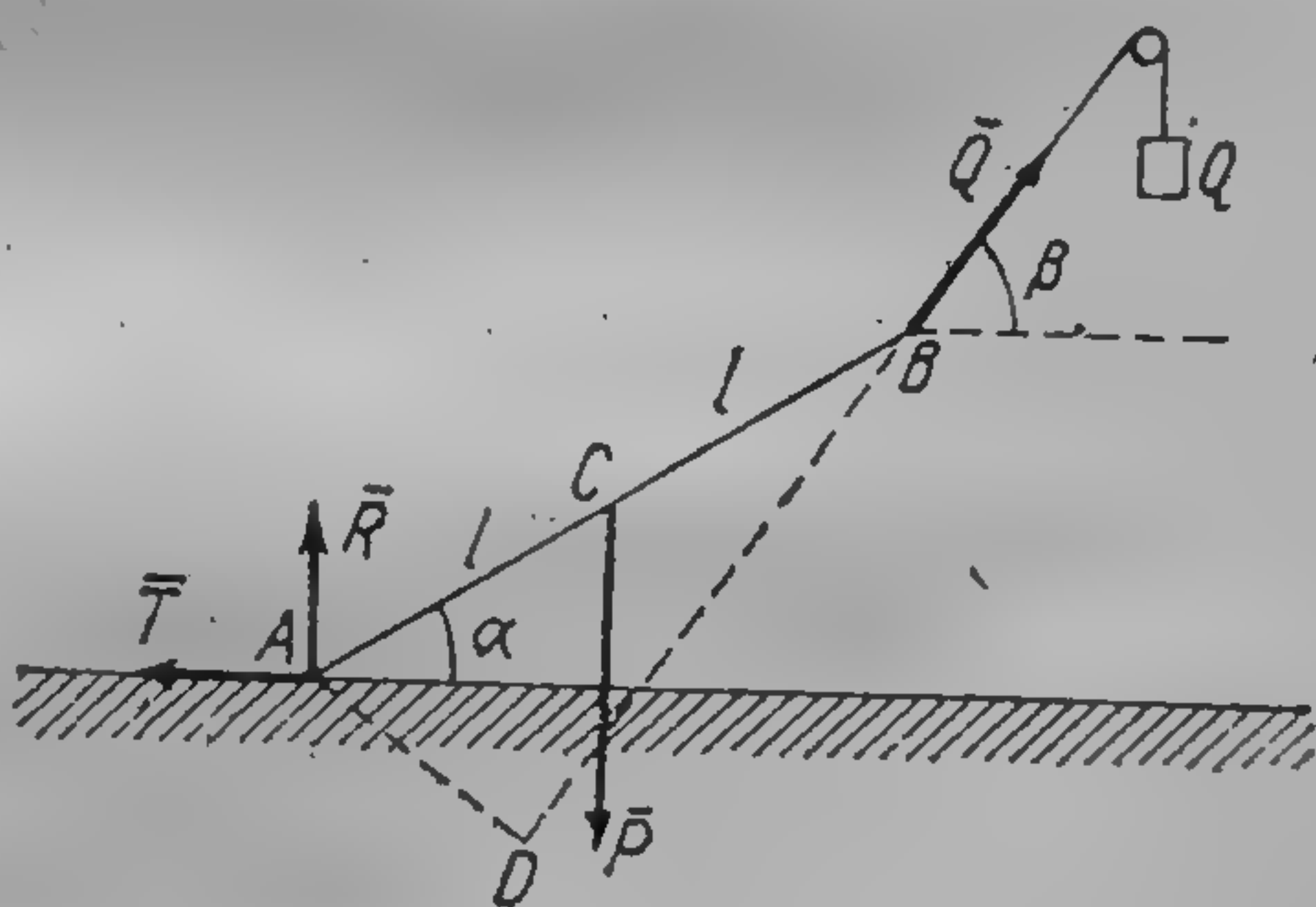


Fig. 90



conțin forța  $\bar{R}$ , adică condițiile de echilibru și o altă ecuație care conține forța  $\bar{R}$  din care vom determina această reacțiune. Deoarece

$$\text{mom}_A \bar{P} = -P \cdot l \cos \alpha,$$

$$\text{mom}_A \bar{Q} = +Q \cdot AD = +Q \cdot 2l \sin(\beta - \alpha),$$

vom avea:

$$-T + Q \cos \beta = 0,$$

$$-P + Q \sin \beta + R = 0,$$

$$-Pl \cos \alpha + Q \cdot 2l \sin(\beta - \alpha) = 0.$$

De aici găsim condițiile de echilibru:

$$2Q \sin(\beta - \alpha) - P \cos \alpha = 0;$$

$$Q \cos \beta - T = 0$$

și reacțiunea

$$R = P - Q \sin \beta.$$

Aceste ecuații pot căpăta o formă puțin modificată. Anume, din ecuația

$$\cos \beta = \frac{T}{Q}$$

găsim:

$$\text{tg } \beta = \frac{\sqrt{Q^2 - T^2}}{T}$$

iar din formula precedentă pentru  $R$ :

$$R = P - \sqrt{Q^2 - T^2}.$$

Mai departe, din ecuațiile:

$$Q \sin \beta = P - R,$$

$$Q \cos \beta = T$$

obținem:

$$Q \sin(\beta - \alpha) = (P - R) \cos \alpha - T \sin \alpha.$$

De aceea, prima condiție de echilibru poate căpăta forma

$$2(P - R) \cos \alpha - 2T \sin \alpha - P \cos \alpha = 0,$$

sau

$$\text{tg } \alpha = \frac{P - 2R}{2T} = \frac{P - 2P + 2\sqrt{Q^2 - T^2}}{2T}.$$

De aici găsim:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{Q^2 - T^2}}{T} - \frac{P}{2T},$$

adică

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta - \frac{P}{2T}.$$



Prin urmare, reacțiunea va avea expresia

$$R = P - \sqrt{Q^2 - T^2}$$

și condițiile de echilibru vor fi de forma

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{Q^2 - T^2}}{T},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta - \frac{P}{2T}.$$

Vedem că totdeauna trebuie să fie  $Q > T$  și unghiul  $\alpha$  tinde către unghiul  $\beta$ , dacă fie  $P$  tinde către zero, fie  $T$  tinde către infinit, fie au loc ambele cazuri.

33. Să se determine greutatea  $P$  a fundației unei macarale, dacă greutatea proprie a macaralei este egală cu  $Q$  și greutatea încărcăturii de ridicat este egală cu  $R$ . Vom simplifica problema neglijând împingerea pământului asupra suprafețelor laterale ale fundației macaralei, ținând seama doar de greutatea părților componente ale macaralei (fig. 91). În această problemă momentul de stabilitate este egal cu  $Pa$ , iar momentul de răsturnare este egal cu  $Qb + Rc$ .

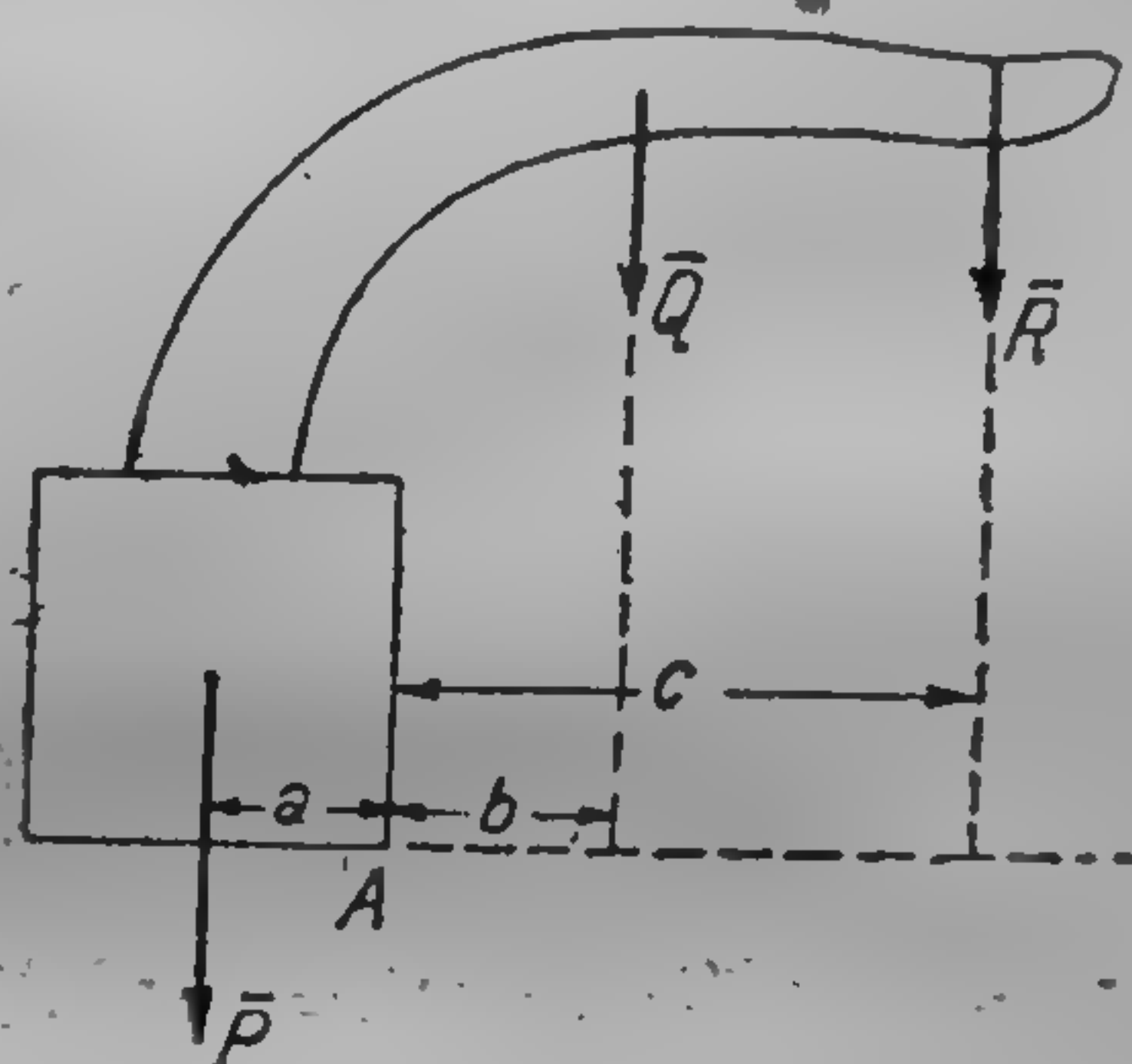


Fig. 91

De obicei ni se dă numărul  $n$  care reprezintă de câte ori trebuie să fie mai mare momentul de stabilitate decât momentul de răsturnare, încât să fim asigurați și în situații excepționale. Astfel, vom obține:

$$Pa = n(Qb + Rc),$$

și de aici găsim greutatea necesară a fundației:

$$P = n \frac{Qb + Rc}{a}.$$



## CAPITOLUL X

### FRECAREA

§ 43. Frecarea de aderență și frecarea de alunecare. Conținutul acestui capitol prin caracterul său diferă mult de conținutul celorlalte capitole. În timp ce mecanica teoretică reprezintă o deducere matematică a teoremelor dintr-o serie de axiome fundamentale și principii și, din această cauză nu are nevoie de motivarea experimentală a rezultatelor obținute, capitolul despre frecare se bazează în întregime pe rezultatele a diferite experiențe, rezultate ce depind de condițiile experiențelor, de materialele din care sînt confecționate corpurile care se freacă și de stadiul de prelucrare al suprafețelor lor; însăși apariția fenomenului de frecare nu este perfect clarificată. Astfel, un studiu asupra frecării ar trebui să intre mai curînd în cadrul unei discipline ajutătoare a mecanicii, decît în cadrul mecanicii teoretice. Totuși, capitolul despre frecare se introduce de obicei în cursul de mecanică teoretică, deoarece în multe aplicații practice ale mecanicii teoretice dacă nu se ține seamă de frecare, rezultatele obținute nu corespund cu realitatea.

Pentru că între două corpuri materiale să se producă frecarea, este necesar ca aceste corpuri să se atingă între ele. Dacă acțiunea frecării constă în faptul că ea împiedică mișcarea unui corp material în raport cu altul, atunci acea frecare se numește *frecare de aderență*; dacă însă acțiunea frecării constă în faptul că ea încetinește mișcarea unui corp material în raport cu un altul, atunci frecarea se numește *frecare de alunecare*.

Să presupunem că un corp material oarecare este așezat pe suprafața unui alt corp oarecare. Dacă nu ar apare nici o forță de frecare de aderență, atunci orice forță paralelă cu suprafața de contact aplicată corpul l-ar pune în mișcare. Totuși, experiența ne dovedește că aceasta nu se întîmplă.

Să examinăm acum următoarea experiență. Pe o masă orizontală stă un corp greu, a cărui greutate este egală cu  $P$  (fig. 92). Este evident că reacțiunea normală  $\bar{R}_n$  a mesei va fi



egală în modul cu  $P$  și anume  $R_n = P$ . Pentru a micșora momentul de răsturnare, să legăm de punctul  $A$ , situat în apropierea suprafeței de bază un fir și să-l trecem peste un scripete. Dacă de fir vom agăța o greutate mică  $F$ , se poate întâmpla ca corpul de pe masă să rămână în echilibru și să nu alunece pe masă. Aceasta arată că între particulele mesei și ale corpului au intervenit unele forțe care dau o rezultantă  $\vec{R}_t$ , dirijată în lungul mesei, în sens contrar cu forța de tracțiune produsă de greutatea  $F$  și care echilibrează această forță. Forța  $\vec{R}_t$  se numește *forță de frecare de aderență*. Vedem că în cazul când există aderență, reacțiunea are o componentă

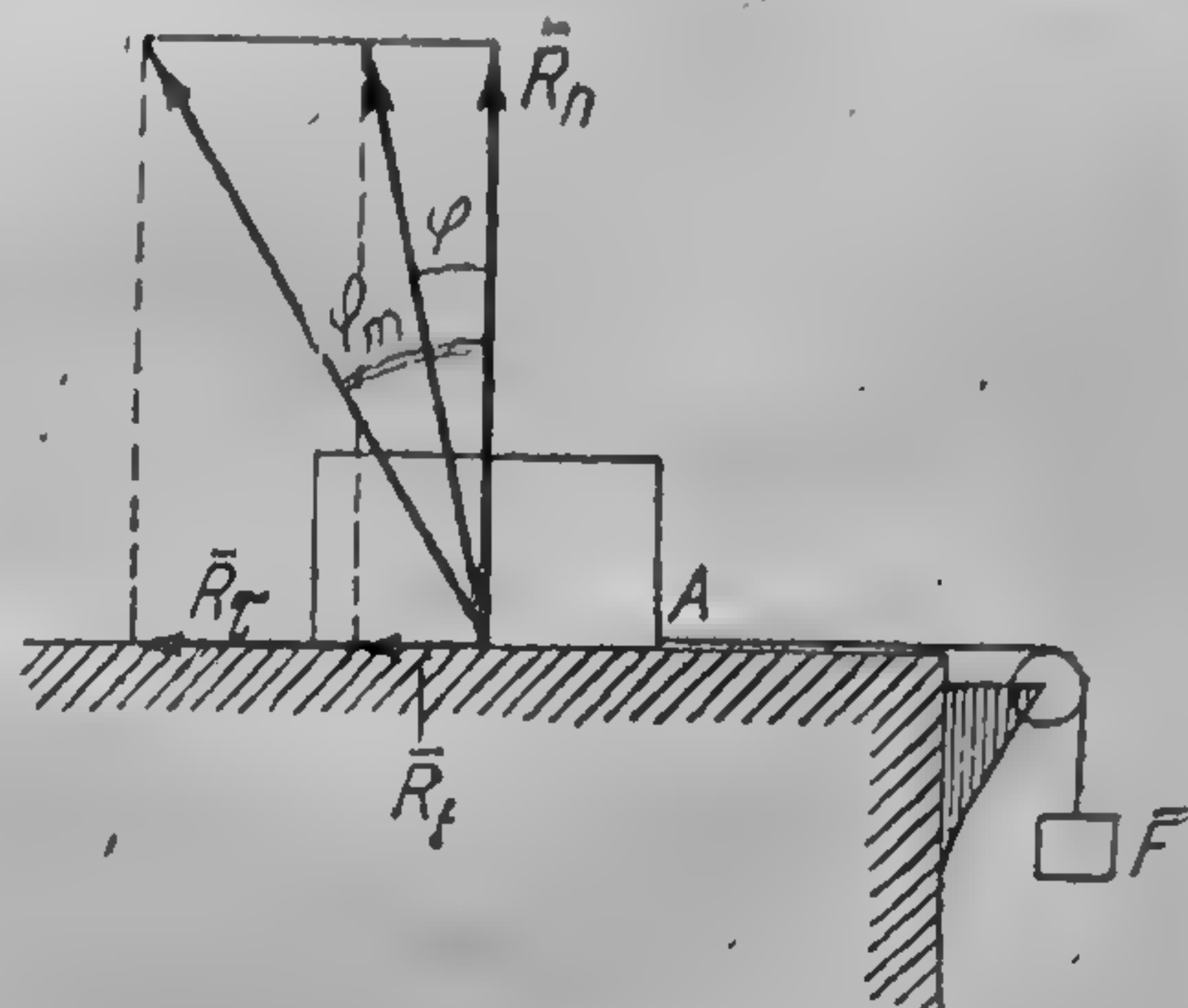


Fig. 92

normală  $\vec{R}_n$  și o componentă tangențială  $\vec{R}_t$ . Compunându-le după regula adunării geometrice, vom obține reacțiunea care formează cu normala la suprafața unghiul  $\varphi$  numit *unghi de frecare*. Este evident că

$$R_t = R_n \operatorname{tg} \varphi. \quad (10.1)$$

Mărim greutatea  $F$ . Forța de aderență se va mări de asemenea dar pînă la o limită oarecare. Să presupunem că valoarea limită a sarcinii și deci și a forței de aderență va fi  $R_t$ , adică mărirea ulterioară a greutății  $F$ , va provoca alunecarea pe masă a corpului. În acest caz vom obține:

$$R_t = R_n \operatorname{tg} \varphi_m, \quad (10.2)$$

unde  $\varphi_m$  este unghiul limită dintre reacțiune și normala la suprafață. Forța  $R_t$  se numește *forță de frecare de alunecare* și unghiul  $\varphi_m$  — *unghi limită de frecare*, sau, obișnuit, *unghi de frecare*. Practic unghiul  $\varphi_m$  este mic; astfel, pentru metalele uscate în frecare, el este circa  $10^\circ$ . Esența frecării de alunecare nu este complet clarificată nici pînă în prezent; în orice caz, se știe că ea constituie un fenomen fizico-mecanic foarte complicat. În ceea ce privește legile frecării, atât în cazul mișcării, cît și în cazul repausului, se stabilesc empiric pentru fiecare pereche de



suprafețe aflate în frecare în funcție de condițiile de frecare. Dar dacă nu se cere o precizie prea mare se pot folosi legi aproximative pentru frecarea de alunecare, stabilite încă la sfârșitul secolului al XVIII-lea în baza experiențelor efectuate cu aparatul reprezentat în fig. 92. Aceste legi sînt următoarele:

1. *Forța de frecare de alunecare este proporțională cu reacțiunea normală.*

2. *Frecarea de alunecare în cazul unei valori date a reacțiunii normale nu depinde de mărimea suprafețelor de contact.*

3. *Frecarea de alunecare depinde de natura și de modul de prelucrare a suprafețelor de contact.*

Din prima lege rezultă, că dacă greutatea corpului va crește de  $n$  ori se va mări și forța de frecare de alunecare de  $n$  ori, astfel încît unghiul  $\varphi$  va rămîne neschimbat. Legea a doua ne arată că dacă nu se schimbă nici greutatea corpului nici natura suprafețelor de contact pe care apare frecarea, ci se modifică numai dimensiunile suprafeței nu se va schimba valoarea forței de frecare de alunecare.

În sfîrșit, orice modificare a naturii suprafețelor de contact de exemplu, lustruirea, ungerea etc., schimbă valoarea forței de frecare de alunecare. Notînd

$$\operatorname{tg} \varphi = \mu, \operatorname{tg} \varphi_m = \mu_m; \quad (10.3)$$

vom obține

$$R_t = \mu R_n, \quad R_\tau = \mu_m R_n. \quad (10.4)$$

În cazul cînd forța  $R_t$  atinge valoarea ei limită  $R_\tau$ , coeficientul  $\mu$  atinge valoarea sa limită  $\mu_m = \operatorname{tg} \varphi_m$ ; această valoare limită  $\mu_m$  se numește *coeficient de frecare*. Astfel, totdeauna vom avea:

$$\mu_m \geq \mu \geq 0. \quad (10.5)$$

Chiar din definiția coeficienților  $\mu$  și  $\mu_m$  [(v. formulele (10.3)], urmează că acești coeficienți sînt numere abstracte, adică dimensiunile lor fizice sînt egale cu zero.

În tabelă de mai jos se dau valorile coeficienților de frecare pentru diferite materiale ce se freacă. [Aceste valori ale coeficienților de frecare sînt luate din Ghidul enciclopedic „Construcția de Mașini” (Mașinostroenie), vol. II, 1948, din capitolul „Frecarea în mașini și mecanisme”; la sfîrșitul aceluia capitol este anexată o bibliografie bogată privind frecarea].



Materiale	Coeficientul de frecare $\mu_m$	
Ulm pe stejar . . . . .	în lungul fibrelor . . . . .	0,69
	perpendicular pe fibre . . . . .	0,57
Stejar pe stejar . . . . .	în lungul fibrelor . . . . .	0,62
	perpendicular pe fibre . . . . .	0,54
Fier pe stejar . . . . .	în lungul fibrelor . . . . .	0,62
Fier pe fontă . . . . .	. . . . .	0,19

Să găsim acum în ce condiții va avea loc echilibrul cînd apar forțe de aderență. Presupunem, că corpul se reazemă cu un punct  $A$  pe suprafața  $S$  a unui alt corp, pe care el poate aluneca (fig. 93). Ridicăm în punctul  $A$  normala  $AA_n$  la suprafața  $S$  și descriem în jurul acestei normale un con circular drept ale cărui generatoare sînt înclinate față de axa lui sub unghiul de frecare  $\varphi_m$ . Din cele ce preced știm că reacțiunea trebuie să fie situată neapărat în interiorul acestui con sau pe suprafața lui laterală, deoarece ea nu poate forma cu normala un unghi mai mare decît  $\varphi_m$ . De aceea, pentru ca echilibrul să fie posibil, forțele efectiv aplicate asupra corpului, trebuie să se reducă la o singură rezultantă  $\vec{F}$  al cărui suport trece prin punctul  $A$  și se găsește în interiorul sau pe suprafața laterală a conului de frecare, deoarece numai în acest caz reacțiunea suprafeței  $S$  poate să echilibreze forțele aplicate corpului. Dacă coeficientul de frecare are valori diferite pentru diverse direcții pornind din  $A$  și situate pe suprafața  $S$ , atunci conul de frecare nu va mai fi circular; el poate fi, de exemplu, eliptic. În cazul cînd corpul are mai multe puncte de contact, același raționament este aplicabil pentru toate punctele. În sfîrșit, în cazul unui contact de-a lungul unor elemente de suprafață sistemul de forțe efectiv aplicate, care acționează asupra corpului, trebuie să se reducă la forțe care intersectează suprafața corpului în interiorul acestor suprafețe elementare de contact, iar suporturile acestor forțe trebuie să formeze cu normalele la suprafață din punctele de intersecție, unghiuri mai mici decît unghiurile maxime de frecare.

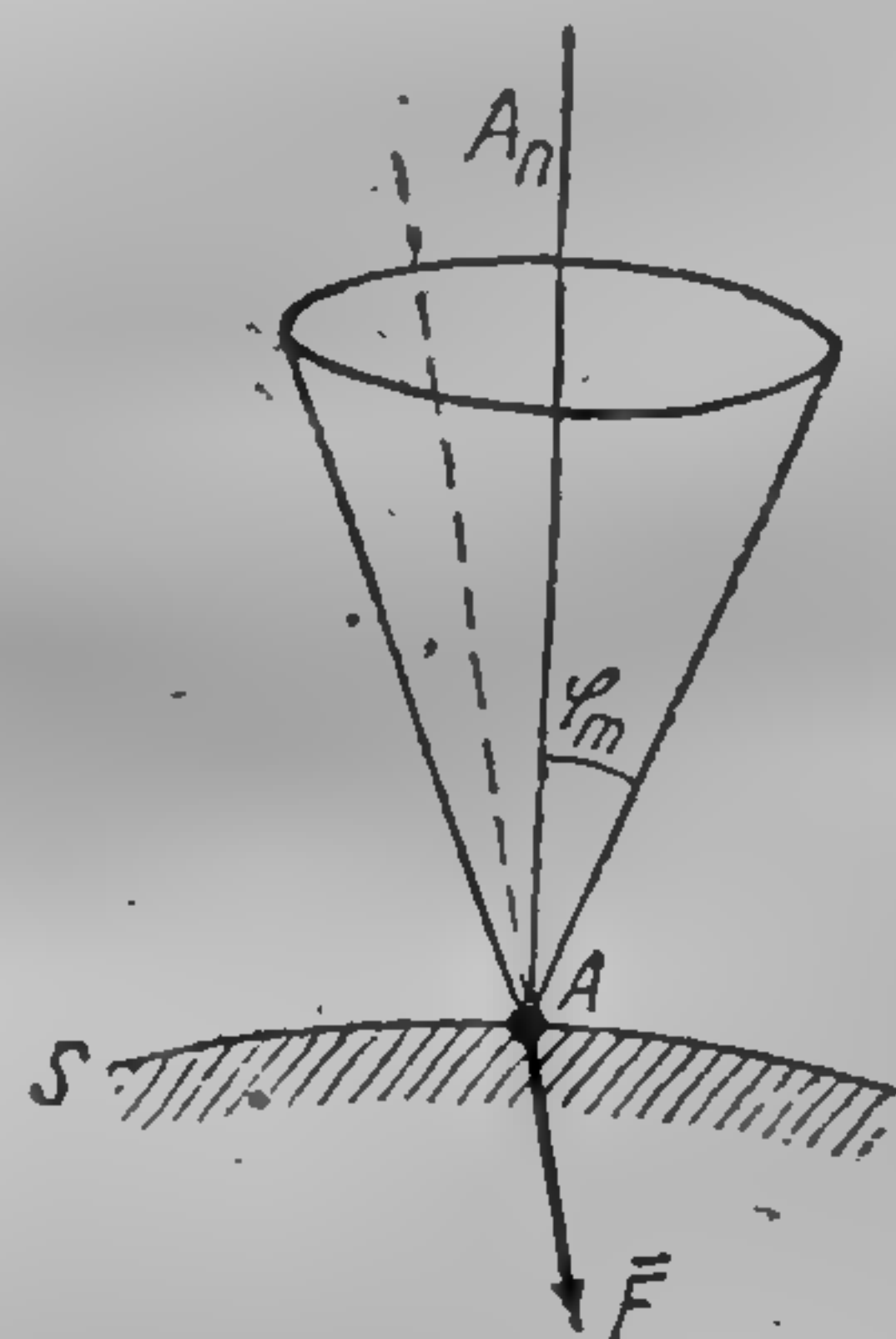


Fig. 93



Deși frecarea de alunecare nu se tratează de fapt în statică, totuși pentru a nu diviza studiul despre frecare, se dau mai jos noțiuni sumare despre frecarea de alunecare. Ca și pentru cazul repausului, forța de frecare  $\bar{R}_t$  de alunecare se exprimă prin formula  $R_t = \mu R_n$ , unde  $\bar{R}_n$  este reacțiunea normală și  $\mu$  este coeficientul de frecare de alunecare. Din experiențe rezultă că, coeficientul  $\mu$  pentru o forță mică  $\bar{R}_n$ , când viteza de alunecare crește de la zero, se mărește începând cu valoarea  $\mu_m$ , trece printr-un maximum și apoi scade și devine mai mic decât coeficientul  $\mu_m$  al frecării de aderență. La creșterea forței  $\bar{R}_n$  valoarea maximă a coeficientului de frecare este atinsă pentru o valoare mai mică a vitezei de alunecare. Dacă însă forța  $\bar{R}_n$  este mare, o dată cu creșterea vitezei de alunecare, coeficientul  $\mu$  scade începând de la valoarea  $\mu_m$  a coeficientului de frecare.

§ 44. Frecarea de rostogolire. Să presupunem că un cilindru circular drept, greu, este așezat pe un plan orizontal sau în particular, o roată grea se găsește pe o șină orizontală; fie  $C$

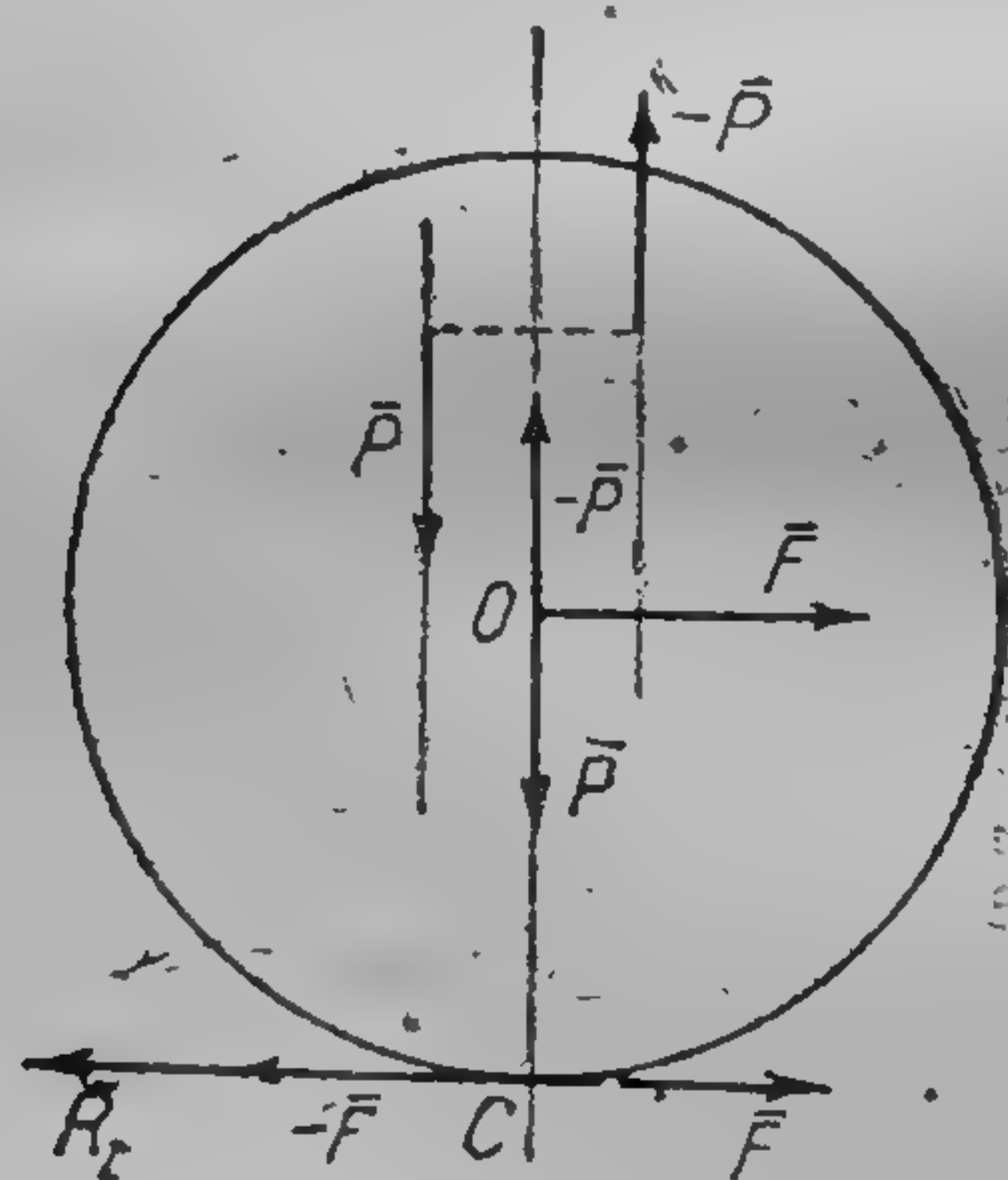


Fig. 94

urma contactului generatoarei cilindrului cu planul sau a roții cu șina (fig. 94). Dacă  $F$  este greutatea roții, atunci roata apasă în punctul  $C$  pe șină cu forța  $P$ , iar șina apasă în punctul  $C$  asupra roții, cu o forță egală și de sens contrar. Deoarece asupra roții se aplică în punctul  $O$  și în direcția  $OC$  greutatea de modul  $P$  și în punctul  $C$  în direcția  $CO$  o reacțiune cu același modul  $P$ , roata va fi în echilibru. Să presupunem că în punctul  $O$  se aplică roții forța  $\bar{F}$  paralelă cu șina. Să mutăm forța  $\bar{F}$  paralel cu ea însăși în punctul  $C$ , adăugând cuplul corespunzător  $(\bar{F}, -\bar{F})$  cu brațul  $a$ , unde  $a$  este raza roții. Dacă  $R_t$  este modulul forței limită de aderență a roții la șină (§ 43) și dacă  $F < R_t$  și roata nu va aluneca. Dar cuplul  $(\bar{F}, -\bar{F})$  va tinde să rotească roata (v. § 37). Experiența ne arată însă că dacă forța  $F$  este mică în modul, adică momentul  $Fa$  al cuplului  $(\bar{F}, -\bar{F})$  nu este mare, atunci rotația nu se va produce și roata va rămâne în echilibru. Acest echilibru se poate explica



numai prin faptul că trebuie să existe un al doilea cuplu opus ca sens de rotație cuplului  $(\bar{F}, -\bar{F})$  avînd momentul egal cu  $Fa$ . O explicație exactă a provenienței acestui cuplu încă nu există, dar în orice caz este clar că aceste cupluri reale, roata și șina, intră în contact nu de-a lungul unei drepte cu urma  $C$ , ci datorită deformațiilor lor contactul are loc pe o suprafață oarecare. Interacțiunea roții și a șinei creează cuplul care se opune tendinței de rotație a roții. Din experiență se știe că momentul acestui cuplu este proporțional cu greutatea  $P$  a roții, adică poate fi scris sub forma  $Pd$ , așa că vom avea:

$$Fa = Pd; \quad (10.6)$$

este evident că mărimea  $d$  trebuie să aibă dimensiunile unei lungimi. Vom mări momentul  $Fa$  al cuplului de rotație  $(\bar{F}, -\bar{F})$ ; atunci și momentul  $Pd$  va crește, dar numai pînă la o valoare limită  $Ps$ . Dacă momentul  $Fa$  al cuplului de rotație va fi mai mare decît  $Ps$ , roata se va învîrți. Astfel, pentru echilibrul roții este necesar să avem:

$$Fa \leq Ps \quad (10.7)$$

Coeficientul  $s$  se numește *coeficient de frecare de rostogolire*. Se consideră că prin rostogolirea roții, coeficientul de frecare de rostogolire își păstrează aceeași valoare  $s$ , pe care a avut-o în poziția limită de trecere a roții din starea de repaus în starea de mișcare. Mărimea  $s$  are dimensiunile unei lungimi ca și mărimea  $d$ ; în general mărimea  $s$  se exprimă în centimetri. Tabela de mai jos, care este luată din aceeași lucrare ca și cea precedentă, ne dă valoarea coeficientului  $s$  în centimetri pentru unele materiale.

Materiale	Coeficientul de frecare $s$ (în cm)
Lemn pe lemn	0,05—0,06
Oțel moale pe oțel moale	0,005
Lemn pe oțel	0,03—0,04
Bilă de oțel călit pe oțel	0,001

Din formula (10.7) rezultă că pentru echilibru trebuie să avem:  $F \leq \frac{s}{a} P$ . Deoarece avem:  $R_r = \mu_m P$ , trebuie să mai avem:  $F \leq \mu_m P$ .



Astfel, ca roata să nu se rostogolească și să nu alunece, forța  $\bar{F}$  trebuie să satisfacă două inegalități:

$$\left. \begin{aligned} F &\leq \frac{s}{a} P, \\ F &\leq \mu_m P. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

De obicei fracția  $\frac{s}{a}$  este mai mică decât valoarea  $\mu_m$  ceea ce se poate vedea din cele două tabele de mai sus, prin urmare rolul de bază îl joacă prima inegalitate (10.8) și de aceea este mult mai ușor, de exemplu, să facem ca roata să se rostogolească decât să o facem să alunece. De aici rezultă avantajul rotelor pentru transportul greutateilor.

§ 45. **Frecarea de pivotare.** Să presupunem că pe o suprafață orizontală este așezată o sferă grea; notăm centrul sferei prin  $O$  și punctul de tangență al sferei cu planul prin  $C$ . Rotirea sferei în jurul dreptei  $CO$  se numește pivotare. Experiența ne arată că dacă momentul cuplului care provoacă pivotarea sferei este prea mic, atunci sfera nu va pivota. De aici rezultă că acțiunea cuplului de mișcare este anulată prin acțiunea unui alt cuplu, de existența căruia depinde *frecarea de pivotare*. Apariția acestui al doilea cuplu se poate explica în felul următor. Sfera și planul prin atingere se va deforma și vor intra în contact nu numai într-un punct, ci pe o suprafață oarecare. Când apare pivotarea, punctele de pe suprafața sferei vor aluneca în raport cu planul, adică frecarea de pivotare este o variantă a frecării de alunecare. Datorită acestei alunecări, între sferă și plan apar forțe de frecare ce produc cuplul care împiedică pivotarea. Din studiul frecării de alunecare se poate trage concluzia că, dacă momentul cuplului de rotire este mai mic decât un anumit moment limită, nu se va produce pivotarea. Experiențele dovedesc că acest moment limită are expresia  $nP$ , unde  $P$  este greutatea sferei și  $n$  este *coeficientul de frecare de pivotare*; coeficientul  $n$  are dimensiunile unei lungimi. Ca să nu existe pivotare, modulul momentului cuplului de rotire trebuie să fie mai mic decât  $nP$ . Dacă însă modulul momentului cuplului de rotire este mai mare decât  $nP$ , atunci pivotarea se va produce și va întâmpina o rezistență reprezentată prin cuplul de moment  $nP$ . Coeficientul de frecare de pivotare  $n$  este foarte mic, el este de 5—10 ori mai mic decât coeficientul  $s$  al frecării de rostogolire.



§ 46. Exemple. 34. La rezolvarea problemelor de echilibru cu frecare, mai ales în cazul frecării de alunecare, se pot utiliza metode geometrice și analitice. Să arătăm aceasta prin câteva exemple.

Să se găsească condiția de echilibru al unui punct greu cu greutatea  $P$ , așezat pe un plan înclinat care formează cu orizontala unghiul  $\alpha$ , ținând seama și de frecarea de aderență.

Presupunem că pe planul înclinat  $BC$ , punctul material se găsește în punctul  $A$ . Vom expune mai întâi metoda geometrică de rezolvare a problemei. Pentru aceasta vom duce în punctul  $A$  normala  $AA_n$  la planul înclinat și vom construi unghiul de frecare  $DAE$ , deoarece în cazul problemei plane, conul de frecare va trebui să fie înlocuit prin intersecția conului cu planul, prin unghiul de frecare. Dacă suportul forței  $P$  trece în interiorul unghiului de frecare, așa cum se arată în fig. 95, atunci punctul va fi în echilibru. Dacă vom mări unghiul  $\alpha$ , atunci suportul forței  $P$  se va apropia de latura  $AE$ . Valoarea limită a unghiului  $\alpha$ , pentru care echilibrul este încă posibil, va fi astfel încât suportul forței  $P$  se va suprapune peste dreapta  $AE$ ; din desen se vede că în acest caz avem  $\alpha = \varphi_m$ . Astfel, echilibrul va fi posibil pentru orice valoare a unghiului  $\alpha$ , care satisface inegalitatea

$$\alpha \leq \varphi_m.$$

Să rezolvăm acum analitic aceeași problemă. Asupra punctului  $A$  acționează forțele concurente având modulele egale cu  $P$ ,  $R_n$  și  $\mu R_n$ . Ca să obținem ecuația de echilibru, proiectăm toate forțele pe direcțiile  $AA_n$  și  $AB$  și sumele proiecțiilor le vom egala cu zero; obținem:

$$-P \cos \alpha + R_n = 0, \quad P \sin \alpha - \mu R_n = 0;$$

de aici găsim:

$$P \sin \alpha = \mu R_n, \quad P \cos \alpha = R_n.$$

Împărțind aceste egalități termen cu termen pentru a elimina forța  $R_n$ , și ținând seama de prima formulă (10.3), obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu = \operatorname{tg} \varphi,$$

sau

$$\alpha = \varphi.$$

De aici ajungem la inegalitatea precedentă:

$$\alpha \leq \varphi_m.$$

Este evident că determinând pe cale experimentală valoarea limită a unghiului  $\alpha$ , găsim totodată valoarea unghiului  $\varphi_m$  și valoarea coeficientului

$$\mu_m = \operatorname{tg} \varphi_m.$$

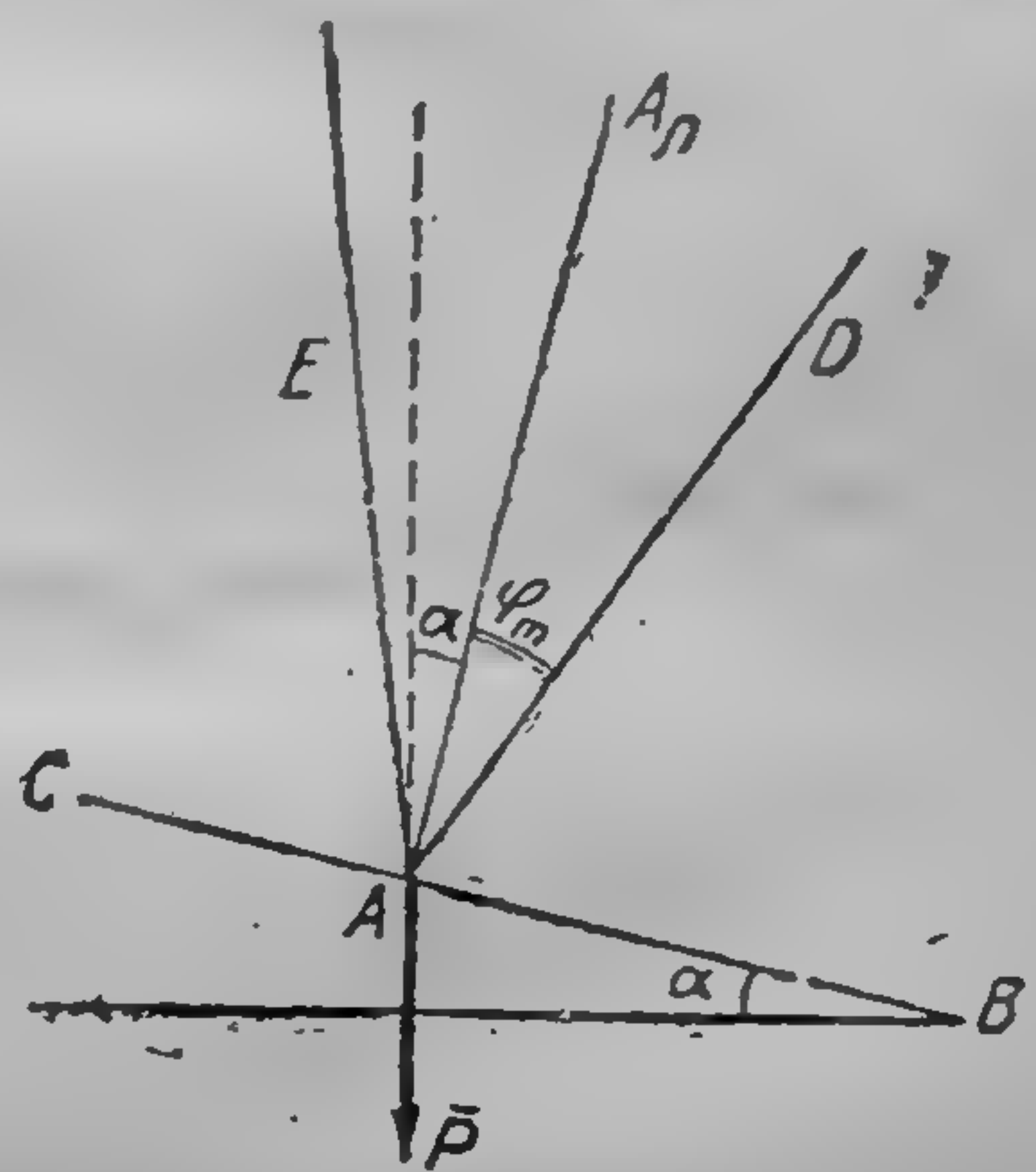


Fig. 95



35. Să se găsească condiția de echilibru a unei roți de rază  $a$  și greutate  $P$ , așezată pe o șină înclinată care formează unghiul  $\alpha$  cu orizontala. Deoarece modulul forței  $\bar{F}$  care tinde să producă rostogolirea roții este egal cu  $F = P \sin \alpha$  (fig. 96), modulul momentului de rostogolire va fi egal cu  $M = Pa \sin \alpha$ . Modulul forței  $\bar{\Phi}$ , forța cu care roata apasă pe șină, va fi egal cu  $P \cos \alpha$ . Prin urmare, aplicând formula (10.7), vom obține:

$$Pa \sin \alpha \leq Ps \cos \alpha,$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{s}{a}.$$

Putem determina valoarea coeficientului  $s$  pentru care apar simultan și rostogolirea și alunecarea. Vom găsi:

$$s = a \operatorname{tg} \alpha_m.$$

36. Să se găsească condițiile de echilibru ale barei  $AB$ , care se reazemă cu frecare cu capetele sale  $A$  și  $B$  pe o pardoseală orizontală și pe un perete vertical. Bara  $AB$ , împreună cu forțele care acționează asupra ei, este reprezentată în fig. 97. Ducem în punctele  $A$  și  $B$  normalele la pardoseală și perete și construim unghiurile de frecare  $KAL$  și  $LBM$ . Vom obține o porțiune  $KLMN$  a planului, un patrulater, cuprinsă în interiorul

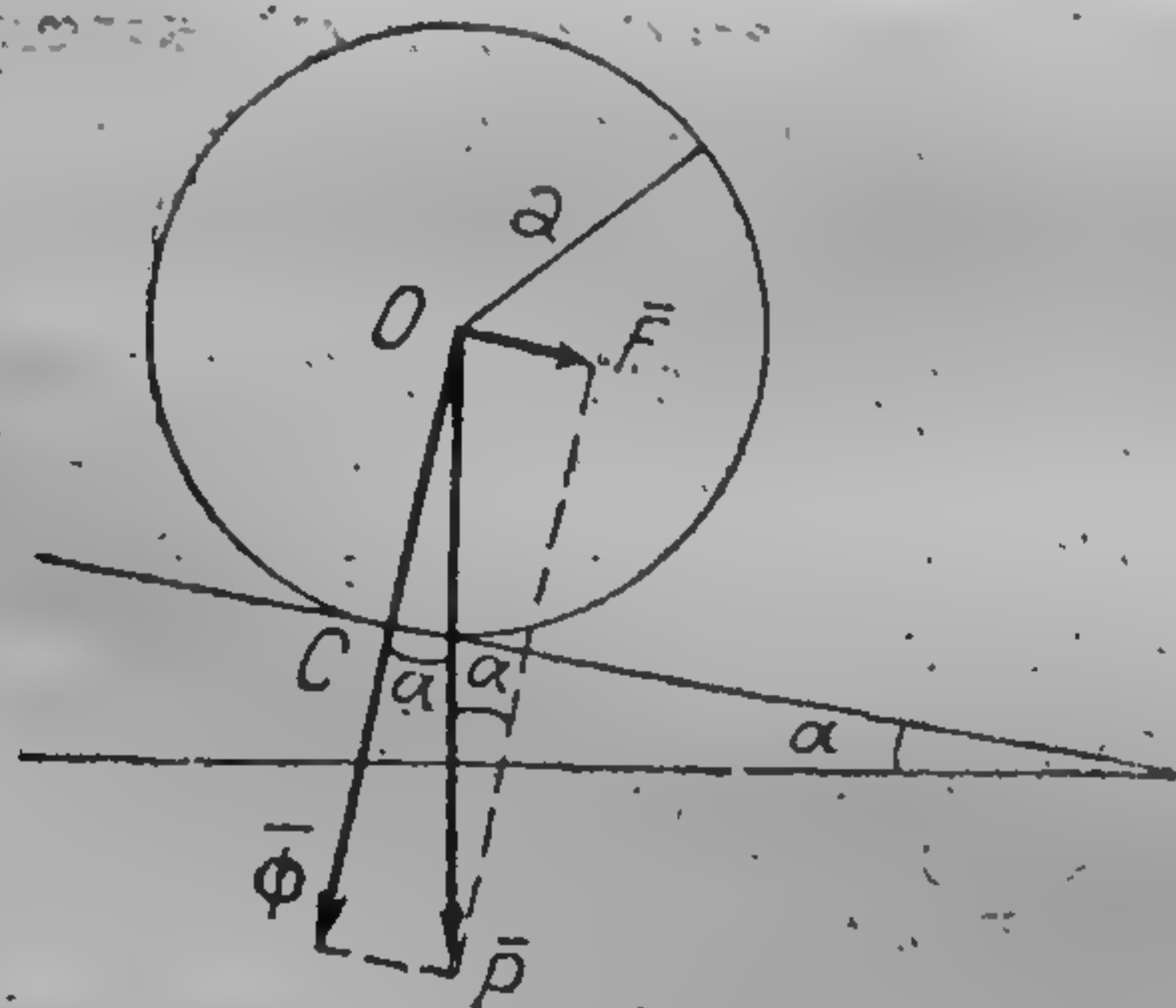


Fig. 96

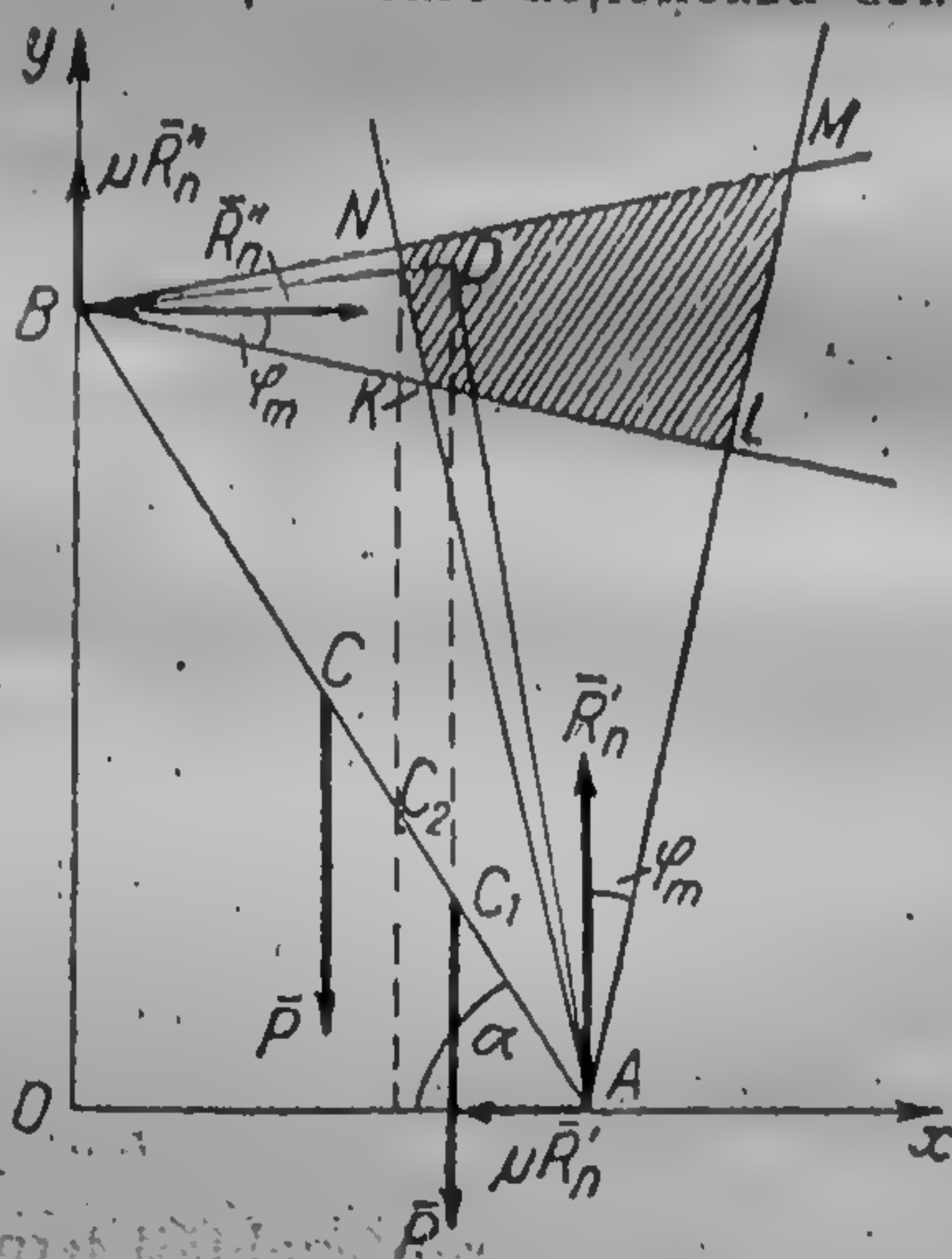


Fig. 97

celor două unghiuri; acest patrulater este hașurat în fig. 97. Presupunem că greutatea  $\bar{P}$  a barei este aplicată în punctul  $C_1$ . Prolungind suportul acestei forțe  $\bar{P}$ , vedem că el intersectează patrulaterul hașurat. Luăm un punct oarecare  $D$  de pe suport situat în interiorul patrulaterului. Unim punctul  $D$  cu punctele  $A$  și  $B$  și mutăm forța  $\bar{P}$  în punctul  $D$ . Descompunând forța  $\bar{P}$  în două forțe după direcțiile  $DA$  și  $DB$  și mutând ambele componente obținute în punctele  $A$  și  $B$ , vedem că aceste componente se pot echilibra cu reacțiunile, deoarece suporturile lor se găsesc în interiorul



unghiurilor de frecare. Prin urmare, în acest caz avem echilibru. Să presupunem acum că forța  $P$  este aplicată în punctul  $C$ . Prelungind suportul acestei forțe, acesta nu intersectează patrulaterul hașurat. Prin urmare, forța  $\bar{P}$  nu se poate descompune în acest caz în două componente ale căror suporturi să fie interioare unghiurilor  $KAL$  și  $LBM$  și echilibrul este imposibil. Ducem prin punctul  $N$  o verticală. Este evident că dacă centrul de greutate al barei se găsește în dreapta acestei verticale, va exista echilibru; dacă însă centrul de greutate al barei se află la stînga acestei verticale, echilibrul este imposibil. Prin aceasta se explică de ce o scară sprijinită de perete nu alunecă cînd omul stă pe treptele ei inferioare și uneori începe să alunece cînd omul se urcă pe treptele ei superioare. Este evident că o dată cu creșterea unghiului  $\alpha$  dreapta  $AB$  se va apropia de dreapta  $AN$  și poziția limită a punctului  $C$ , pentru care echilibrul este posibil, se va apropia de punctul  $B$ .

Să rezolvăm acum aceeași problemă pe cale analitică. Presupunem, pentru a simplifica raționamentele, că coeficienții  $\mu$  au în punctele  $A$  și  $B$  valori egal și centrul de greutate al barei se găsește la mijlocul dreptei  $AB$  a cărei lungime o vom nota prin  $2l$ . Aupra barei acționează cinci forțe, ale căror mărimi sînt:

$$\mu R'_n, R_n, P, \mu R''_n, R''_n.$$

Formăm ecuațiile de echilibru, egălînd cu zero suma proiecțiilor forțelor pe axele  $Ox$  și  $Oy$  și suma momentelor în raport cu punctul  $O$ . Vom obține:

$$R''_n - \mu R'_n = 0,$$

$$R'_n + \mu R''_n - P = 0,$$

$$R'_n \cdot 2l \cos \alpha - P \cdot l \cos \alpha - R''_n \cdot 2l \sin \alpha = 0.$$

Din prima ecuație avem:

$$R''_n = \mu R'_n.$$

Introducînd această valoare în a doua ecuație vom găsi:

$$R'_n = P \frac{1}{1 + \mu^2},$$

și prin urmare vom avea:

$$R''_n = P \frac{\mu}{1 + \mu^2}.$$

Introducem aceste valori ale lui  $R'_n$  și  $R''_n$  în ultima dintre ecuațiile de echilibru, pe care am simplificat-o în prealabil cu  $l$ ; după transformări simple obținem:

$$\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \cos \alpha = \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \sin \alpha.$$

De aici vom avea:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \mu^2}{2\mu}.$$



Introducem pentru mărimea  $\mu$  valoarea ei  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ ; atunci vom avea:

$$\frac{1-\mu^2}{2\mu} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \operatorname{ctg} 2\varphi,$$

și obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 2\varphi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - 2\varphi \right),$$

adică

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi.$$

Deoarece unghiul  $\varphi$  poate varia de la 0 până la  $\varphi_m$ , atunci, pentru ca echilibrul să fie posibil, va trebui ca valorile unghiului  $\alpha$  să satisfacă inegalitățile

$$\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq \frac{\pi}{2} - 2\varphi_m.$$

De exactitatea soluției obținute nu este greu să ne convingem pe cale geometrică. Dacă  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  atunci bara  $AB$  este verticală de-a lungul peretelui  $Oy$  și echilibrul este posibil. Dacă  $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_m$ , atunci unghiul  $BAN = \varphi_m$ , și punctul  $N$  este mijlocul bazei unui triunghi isoscel ale cărui laturi sînt  $AB$  și verticala în punctul  $A$ . De aceea, dreapta care trece prin mijlocul  $C$  al dreptei  $AB$  și este paralelă cu verticala din punctul  $A$  va trece prin punctul  $N$  și vom obține astfel poziția limită în care echilibrul este încă posibil.

37. Să se găsească condițiile de echilibru ale unei bare grele  $AB$  de lungimea  $2l$ , a cărei greutate  $P$  acționează după o direcție formînd unghiul  $\alpha$  cu orizontala  $P$ . Capătul  $A$  al barei se reazemă cu frecare pe o pardoseală orizontală, iar de capătul  $B$  este legat un fir înclinat sub unghiul  $\beta$  față de orizontală, fir ce este trecut printr-un scripete; la capătul firului este legată greutatea  $Q$ . Revenind la fig. 90 și înlocuind  $T$  prin  $\mu R$ , vom obține următoarele ecuații de echilibru:

$$-\mu R + Q \cos \beta = 0,$$

$$-P + Q \sin \beta + R = 0,$$

$$-P \cdot l \cos \alpha + Q \cdot 2l \sin(\beta - \alpha) = 0,$$

sau

$$\mu R = Q \cos \beta,$$

$$R = P - Q \sin \beta,$$

$$2Q (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) = P \cos \alpha.$$

Din ultima ecuație avem:

$$(2Q \sin \beta - P) \cos \alpha = 2Q \cos \beta \sin \alpha,$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta - \frac{P}{2Q \cos \beta}.$$



Eliminind forța  $\bar{R}$  din prima și a doua ecuație vom avea:

$$Q \cos \beta = \mu P - \mu Q \sin \beta,$$

sau

$$Q (\cos \beta + \mu \sin \beta) = \mu P.$$

Inlocuind coeficientul  $\mu$  prin valoarea lui conform formulei (10.3) obținem:

$$Q \cos (\beta - \varphi) = P \sin \varphi.$$



## CAPITOLUL XI

### SISTEM ARBITRAR DE FORȚE

§ 47. Metoda vectorială de reducere a unui sistem de forțe la cel mai simplu sistem. După studiul sistemelor particulare de forțe să ne ocupăm cu reducerea unui sistem de forțe, cînd forțele au o poziție arbitrară în spațiu; să presupunem că se dau forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ , aplicate în punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , ale unui solid absolut rigid.

Putem reduce sistemul dat de forțe la unul mai simplu, în mai multe moduri.

*Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce în general la trei forțe, care trec prin trei puncte arbitrar alese în spațiu și nesituate în linie dreaptă.*

— În adevăr, fie  $O_1, O_2$  și  $O_3$  aceste trei puncte. Unim punctul  $A_1$  cu punctele  $O_1, O_2, O_3$  și construim paralelipipedul a cărui diagonală este forța  $\vec{F}_1$ , și ale cărui muchii sînt dreptele  $A_1O_1, A_1O_2$  și  $A_1O_3$ . Servindu-ne de legea paralelipipedului (§ 3), putem descompune forța în trei componente, după dreptele  $A_1O_1, A_1O_2, A_1O_3$  și apoi mutăm punctele de aplicație ale acestor componente de-a lungul suportului lor în punctele  $O_1, O_2$  și  $O_3$ . Aceeași descompunere o putem face și cu forțele  $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ . Astfel, obținem trei sisteme de forțe concurente aplicate în punctele  $O_1, O_2$  și  $O_3$ . Înlocuind aceste forțe concurente prin rezultantele lor, vom ajunge la trei forțe, aplicate în punctele  $O_1, O_2$  și  $O_3$  din spațiu alese în prealabil.

*Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce, în general, la o singură forță aplicată într-un punct din spațiu ales arbitrar și la un cuplu.*

Să alegem punctul arbitrar  $O$  din spațiu și să-l numim punct de reducere; (v. § 39). Introducem notațiile

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OA_2}, \quad \vec{r}_3 = \overrightarrow{OA_3}, \dots$$



Mutăm punctele de aplicație ale tuturor forțelor  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , în punctul  $O$ , adăugînd cuplurile (§ 39) cu momentele  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, \dots$ , unde:

$$\bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1, \quad \bar{M}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}_2, \quad \bar{M}_3 = \bar{r}_3 \times \bar{F}_3, \dots$$

Adunînd vectorial toate forțele  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$ , aplicate în punctul  $O$ , obținem în punctul  $O$ , rezultanta  $\bar{F}$ :

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots = \sum_n \bar{F}_n, \quad (11.1)$$

Adunînd toate cuplurile, obținem *cuplul rezultant* cu momentul  $\bar{M}$ :

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \dots = \sum_n \bar{M}_n = \sum_n \bar{r}_n \times \bar{F}_n \quad (11.2)$$

Este evident că vectorul  $\bar{M}$  nu este altceva decît momentul rezultant al sistemului de forțe dat, calculat în raport cu punctul de reducere. Astfel, sistemul de forțe s-a redus la o forță rezultantă aplicată într-un punct arbitrar ales din spațiu, și la un cuplu.

*Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce, în general, la două forțe necoplanare, dintre care una se aplică într-un punct din spațiu arbitrar ales.*

În adevăr, să presupunem că efectuînd reducerea forțelor, așa cum s-a arătat anterior, am obținut forța rezultantă  $\bar{F}$ , aplicată într-un punct  $O$  luat arbitrar în spațiu și cuplul de moment  $\bar{M}$ . Să ducem prin punctul  $O$  planul  $\pi$ , perpendicular pe momentul  $\bar{M}$ , și să construim în acest plan cuplul  $(\bar{F}', -\bar{F}')$  cu momentul  $\bar{M}$  în așa fel ca una din forțele cuplului, de exemplu  $-\bar{F}'$ , să treacă prin punctul  $O$ . Atunci forțele  $\bar{F}'$  și  $\bar{F}$  se pot compune, înlocuindu-le printr-o singură forță  $\bar{\Phi}$ , care nu mai este situată în planul  $\pi$ , și, în acest fel vom reduce sistemul forțelor dat, la două forțe  $\bar{F}$  și  $\bar{\Phi}$ , care nu sînt situate în același plan, forța  $\bar{\Phi}$  fiind aplicată în punctul în prealabil ales.

Afară de aceste trei moduri de reducere a forțelor, vom mai indica pe al patrulea, care este cel mai important. Presupunem din nou că efectuînd reducerea sistemului de forțe dat, am obținut rezultanta  $\bar{F}$ , aplicată în punctul  $O$  luat arbitrar în spațiu și cu-



plul cu momentul  $\bar{M}$  (fig. 98). Descompunem momentul  $\bar{M}$  în două componente: momentul  $\bar{m}$  paralel la forța rezultantă  $\bar{F}$  și momentul  $\bar{M}_0$ , perpendicular pe forța  $\bar{F}$ . Să ducem prin punctul  $O$  planul  $\pi$  perpendicular pe vectorul  $\bar{M}_0$ ; acest plan va conține forța  $\bar{F}$ . Construim în planul  $\pi$  cuplul cu momentul  $\bar{M}_0$  astfel ca

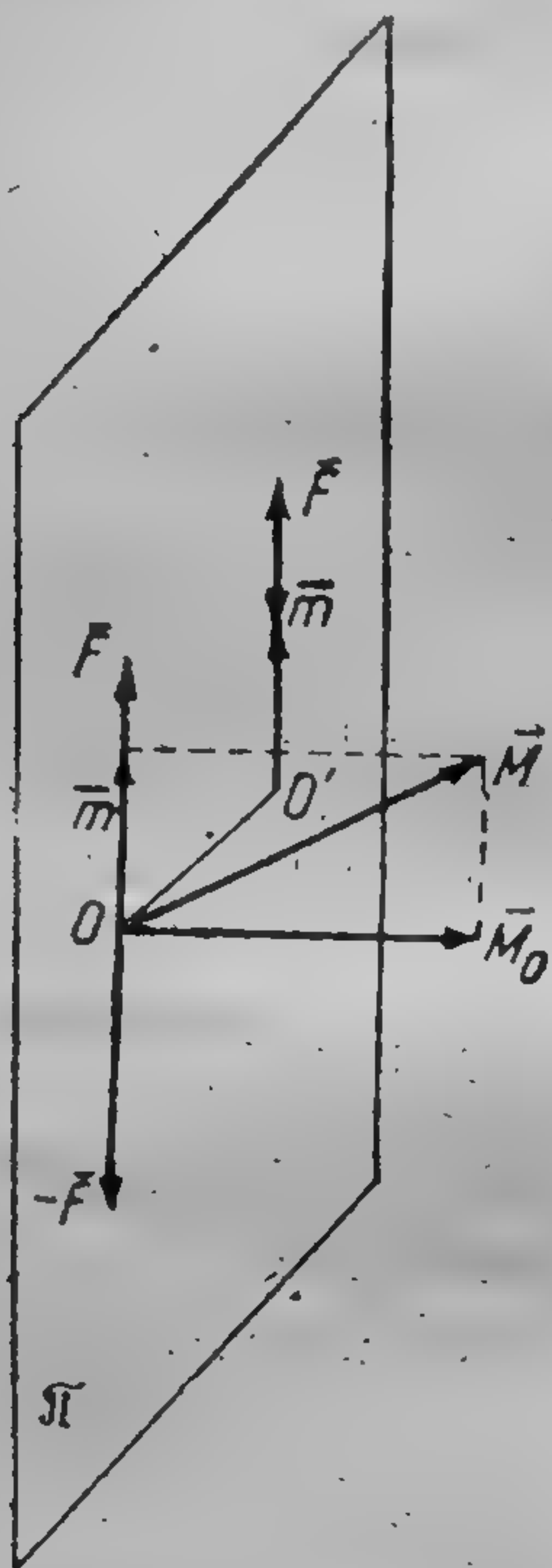


Fig. 98

una din forțele cuplului să fie egală cu  $-\bar{F}$  și să fie aplicată în punctul  $O$ ; atunci, cealaltă forță a cuplului va fi aplicată într-un punct oarecare  $O'$ , astfel ca să avem  $F \cdot OO' = M_0$ , de unde găsim:

$$OO' = \frac{M_0}{F}$$

Forțele  $\bar{F}$  și  $-\bar{F}$  aplicate în punctul  $O$  se echilibrează și ajungem la forța  $\bar{F}$  aplicată în punctul  $O'$  și la cuplul de moment  $\bar{m}$  dirijat paralel cu suportul forței  $\bar{F}$ . Deoarece momentul  $\bar{m}$  al cuplului este un vector liber, se poate transporta și el în punctul  $O'$ . Observăm că dacă

$\angle(\bar{F}, \bar{M})$  va fi ascuțit, atunci momentul  $\bar{m}$  va fi dirijat în același sens cu forța  $\bar{F}$  (cazul fig. 98); dacă însă  $\angle(\bar{F}, \bar{M})$  este obtuz, atunci momentul  $\bar{m}$  și forța  $\bar{F}$  vor fi dirijate în sensuri contrare. Sistemul

compus dintr-o forță și un cuplu al cărui moment este dirijat pe suportul forței se numește dinam. Dacă se găsește numai un punct  $O'$  în care forța și momentul cuplu-

lui sînt coliniare, atunci se pot găsi și

toate celelalte asemenea puncte; toate aceste puncte sînt situate pe suportul  $\Delta$  al forței  $\bar{F}$ , deoarece forța  $\bar{F}$  este un vector alunecător, iar vectorul  $\bar{m}$  este un vector liber. Dreapta  $\Delta$  se numește axa centrală a sistemului. Găsim generalizarea rezultatului aflat

la § 39 pentru cazul forțelor coplanare, numai cu decosebirea că acolo  $\bar{m}$  era egal cu zero și rezultanta  $\bar{F}$  era dirijată în lungul axei centrale. Raportul  $\frac{m}{F} = p$  se numește parametrul dinamului.

Aici  $m$  reprezintă proiecția momentului resultant  $\bar{M}$  pe direcția



forței  $\bar{F}$ ; de aceea parametrul  $p$  este pozitiv, dacă  $\bar{F}$  și  $\bar{m}$  au același sens, și negativ dacă  $\bar{F}$  și  $\bar{m}$  sînt de sens contrar. Astfel:

*Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce, în general, la un dinam situat în lungul axei centrale a sistemului.*

Două sisteme de forțe, avînd forțele rezultante și momentele rezultante egale în raport cu același punct din spațiu, se numesc *echivalente*. Astfel, reducerea sistemului de forțe la un sistem mai simplu se reduce la căutarea pentru sistemul de forțe dat, a celui mai simplu sistem echivalent. În acest paragraf s-au arătat patru feluri de sisteme echivalente pentru sistemul arbitrar de forțe.

Dacă efectuînd reducerea forțelor într-un punct oarecare  $O$ , vom găsi  $\bar{F}=0$  și  $\bar{M}\neq 0$ , atunci sistemul de forțe se reduce la un cuplu. Dacă efectuînd reducerea într-un punct oarecare  $O$ , vom găsi  $\bar{F}\neq 0$  și  $\bar{M}\perp\bar{F}$ , aceasta va însemna că sistemul de forțe se reduce la o rezultantă, deoarece în acest caz, reducînd sistemul de forțe în raport cu un punct de pe axa centrală, vom obține  $\bar{m}=0$ , și va rămîne o singură forță  $F$  care acționează de-a lungul axei centrale a sistemului. În sfîrșit, dacă efectuînd reducerea într-un punct oarecare  $O$  vom găsi că  $\bar{F}=0$  și  $\bar{M}=0$ , aceasta va însemna că nu există nici rezultantă, nici cuplu, nici dinam, adică sistemul de forțe este în echilibru; un astfel de sistem de forțe este numit uneori *sistem echivalent cu zero*. Nu este greu de văzut că dacă sistemul de forțe va fi echivalent cu zero pentru un punct oarecare  $O$ , atunci el va avea această proprietate și pentru oricare alt punct din spațiu. În adevăr, din construcțiile precedente urmează că *rezultanta  $\bar{F}$  nu depinde de punctul de reducere ales*; de aceea, dacă pentru punctul  $O$  vom avea  $\bar{F}=0$ , atunci în orice alt punct din spațiu vom avea de asemenea  $\bar{F}=0$ . Dar dacă  $\bar{F}=0$ , atunci sistemul de forțe se poate reduce la un cuplu al cărui moment  $\bar{M}$  în raport cu toate punctele din spațiu este același; de aceea, dacă în punctul  $O$  vom avea  $\bar{M}=0$ , atunci vom avea  $\bar{M}=0$  și în toate celelalte puncte din spațiu. De aici rezultă că:

*Pentru echilibrul unui sistem arbitrar de forțe este necesar și suficient să avem*

$$\bar{F}=\sum_n \bar{F}_n=0, \quad \bar{M}=\sum_n \bar{M}_n=\sum_n \bar{r}_n\times\bar{F}_n=0 \quad (11.3)$$



§ 48. Metoda analitică de reducere a unui sistem de forțe la cel mai simplu sistem. Fie date forțele  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$  prin proiecțiile lor pe axele coordonatelor  $Oxyz$ , egale respectiv cu  $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3), \dots$ , și fie coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor  $A_1, A_2, A_3, \dots$  egale respectiv cu  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots$ . Notînd proiecțiile rezultantei  $F$  prin  $(X, Y, Z)$ , iar proiecțiile momentului resultant  $M$  prin  $(M_x, M_y, M_z)$  și luînd originea coordonatelor ca punct de reducere, vom obține:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \sum_n X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum_n Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots = \sum_n Z_n; \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum_n M_{nx} = \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n), \\ M_y &= \sum_n M_{ny} = \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n), \\ M_z &= \sum_n M_{nz} = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n). \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ , ale rezultantei  $\bar{F}$  cu axele de coordonate și modulul său se determină prin formulele (1.18) și (1.17), și anume:

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}, \quad F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

unghiurile  $a, b, c$ , ale momentului resultant  $\bar{M}$  cu axele de coordonate și modulul său se determină prin aceleași formule, și anume:

$$\cos a = \frac{M_x}{M}, \quad \cos b = \frac{M_y}{M}, \quad \cos c = \frac{M_z}{M}, \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Pentru ca punctul  $O$  să fie situat pe axa centrală, trebuie să avem:

$$\frac{\cos a}{\cos \alpha} = \frac{\cos b}{\cos \beta} = \frac{\cos c}{\cos \gamma} = \pm 1,$$

semnul plus corespunde cazului în care rezultanta și momentul resultant au același sens minus cazului în care sensul rezultantei și al momentului resultant sînt contrarii. Înlocuind în egalitatea



precedentă cosinușii prin valorile lor date mai înainte, ajungem la următoarea condiție ca punctul  $O$  să se găsească pe axa centrală:

$$\frac{M_x}{X} = \frac{M_y}{Y} = \frac{M_z}{Z}. \quad (11.6)$$

În general aceste egalități nu vor fi satisfăcute. Dacă luăm ca punct de reducere nu punctul  $O$  ci un punct oarecare  $O'$ , atunci după cum știm, rezultanta  $\bar{F}$  rămâne neschimbată, iar momentul rezultat prin trecerea la punctul  $O'$  ca punct de reducere se va schimba și ca modul și ca sens. De aceea se poate pune problema unei astfel de alegeri a punctului  $O'$ , încît noul moment  $\bar{M}'$  să coincidă cu momentul determinat mai sus  $\bar{m}$ ; pentru aceasta trebuie să avem:

$$\bar{M}' = \bar{m} = p\bar{F},$$

unde  $p$  este parametrul dinamului determinat mai sus. Pentru a găsi momentul rezultat  $\bar{M}'$  în raport cu un punct oarecare  $O'$  din spațiu, ne vom servi de formula (2.22); vom avea

$$\bar{M}' = \sum_n \bar{M}'_n = \sum_n \bar{M}_n - \sum_n \bar{d} \times \bar{F}_n,$$

unde  $\bar{d} = \overline{OO'}$ . De aici găsim

$$\bar{M}' = \bar{M} - \bar{d} \times \sum_n \bar{F}_n,$$

sau

$$\bar{M}' = \bar{M} - \bar{d} \times \bar{F}; \quad (11.7)$$

de fapt repetăm operațiile de care ne-am mai servit pentru sistemele particulare de forțe. Dacă punctul  $O'$  este luat astfel încît  $\bar{M}' = \bar{m}$ , atunci din egalitatea  $\bar{m} = p\bar{F}$  vom obține:

$$\bar{M} - \bar{d} \times \bar{F} = p\bar{F}. \quad (11.8)$$

Din egalitatea (11.8) se poate determina vectorul  $\bar{d}$  în funcție de vectorii dați  $\bar{M}$  și  $\bar{F}$ ; pentru aceasta vectorul  $\bar{M} - p\bar{F}$  trebuie să fie egal cu produsul  $\bar{d} \times \bar{F}$ . În § 39 am văzut că o astfel de ecuație vectorială nu admite o soluție unică; dacă s-a determinat o soluție  $\bar{d}$  a ecuației, atunci toți vectorii de forma  $\bar{d} + \bar{f}$ , unde  $\bar{f}$  este un vector arbitrar paralel cu rezultanta  $\bar{F}$  reprezintă soluții



ale aceleiași ecuații vectoriale. Este evident că locul geometric al punctelor  $O'$ , cînd vectorul  $\bar{f}$  variază, este o dreaptă și anume axa centrală a sistemului de forțe. Ca să trecem de la notațiile vectoriale la cele analitice, vom pune  $\bar{a} = \bar{i}x' + \bar{j}y' + \bar{k}z'$ ; atunci din formula (11.8) vom obține:

$$\bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = p(\bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z),$$

sau

$$M_x - (y'Z - z'Y) = pX,$$

$$M_y - (z'X - x'Z) = pY,$$

$$M_z - (x'Y - y'X) = pZ.$$

Eliminînd mărimea  $p$ , vom avea:

$$\frac{M_x - (y'Z - z'Y)}{X} = \frac{M_y - (z'X - x'Z)}{Y} = \frac{M_z - (x'Y - y'X)}{Z} \quad (11.9)$$

Aceasta este ecuația analitică a axei centrale. În adevăr, dacă valorile  $X, Y, Z, M_x, M_y, M_z$ , care determină sistemul de forțe dat sînt cunoscute, avem două ecuații (11.9) de gradul întâi cu trei coordonate curente  $(x', y', z')$ , care după cum se știe din geometria analitică în spațiu, reprezintă ecuațiile unei drepte. Nu este greu de găsit ecuația acestei drepte, sub forma canonică. Pentru aceasta să dăm, de exemplu, variabilei  $z'$  o valoare oarecare arbitrară  $z' = z'_0$ ; atunci, din cele două ecuații (11.9) cu două necunoscute  $x'$  și  $y'$  vom putea deduce valorile lor; fie  $x'_0$  și  $y'_0$  aceste valori. Astfel, am găsit unui din punctele prin care trece axa centrală a sistemului de forțe. Deoarece axa centrală trebuie să fie paralelă cu vectorul  $\bar{F}$ , rezultă că coeficienții ei unghiulari trebuie să fie proporționali cu proiecțiile  $X, Y, Z$ , adică ecuațiile axei centrale pot căpăta următoarea formă canonică:

$$\frac{x' - x'_0}{X} = \frac{y' - y'_0}{Y} = \frac{z' - z'_0}{Z}.$$

Din construcția vectorului rezultat  $\bar{F}$  urmează că el nu-și schimbă modulul, ori unde ar fi luat punctul de reducere și ori-cum ar fi axele de coordonate ortogonale; de aceea vectorul  $\bar{F}$  este un invariant (§ 18). Pentru a evita rădăcina pătrată, vom



lua drept invariant  $F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ . Ne vom folosi de egalitatea (11.7); o vom înmulți termen cu termen, scalar cu egalitatea  $\bar{F}' = \bar{F}$ . Deoarece vectorul  $\bar{d} \times \bar{F}$  este perpendicular pe vectorul  $\bar{F}$ , atunci conform §. 18 vom obține:

$$\bar{M}' \cdot \bar{F}' = \bar{M} \cdot \bar{F}.$$

Deoarece direcțiile axelor de coordonate nu pot influența relațiile vectoriale, rezultă din egalitatea precedentă că produsul  $\bar{M} \cdot \bar{F}$  pentru sistemul de forțe considerat este de asemenea un invariant; după formula (3.9) avem:

$$\bar{M} \cdot \bar{F} = M_x X + M_y Y + M_z Z.$$

Prin urmare, orice sistem de forțe are doi invarianti de forma:

$$\left. \begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= \text{const.}, \\ M_x X + M_y Y + M_z Z &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Știm că  $\bar{M} \cdot \bar{F} = M \cdot F \cos (\widehat{\bar{M}, \bar{F}})$  conform formulei (3.3). Din fig. 98 rezultă că vom avea  $M \cos (\widehat{\bar{M}, \bar{F}}) = m$ : de aceea al doilea invariant poate căpăta forma  $\bar{M} \cdot \bar{F} = Fm$ . Deoarece  $F$  este un invariant, atunci și  $m$  trebuie să fie invariant, adică semnificația fizică a celui de-al doilea invariant este următoarea:

*Proiecția momentului rezultat pe rezultantă este o mărime constantă pentru sistemul de forțe dat.*

Astfel, cînd la schimbarea punctului de reducere variază modulul momentului rezultat, vectorul moment rezultat trebuie să-și modifice cu această ocazie direcția, astfel încît proiecția lui pe rezultantă să rămîină invariantă.

Deoarece totdeauna proiecția este mai mică decît segmentul proiectat, momentul rezultat al sistemului de forțe va fi minim, dacă punctul de reducere este luat pe axa centrală, cînd vectorul  $\bar{M}$  coincide cu vectorul  $\bar{m}$ . De aceea momentul  $\bar{m}$  se numește *moment minimal*.

Cu ajutorul celui de-al doilea invariant este ușor de cunoscut la ce se poate reduce sistemul de forțe dat. Presupunem că  $Fm \neq 0$ ; este evident că în acest caz nici  $F$  nici  $m$  nu pot fi egali cu zero și sistemul se reduce la un dinam sau la două forțe ce nu sînt situate în același plan. Să presupunem acum că  $Fm = 0$ . Dacă în acest caz  $F \neq 0$ , atunci trebuie să avem  $m = 0$  și sistemul se reduce la o rezultantă așezată în lungul axei centrale. Dimpotrivă.



dacă  $F=0$ , iar  $m \neq 0$ , atunci momentul rezultat pentru toate punctele din spațiu este constant și egal cu  $\bar{m}$ ; de aceea sistemul de forțe se reduce la un cuplu de moment  $\bar{m}$ . În sfârșit, dacă și  $F=0$  și  $m=0$ , atunci nu există nici rezultantă, nici cuplu, și sistemul de forțe va fi echivalent cu zero. Toate cazurile examinate pot fi rezumate în tabela următoare:

$\bar{M} \cdot \bar{F} = M_x X + M_y Y + M_z Z \neq 0$	Dinam sau două forțe în plane diferite
$\bar{M} \cdot \bar{F} = M_x X + M_y Y + M_z Z = 0$	$X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$ O rezultantă așezată în lungul axei centrale
	$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$ $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 \neq 0$ Un cuplu
	$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$ $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 0.$ Sistem echivalent cu zero

În acest fel, pentru ca un sistem arbitrar să fie în echilibru, adică forțele să se echilibreze, este necesar și suficient ca

$$\left. \begin{aligned} X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \\ M_x=0, \quad M_y=0, \quad M_z=0. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

§ 49. Echilibrul unui sistem arbitrar de forțe. Din paragraful precedent rezultă că ecuațiile vectoriale de echilibru ale unui sistem arbitrar de forțe, aplicate unui solid, sînt

$$\bar{F}=0, \quad \bar{M}=0. \quad (11.12)$$

Aceste două ecuații vectoriale sînt echivalente cu următoarele șase ecuații scalare

$$\left. \begin{aligned} X = \sum_n X_n = 0, \quad Y = \sum_n Y_n = 0, \quad Z = \sum_n Z_n = 0, \\ M_x = \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) = 0, \quad M_y = \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) = 0, \\ M_z = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$



Subliniem, că la alcătuirea ecuațiilor (11.13), nu este necesar să se proiecteze forțele și momentele forțelor numai decît pe axele de coordonate; pentru aceasta se pot folosi orice drepte, cu condiția ca între ele să nu existe drepte paralele și ca ele să nu fie paralele la același plan. Această observație este folosită mai ales la formarea ecuațiilor momentelor. Să presupunem, de exemplu, că într-o problemă dată oarecare, de echilibru, există cinci reacțiuni și se poate duce o astfel de dreaptă  $D$ , care intersectează patru din cele cinci suporturi ale reacțiunilor.

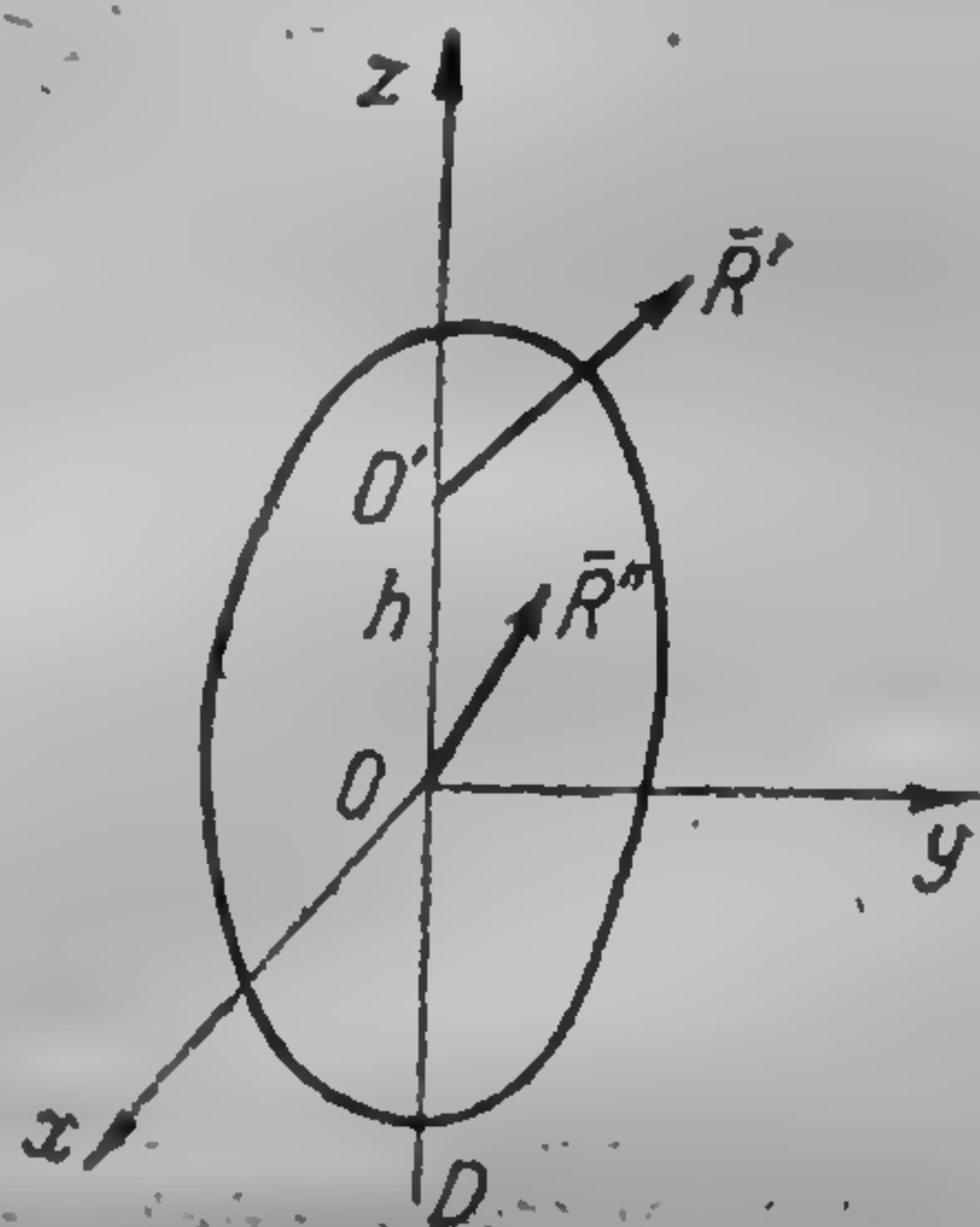


Fig. 99

Scriind ecuația de momente în raport cu axa  $D$  și egalînd cu zero suma momentelor tuturor forțelor în raport cu axa  $D$ , vom obține o ecuație de gradul I, în care singura reacțiune necunoscută va fi a cincea reacțiune, deoarece momentele în raport cu axa  $D$  ale celor patru reacțiuni care întretaie axa  $D$ , vor fi egale cu zero (§ 11). Este evident, că din această ecuație nu este prea greu de determinat această a cincea reacțiune. Dacă, de exemplu, se poate duce o dreaptă  $D$ , care intersectează toate suporturile reacțiunilor din problema dată, ecuația momentelor în raport cu această axă  $D$ , ca una care nu conține reacțiunile, va exprima o condiție de echilibru.

Să examinăm trei cazuri importante de echilibru ale unui solid rigid.

1. *Echilibrul unui solid cu o axă fixă.* Pentru ca un solid să aibă o axă fixă, este suficient să fixăm două puncte ale acestui solid; atunci dreapta care trece prin aceste două puncte va fi fixă. Notăm punctele de fixare prin  $O$  și  $O'$  unde  $OO' = h$ . Deoarece asupra corpului acționează forțe, în punctele  $O'$  și  $O$  se dezvoltă reacțiunile  $R'$  și  $\bar{R}''$ , necunoscute ca mărime, direcție și sens. Din cele indicate mai înainte, rezultă că este suficient să egalăm cu zero suma momentelor tuturor forțelor în raport cu dreapta  $D$ , care trece prin punctele  $O'$  și  $O$ , ca să obținem condiția de echilibru. Introducem sistemul ortogonal de axe de coordonate, a cărui origine o vom lua în punctul fix  $O$  și axa  $Oz$  o vom dirija de-a lungul dreptei  $OO'$  (fig. 99). La această alegere a axelor de coordonate, momentele forței  $\bar{R}''$ , în raport cu toate cele



trei axe, vor fi egale cu zero, iar momentul forței  $\bar{R}'$  în raport cu axa  $Oz$  va fi egal cu zero. Notăm proiecțiile forțelor necunoscute  $\bar{R}'$  și  $\bar{R}''$  pe aceste axe, respectiv prin  $(X', Y', Z')$  și  $(X'', Y'', Z'')$ .

Notînd proiecțiile forțelor date  $\bar{F}_n$  prin  $(X_n, Y_n, Z_n)$ , iar coordonatele punctelor lor de aplicație  $A_n$  prin  $(x_n, y_n, z_n)$ , avem din ecuația (11.13):

$$\left. \begin{aligned} \sum_n X_n + X' + X'' &= 0, \\ \sum_n Y_n + Y' + Y'' &= 0, \\ \sum_n Z_n + Z' + Z'' &= 0, \\ \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) - h Y' &= 0, \\ \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) + h X' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

$$M_z = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) = 0. \quad (11.15)$$

În ultimele două formule (11.14), la calcularea momentelor forței  $\bar{R}'$ , în raport cu axele  $Ox$  și  $Oy$  după formulele  $M_x = yZ - zY$  și  $M_y = zX - xZ$ , am ținut seamă de coordonatele punctului  $O'$  și anume,  $x=0$ ,  $y=0$  și  $z=h$ , ceea ce a dus la termenii  $-hY'$  și  $+hX'$ . După cum s-a arătat mai înainte, reacțiunile nu au putut

intervenii în ecuația (11.15) a momentelor în raport cu axa  $Oz$ ; de aceea această ecuație exprimă condiția de echilibru. Astfel, ajungem la următoarea teoremă:

*Pentru ca un solid care se poate roti în jurul unei axe fixe să fie în echilibru, suma momentelor tuturor forțelor date, care acționează asupra solidului, în raport cu această axă, trebuie să fie egală cu zero.*

Cele cinci ecuații (11.14) servesc pentru determinarea celor șase proiecții  $(X', Y', Z')$  și  $(X'', Y'', Z'')$  ale reacțiunilor;

prin urmare, această problemă este static nedeterminată. Din ultimele două ecuații (11.14) vom determina mărimile  $X'$  și  $Y'$ ; introducîndu-le în primele două ecuații vom găsi pe  $X''$  și  $Y''$ ,

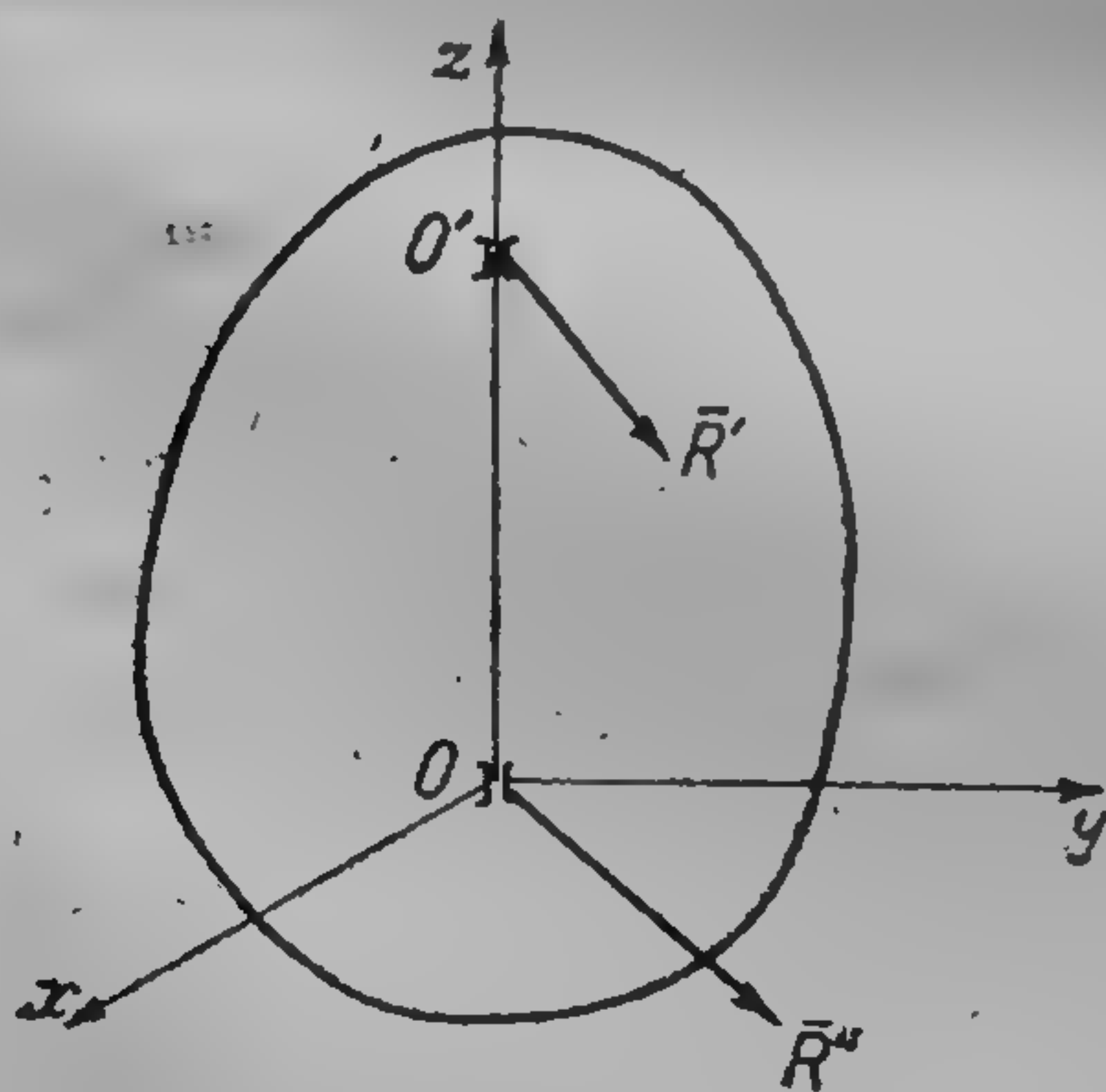


Fig. 100



Însă a treia ecuație ne dă suma  $Z' + Z''$ , iar termenii  $Z'$  și  $Z''$  nu pot fi determinați separați. Ultimul rezultat este evident deoarece la mărimile  $Z'$  și  $Z''$  se poate totdeauna adăuga, respectiv scădea, o mărime arbitrară. În suma  $Z' + Z''$  aceste două mărimi suplimentare vor da zero, dar fiecare din ele schimbă proiecțiile  $Z'$  și  $Z''$ . Deci  $Z'$  și  $Z''$  separeate, în cazul solidului rigid, rămân nedeterminate. Dacă însă corpul este elastic, atunci nu se pot adăuga aceste două forțe egale și de sens contrar dirijate în lungul axei  $Oz$ , fără a deforma solidul.

2. *Echilibrul unui solid care poate avea o mișcare de șurub.* Păstrând notațiile din problema precedentă, vom lua axa  $Oz$  ca axă de rotație și de alunecare (fig. 100).

În acest caz reacțiunile  $R'$  și  $R''$  vor fi normale la axa  $Oz$ , deoarece alunecarea se face fără frecare; de aceea proiecțiile forțelor  $R'$  și  $R''$  vor fi  $(X', Y', 0)$  și  $(X'', Y'', 0)$ . Introducând aceste valori în ecuațiile (11.14) și (11.15) vom obține:

$$\left. \begin{aligned} \sum_n X_n + X' + X'' &= 0, \\ \sum_n Y_n + Y' + Y'' &= 0, \\ Z - \sum_n Z_n &= 0; \\ \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) - h Y' &= 0, \\ \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) + h X' &= 0, \\ M_z = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

Vedem că ecuația a treia și a șasea (11.16) nu vor conține proiecțiile reacțiunilor; deci acestea sînt condițiile de echilibru

$$\left. \begin{aligned} Z - \sum_n Z_n &= 0, \\ M_z = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

De aici obținem:

*Pentru ca un solid care poate avea o mișcare de șurub să fie în echilibru, suma proiecțiilor tuturor forțelor date pe axa de alunecare și de rotație și suma momentelor tuturor forțelor date în raport cu această axă, trebuie să fie egale cu zero.*

3. *Echilibrul unui solid cu un punct fix.* Luăm punctul fix  $O$  al solidului ca origine a sistemului ortogonal de coordonate



*Oxyz*. În punctul de fixare  $O$  se dezvoltă reacțiunea  $\bar{R}''$ , necunoscută ca modul, direcție și sens; notăm proiecțiile forței  $\bar{R}''$  prin  $(X'', Y'', Z'')$ . Ecuațiile de echilibru vor fi:

$$\sum_n X_n + X'' = 0, \quad \sum_n Y_n + Y'' = 0, \quad \sum_n Z_n + Z'' = 0; \quad (11.18)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x - \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) &= 0, \\ M_y - \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) &= 0, \\ M_z - \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

Ecuațiile (11.18) determină proiecțiile reacțiunii  $\bar{R}''$ , iar ecuațiile (11.19) sînt condițiile de echilibru. Astfel:

*Pentru ca un solid cu un punct fix să fie în echilibru, sumele momentelor forțelor date în raport cu trei axe care trec prin punctul fix, trebuie să fie egale cu zero.*

§ 50. Exemple. 38. Să se reducă la un sistem mai simplu sistemul de patru forțe  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$  ale căror proiecții sînt respectiv egale cu:

$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_4$
$X_1=4$	$X_2=4$	$X_3=2$	$X_4=-6$
$Y_1=5$	$Y_2=0$	$Y_3=1$	$Y_4=1$
$Z_1=6$	$Z_2=2$	$Z_3=7$	$Z_4=-2$

și care sînt aplicate în punctele  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , cu coordonatele:

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=0$	$x_4=5$
$y_1=2$	$y_2=3$	$y_3=-1$	$y_4=4$
$z_1=3$	$z_2=1$	$z_3=2$	$z_4=-1$

Mai întîi vom calcula proiecțiile rezultantei după formulele (11.4) și vom obține:

$$X = 4 + 4 + 2 - 6 = +4,$$

$$Y = 5 + 0 + 1 + 1 = +7,$$

$$Z = 6 + 2 + 7 - 2 = +13.$$

Obținem astfel modulul  $F$  al rezultantei:

$$F = \sqrt{4^2 + 7^2 + 13^2} = \sqrt{234} = 15,297.$$



Cosinuşii unghiurilor formate de rezultantă cu axele de coordonate vor fi egale cu:

$$\cos \alpha = +\frac{4}{\sqrt{234}}, \cos \beta = +\frac{7}{\sqrt{234}}, \cos \gamma = +\frac{13}{\sqrt{234}};$$

de aici găsim:

$$\alpha = 74^\circ 50', \beta = 62^\circ 46', \gamma = 31^\circ 48',$$

dar ştim că axa centrală a sistemului formează aceleaşi unghiuri cu axele de coordonate. Vom determina acum momentele forţelor în raport cu axele de coordonate şi cu ajutorul formulelor (11.15) vom exprima proiecţiile momentului rezultat al sistemului pe axele de coordonate

$$M_{1x} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3$$

$$M_{2x} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = +6$$

$$M_{3x} = -1 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = -9$$

$$M_{4x} = 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -7$$

$$M_x = -13$$

$$M_{1y} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = +6$$

$$M_{2y} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$M_{3y} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 7 = +4$$

$$M_{4y} = -1 \cdot (-6) - 5 \cdot (-2) = +16$$

$$M_y = +26$$

$$M_{1z} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3$$

$$M_{2z} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 4 = -12$$

$$M_{3z} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = +2$$

$$M_{4z} = 5 \cdot 1 - 4 \cdot (-6) = +29$$

$$M_z = +16$$

Scriind expresia (11.10) a celui de-al doilea invariant, vom avea:

$$\bar{M} \cdot \bar{F} = M_x X + M_y Y + M_z Z = -13 \cdot 4 + 26 \cdot 7 + 16 \cdot 13 = +338,$$

adică avem:

$$Fm = 338,$$

De aici găsim:

$$m = \frac{338}{\sqrt{234}} = 22,096.$$

Deoarece al doilea invariant nu este egal cu zero, sistemul de patru forţe dat se reduce la un dinam. De-a lungul axei centrale care formează cu axele de coordonate unghiurile  $\alpha = 74^\circ 50'$ ,  $\beta = 62^\circ 46'$ ,  $\gamma = 31^\circ 48'$ , acţionează rezultanta  $F = 15,297$ , iar momentul cuplului  $m = 22,096$  este coliniar cu rezultanta. Observăm, că dacă pentru  $m$  s-ar obţine o valoare negativă, atunci aceasta ne-ar indica că sensul momentului  $m$  este opus sensului



forței  $F$ , deoarece  $m = M \cos (P, M)$ . Pentru parametrul  $p$  sau pasul dinamului avem:

$$p = \frac{m}{F} = \frac{338}{\sqrt{234}} : \sqrt{234} = \frac{338}{234} = 1,444.$$

Pentru a cunoaște poziția axei centrale este necesar să se găsească coordonatele unui punct oarecare al axei, de exemplu, punctul de intersecție cu planul  $Oxy$ . Pentru aceasta scriem ecuația axei centrale sub formă (11.9): făcând înlocuirile numerice obținem:

$$\frac{-13 - (13y' - 7z')}{4} = \frac{26 - (4z' - 13x')}{7} = \frac{16 - (7x' - 4y')}{13}.$$

Considerând în acest caz  $z' = 0$ , vom obține două ecuații pentru determinarea coordonatelor  $x'$  și  $y'$ :

$$\frac{-13 - 13y'}{4} = \frac{26 + 13x'}{7}, \quad \frac{-13 - 13y'}{4} = \frac{16 - 7x' + 4y'}{13},$$

sau

$$4x' + 7y' = -15,$$

$$28x' - 185y' = 233.$$

Rezolvând aceste ecuații, vom găsi coordonatele  $y'$ ,  $y'$  ale urmei axei centrale pe planul  $Oxy$ , și anume:

$$x' = -1,223, \quad y' = -1,444.$$

De aici vom avea ecuația axei centrale sub formă canonică

$$\frac{x + 1,223}{4} = \frac{y + 1,444}{7} = \frac{z}{13}.$$

Astfel, problema de reducere a sistemului de patru forțe date este complet rezolvată.

39. Să descompunem forța  $\bar{F}$  după șase direcții date în spațiu. Fie  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \dots, (\alpha_6, \beta_6, \gamma_6)$  unghiurile formate de direcțiile acestor drepte  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$  cu axele de coordonate și  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_6$  forțele componente, ale căror mărimi trebuie determinate. Este evident că sistemul format din șapte forțe  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6 - \bar{F}$  trebuie să fie în echilibru, adică trebuie să satisfacă ecuațiile (11.13). Deoarece avem:

$$X_n = F_n \cos \alpha_n, \quad Y_n = F_n \cos \beta_n, \quad Z_n = F_n \cos \gamma_n$$

vom obține:

$$\sum_n F_n \cos \alpha_n - X = 0,$$

$$\sum_n F_n \cos \beta_n - Y = 0,$$

$$\sum_n F_n \cos \gamma_n - Z = 0;$$



$$\sum_n F_n (y_n \cos \gamma_n - z_n \cos \beta_n) - (yZ - zY) = 0;$$

$$\sum_n F_n (z_n \cos \alpha_n - x_n \cos \gamma_n) - (zX - xZ) = 0,$$

$$\sum_n F_n (x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n) - (xY - yX) = 0.$$

Aceste șase ecuații de gradul I cu șase necunoscute  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6$  admit una și numai o singură soluție. Problema este rezolvabilă de fiecare dată când sistemul de șase ecuații liniare, considerate, admite o singură soluție finită. Din considerentele expuse la începutul paragrafului precedent, reiese că numai în cazuri excepționale există o dreaptă  $D$  care întretaie cele șase suporturi  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$  ale forțelor  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_6$  fără a intersecta și suportul  $\Delta$  al forței date  $\bar{F}$  sau al forței  $-\bar{F}$ . În adevăr, luăm momentul resultant al întregului sistem de șapte forțe care se echilibrează  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_6 - \bar{F}$  în raport cu axa  $D$ ; acest moment trebuie să fie egal cu zero. Deoarece momentele primelor șase forțe în raport cu axa  $\bar{D}$  sînt identic egale cu zero (§ 11), ecuația de echilibru se reduce la egalarea cu zero a momentului în raport cu axa  $D$  a forței  $\bar{F}$ , de unde urmează, că trebuie să avem în general  $\bar{F}=0$ , adică problema își pierde sensul.

40. Să se efectueze descompunerea arătată în problema precedentă, când primele trei forțe  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  sînt situate în același plan, iar celelalte trei forțe  $\bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6$  sînt concurente într-un punct  $A$ . Coborim din punctul  $A$  perpendiculara pe planul primelor trei forțe; fie  $O$  punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu planul forțelor. Luăm punctul  $O$  ca origine a sistemului ortogonal de coordonate, axele  $Ox$  și  $Oy$  le vom duce în planul primelor trei forțe, iar axa  $Oz$  trece prin punctul  $A$ . Atunci vom avea:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{\pi}{2}, \quad -z_1 = z_2 = z_3 = 0,$$

$$x_4 = x_5 = x_6 = 0, \quad y_4 = y_5 = y_6 = 0, \quad z_4 = z_5 = z_6 = h.$$

Ecuațiile din exemplul 39 vor fi de forma:

$$\sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos \alpha_n + \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \alpha_n = X,$$

$$\sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos \beta_n + \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \beta_n = Y,$$

$$\sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \gamma_n = Z,$$

$$-h \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \beta_n = yZ - zY,$$

$$h \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \alpha_n = zX - xZ,$$

$$\sum_{n=1}^{n=3} F_n (x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n) = xY - yX.$$



Din ecuațiile a treia, a patra și a cincea, vom determina pe  $F_4$ ,  $F_5$  și  $F_6$  și, apoi, din celelalte trei ecuații rămase, vom determina necunoscutele  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Astfel, în acest caz problema de a rezolva șase ecuații cu șase necunoscute, s-a redus la rezolvarea succesivă a două sisteme de trei ecuații cu cîte trei necunoscute. Pentru rezolvarea problemei se mai poate propune încă și următoarea metodă geometrică. Vom nota prin  $B_3$  punctul de intersecție al dreptelor  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$ , prin  $B_1$  punctul de intersecție al dreptelor  $\Delta_2$  și  $\Delta_3$ , prin  $B_2$  punctul de intersecție al dreptelor  $\Delta_3$  și  $\Delta_1$ , unde  $\Delta_n$  este suportul forței  $\vec{F}_n$ . Ducem dreapta  $D_3$  prin punctul  $A$  și punctul  $B_3$  și pentru scrierea ecuației de echilibru a celor șapte forțe  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_6 - \vec{F}$  egalăm cu zero momentul resultant al acestor forțe în raport cu dreapta  $D_3$ . Deoarece momentele tuturor forțelor în afară de forțele  $\vec{F}_3$  și  $-\vec{F}$  în raport cu dreapta  $D_3$  sînt identic egale cu zero, din această ecuație vom determina pe  $F_3$ . Notînd cu  $D_2$  dreapta care trece prin punctele  $A$  și  $B_2$  și cu  $D_1$  dreapta care trece prin punctele  $A$  și  $B_1$ , vom putea găsi exact prin același procedeu modulele  $F_2$  și  $F_1$ . Pentru a găsi modulele forțelor  $\vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$ , vom observa că ele trebuie să aibă o resultantă care trece prin punctul  $A$ ; prin urmare, forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  și  $-\vec{F}$  trebuie să se reducă de asemenea la o resultantă al cărui suport trece prin punctul  $A$ , cele două rezultante avînd aceleași module și direcții și fiind de sens contrar. De aceea, compunînd forțele  $-\vec{F}_1, -\vec{F}_2, -\vec{F}_3$  și  $\vec{F}$ , vom obține resultantă forțelor  $\vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$ , cunoscute ca direcție, dar necunoscute ca modul. Astfel, problema se reduce la construirea unui paralelipiped cu diagonala și cu direcțiile muchiilor cunoscute, ceea ce, în general, este totdeauna posibil.

41. O placă dreptunghiulară de greutate  $P$  este suspendată de patru fire legate cu unul din capetele lor de capetele  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ale plăcii; celelalte capete sînt trecute prin patru scripeti și de ele sînt atîrnate greutățile  $P_1, P_2, P_3$  și  $P_4$ .

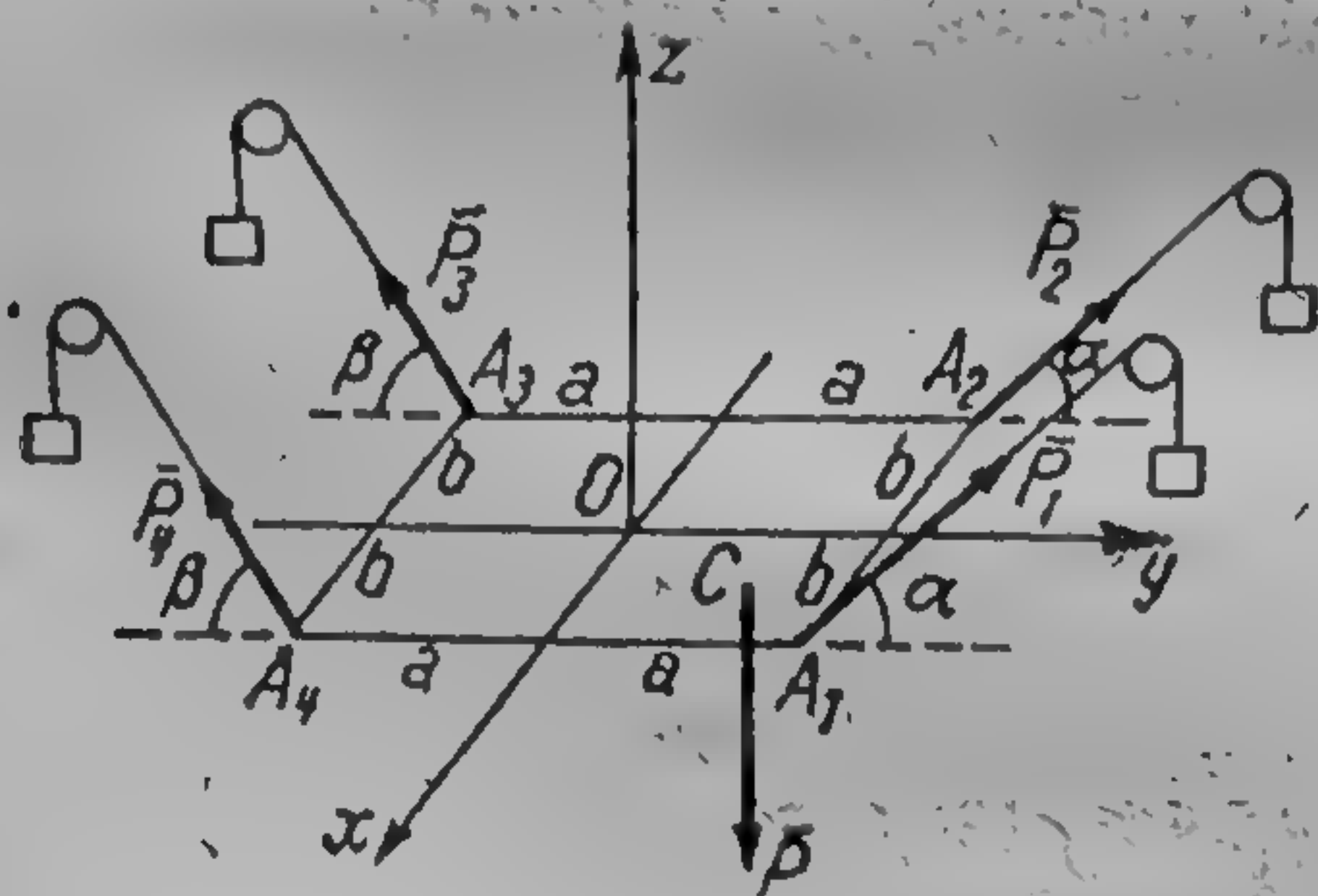


Fig. 101.

Se cere ca acea placă  $A_1 A_2 A_3 A_4$  să rămînă în echilibru și să fie orizontală. Se cunoaște lungimea plăcii care este egală cu  $2a$ , lățimea,  $2b$ ; centrul de greutate al plăcii încărcate se află în punctul  $C$  din planul ei, firele sînt așezate în plane care conțin respectiv muchiile plăcii  $A_2 A_3$  și  $A_4 A_1$ , cele două fire din dreapta formează cu planul orizontal unghiurile  $\alpha$ , iar cele din stînga, unghiurile  $\beta$  (fig. 101). Alegem originea

sistemului ortogonal de coordonate  $Oxyz$  în centrul dreptunghiului  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ; axa  $Ox$  o vom dirija paralel cu muchia  $A_2 A_1$ , axa  $Oy$  paralel cu muchia  $A_3 A_2$  și axa  $Oz$  perpendicular cu planul plăcii adică pe verticală în sus. Fie  $(x, y)$  coordonatele punctului  $C$ . Este evident că proiecțiile tuturor forțelor pe axa  $Ox$  sînt egale cu zero; proiecțiile tuturor forțelor pe axa  $Oy$  sînt egale cu:

$$P \cos \alpha - P_2 \cos \alpha, -P_3 \cos \beta, -P_4 \cos \beta, 0,$$



iar proiecțiile tuturor forțelor pe axa  $Oz$  vor fi:

$$P_1 \sin \alpha, P_2 \sin \alpha, P_3 \sin \beta, P_4 \sin \beta, -P.$$

Utilizând ecuațiile (11.13) vom obține următorul sistem:

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2) \cos \alpha - (P_3 + P_4) \cos \beta &= 0, \\ (P_1 + P_2) \sin \alpha + (P_3 + P_4) \sin \beta - P &= 0, \\ (P_1 + P_2) a \sin \alpha - (P_3 + P_4) a \sin \beta - yP &= 0, \\ -(P_1 - P_2) b \sin \alpha + (P_3 - P_4) b \sin \beta + xP &= 0, \\ (P_1 - P_2) b \cos \alpha + (P_3 - P_4) b \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Din aceste ecuații se pot separa două perechi de ecuații:

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2) \cos \alpha - (P_3 + P_4) \cos \beta &= 0, \\ (P_1 + P_2) \sin \alpha + (P_3 + P_4) \sin \beta &= P, \\ (P_1 - P_2) \cos \alpha + (P_3 - P_4) \cos \beta &= 0, \\ (P_1 - P_2) \sin \alpha - (P_3 - P_4) \sin \beta &= P \frac{x}{b} \end{aligned}$$

care permit să se determine modulele forțelor  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ , în timp ce ecuația a treia din cele cinci ecuații inițiale de echilibru va fi condiția de echilibru.

Vom obține:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= P \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, & P_3 + P_4 &= P \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \\ P_1 - P_2 &= P \frac{x}{b} \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, & P_3 - P_4 &= -P \frac{x}{b} \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

De aici găsim:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} P \left( 1 + \frac{x}{b} \right) \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, & P_3 &= \frac{1}{2} P \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \\ P_2 &= \frac{1}{2} P \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, & P_4 &= \frac{1}{2} P \left( 1 + \frac{x}{b} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Introducând valoarea găsită a sumelor  $P_1 + P_2$  și  $P_3 + P_4$  în ecuația a treia vom avea:

$$P = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} - P \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = P \frac{y}{a},$$

sau

$$y = a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Din această condiție de echilibru vedem că pentru  $\alpha > \beta$  trebuie să avem  $y > 0$  și pentru  $\alpha < \beta$  trebuie să avem  $y < 0$ . Pentru  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$  valorile pentru modulele lui  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$  capătă forme nedeterminate, ceea ce și trebuie să se îndeplinească conform exemplului 26 din cap. VII.



## CAPITOLUL XII

### CAZURI PARTICULARE

§ 51. **Determinarea forțelor interioare.** În acest capitol vom examina trei cazuri particulare de aplicare a studiului despre echilibru. Vor arăta cum se pot determina forțele interioare ce acționează într-un solid cărui i se aplică forțe exterioare date care se echilibrează, cum se poate studia echilibrul unui sistem de solide și în sfârșit cum se poate folosi principiul lui Torricelli pentru studiul echilibrului sistemelor de corpuri grele.

Fie un solid oarecare cărui i se aplică forțe exterioare date; presupunem că sub acțiunea acestor forțe date solidul este

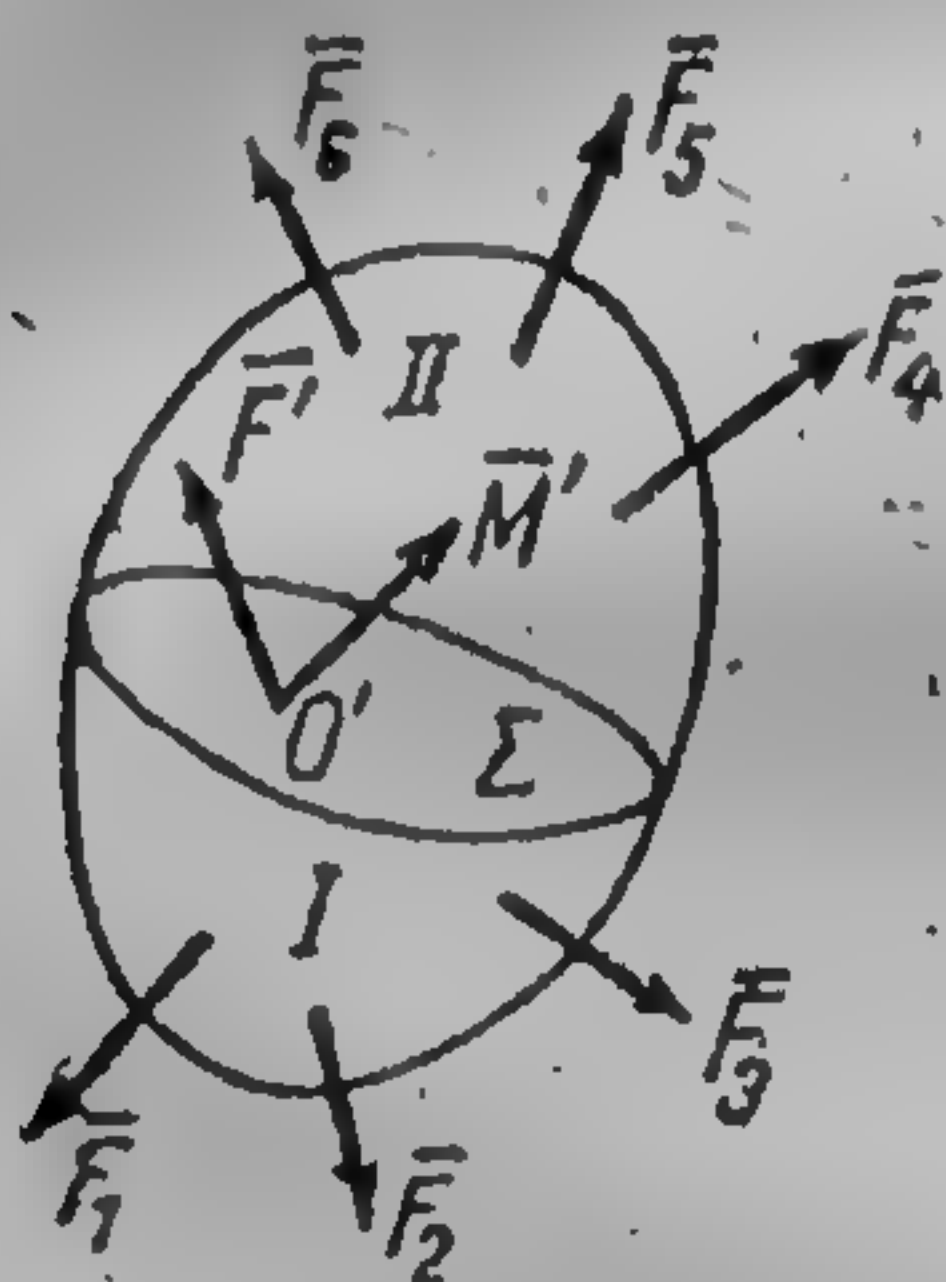


Fig. 102

în echilibru. Să sectionăm solidul astfel încât acesta să fie împărțit în două părți I și II (fig. 102) și să examinăm în mod separat partea I. Deoarece întregul solid se găsește în echilibru, tot în echilibru este și fiecare parte a lui, deci și partea I. Asupra părții I acționează forțe exterioare efectiv aplicate cunoscute, precum și forțele datorită acțiunii părții a II-a asupra părții I, care sînt necunoscute. Din teoria generală a reducerii forțelor (§ 47) reiese că forțele datorită acțiunii părții a II-a asupra

părții I se pot înlocui printr-o singură forță  $F'$ , aplicată într-un punct arbitrar  $O'$ , pe care îl vom lua pe suprafața de separație  $\Sigma$  și un cuplu de moment  $\bar{M}'$ . Forțele cu care acționează partea a II-a asupra părții I se numesc *forțe interioare*; am văzut că aceste forțe interioare care acționează pe secțiunea  $\Sigma$  pot fi în general reduse la forța rezultantă  $F'$  aplicată în punctul arbitrar  $O'$  al secțiunii  $\Sigma$  și la un cuplu de moment  $\bar{M}'$ .

Din fizică se știe că acțiunea este egală cu reacțiunea; de aceea acțiunea părții I asupra părții a II-a se reduce la rezultanta  $-F'$  și la cuplul de moment  $-\bar{M}'$ . Este evident că forțele



de acțiune ale părții  $I$  asupra părții a  $II$ -a sînt de asemenea forțe interioare. Determinarea rezultantei  $\bar{F}'$  și a momentului  $\bar{M}'$  nu este grea. Pentru aceasta să formăm ecuațiile de echilibru sub formă vectorială; pentru partea  $I$ ; luînd ca punct de reducere punctul  $O'$  vom obține:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n + \bar{F}' &= 0, \\ \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n + \bar{M}' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

unde toți termenii afară de  $\bar{F}'$  și  $\bar{M}'$  se referă la forțele exterioare cunoscute, ce acționează asupra părții  $I$ . Este evident că în formă analitică vom obține șase ecuații pentru determinarea celor trei proiecții  $X'$ ,  $Y'$ , și  $Z'$  ale forței  $\bar{F}'$  și a celor trei proiecții  $M'_x$ ,  $M'_y$ ,  $M'_z$ , ale momentului  $\bar{M}'$ .

Scriind aceleași ecuații pentru partea a  $II$ -a care se găsește sub acțiunea forțelor exterioare date și ale forțelor de acțiune ale părții  $I$  asupra părții a  $II$ -a, vom obține rezultanta și momentul acestor forțe interioare egale ca mărime și direcție cu  $\bar{F}'$  și  $\bar{M}'$ , dar de sens contrar. Astfel, putem determina totdeauna forțele interioare care acționează asupra oricărei secțiuni făcute în interiorul unui solid oarecare căruia i se aplică un sistem dat de forțele exterioare în echilibru. De exemplu, fie un fir greu a cărui lungime este egală cu  $l$ , iar greutatea unității de lungime este egală cu  $p$ ; firul este atârnat cu o extremitate de tavan, iar la cealaltă extremitate susține o greutate  $P$  (fig. 103); să se găsească forțele interioare în orice secțiune a acestui fir. Pentru aceasta presupunem că firul este întins în poziția iul de echilibru. Să luăm originea  $O$  a coordonatelor în punctul de fixare a firului de tavan și să ducem axa  $Oz$  de-a lungul firului; să găsim forțele interioare care acționează în secțiunea de coordonată  $z$ . Să cercetăm echilibrul părții  $I$ , asupra căreia acționează forțe exterioare: greutatea  $P$  și greutatea  $p(l-z)$  a părții  $I$  a firului și o forță interioară necunoscută de modul  $F'$ . Proiectînd toate forțele pe axa  $Oz$ , obținem ecuația de echilibru a părții  $I$  sub forma:

$$P + p(l-z) - F' = 0,$$

de unde avem:

$$F' = P + p(l-z).$$

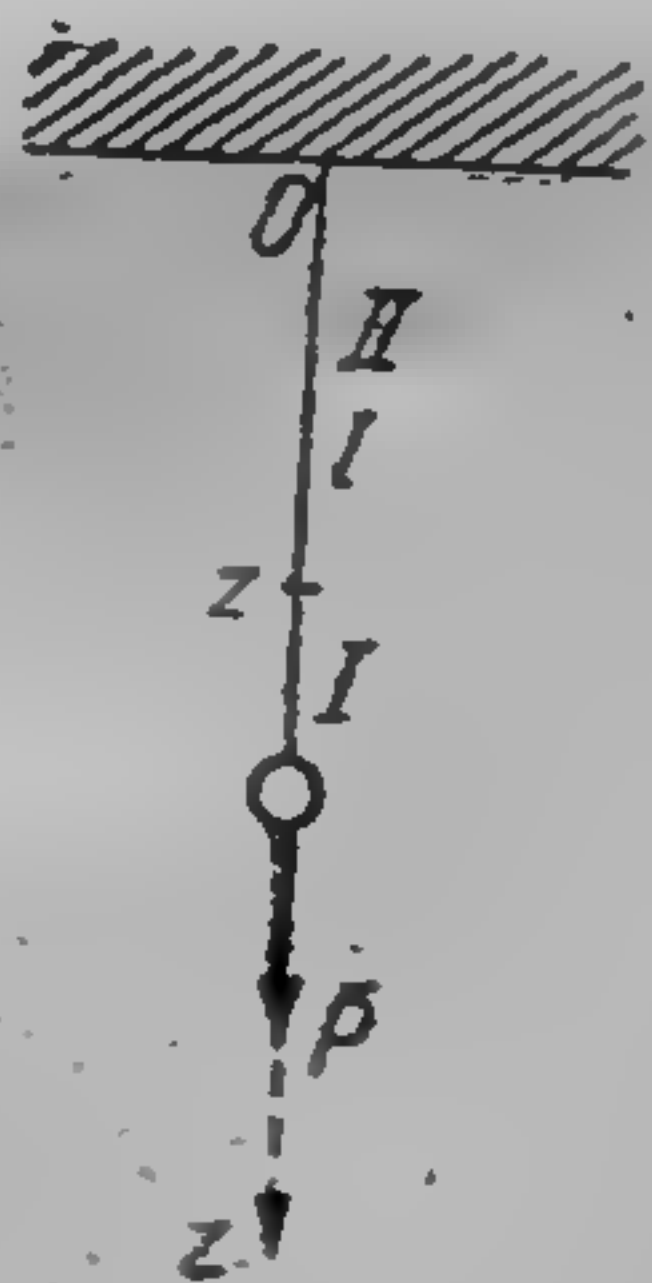


Fig. 103



Examinînd echilibrul părții a II-a tragem concluzia că asupra ei acționează forțe exterioare: reacțiunea în punctul 0 egală cu  $P + pl$ , greutatea  $pz$  a părții a II-a a firului și forța interioară de modul  $F'$  dirijată acum în același sens cu axa  $Oz$ ; ecuația de echilibru a părții a II-a va fi:

$$-(P + pl) + pz + F' = 0,$$

sau

$$F' = P + p(l + z),$$

adică obținem același rezultat pentru modulul rezultantei forțelor interioare.

**§ 52. Echilibrul unui sistem de solide.** Problema studiului echilibrului unui sistem de solide are multe asemănări cu problema cercetată anterior, a determinării forțelor interioare, deoarece necunoscutele căutate în această problemă de echilibru a sistemului vor fi mai ales reacțiunile interioare care se dezvoltă în punctele de contact ale diferitelor solide ale sistemului.

Să presupunem că sistemul constă, de exemplu, din trei solide. Mai întîi vom forma ecuațiile de echilibru ale întregului sistem, presupunînd că sistemul a devenit rigid. Vom obține șase ecuații de proiecții, în care nu vor interveni reacțiunile interioare, deoarece ele se echilibrează două cîte două, conform principiului acțiunii și reacțiunii; forțele cu care acționează primul solid asupra celui de-al doilea sînt egale și direct opuse forțelor cu care acționează al doilea solid asupra primului etc. Separăm, apoi, primul solid care și el este în echilibru dacă întregul sistem este în echilibru. Pentru a scrie ecuațiile de echilibru este necesar să introducem în afară de forțele exterioare și acele forțe cu care au acționat asupra lui al doilea și al treilea solid. În acest fel vom obține încă șase ecuații în care vor intra reacțiunile interioare necunoscute și anume forțele de interacțiune dintre primul solid și celelalte două solide. Separăm, apoi, al doilea solid. Pentru a scrie ecuațiile de echilibru este necesar să introducem în afară de forțele exterioare ce îi sînt aplicate și forțele cu care acționează primul și al treilea solid asupra celui de-al doilea. Astfel, vom obține încă șase ecuații în care vor intra reacțiunile interioare necunoscute și anume forțele de interacțiune dintre al doilea solid și celelalte două solide. În același timp este evident că forțele cu care acționează cel de-al doilea solid asupra primului



solid sînt egale ca modul și direcție dar opuse ca sens, cu forțele cu care acționează primul solid asupra celui de-al doilea solid. Această operație o vom folosi pentru toate solidele sistemului. Dacă numărul solidelor este egal cu  $n$ , atunci numărul total de ecuații va fi  $6+6n$ ; dacă problema este plană, atunci numărul ecuațiilor va fi egal cu  $3+3n$ .

Cele  $6+6n$  ecuații sau cele  $3+3n$  ecuații obținute nu vor fi toate independente, deoarece ecuațiile de echilibru scrise pentru întregul sistem vor fi consecințe ale celorlalte ecuații de echilibru. Numărul ecuațiilor poate fi și mai mic, dacă unele din ele se transformă în identități sau sînt consecințele altor ecuații. Dacă din ecuațiile obținute putem determina toate reacțiunile, atunci problema poate fi considerată static determinată; în caz contrar, problema va fi static nedeterminată. Vedem că această metodă în esența ei este identică cu metoda expusă în paragraful precedent, pentru determinarea forțelor interioare care acționează într-un solid.

Pentru lămurirea celor expuse să examinăm următorul exemplu. Pe un cilindru de rază  $a$  sînt așezate două bare identice  $AB$

și  $AB_1$ , avînd greutatea egală cu  $P$  și lungimile  $2l$ ; barele sînt legate în punctul  $A$  printr-o articulație. Să găsim unghiul format de bare în poziția de echilibru, presupunînd că punctul  $A$  și punctul  $O$ , centrul cilindrului, se află pe aceeași verticală și că neglijăm frecarea (fig. 104). Fie  $C$  și  $C_1$  centrele de greutate ale barelor  $AB$  și  $AB_1$ ,  $\angle OAD = \alpha$ . În punctele  $D$  și  $D_1$  se dezvoltă reacțiunile exterioare care sînt normale la barele  $AB$  și  $AB_1$ , și ale căror module sînt egale între ele; notăm aceste module prin  $R$ . Considerînd mai întîi sistemul celor două bare în ansamblu, formăm ecuațiile lui de echilibru. Alegem axele de coordonate  $Ox, Oy$ , astfel cum se arată în fig. 104. Proiectînd toate forțele pe

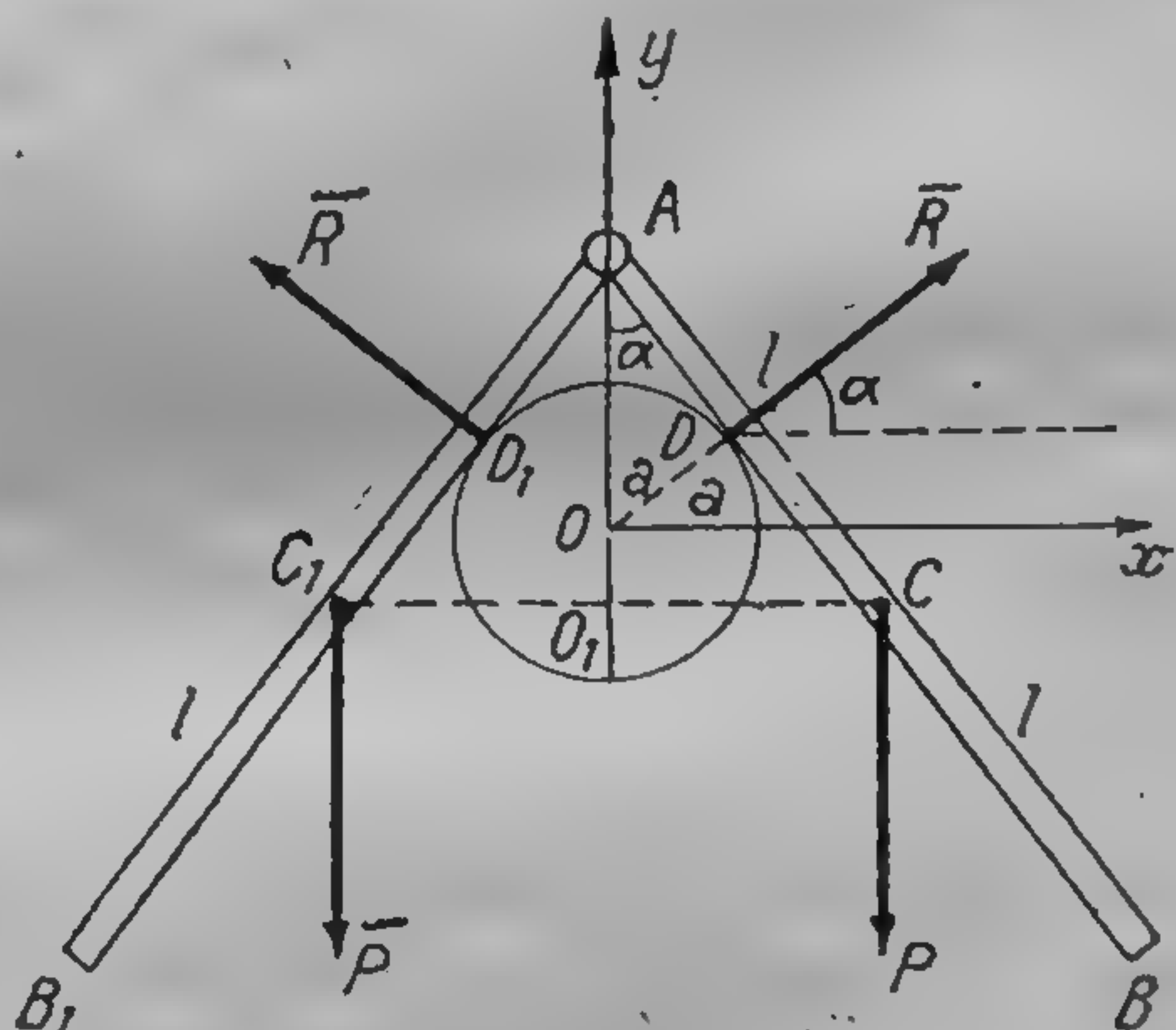


Fig. 104



axele  $Ox$  și  $Oy$  și luând momentele acestor forțe în raport cu punctul  $O$ , vom obține:

$$R \cos \alpha - R \cos \alpha = 0,$$

$$2R \sin \alpha - 2P = 0,$$

$$P \cdot O_1 C_1 - P \cdot O_1 C = 0.$$

Vedem că prima și a treia ecuație se transformă în identități și rămâne numai ecuația a doua care simplificată cu 2 va căpăta forma:

$$R \sin \alpha - P = 0.$$

Să izolăm bara din dreapta de cea din stînga și să studiem numai echilibrul barei din dreapta  $AB$ . Pentru a menține bara  $AB$  în echilibru, trebuie să aplicăm în punctul  $A$  forța cu care bara din stînga acționează asupra celei din dreapta. Fie  $X$  și  $Y$  proiecțiile forței; după cum rezultă clar din fig. 104,  $X$  trebuie să fie orientat spre stînga. Astfel, asupra barei din dreapta acționează patru forțe cu modulele  $P$ ,  $R$ ,  $X$ ,  $Y$ . Scriind ecuațiile de echilibru, vom avea:

$$-X + R \cos \alpha = 0,$$

$$Y + R \sin \alpha - P = 0,$$

$$X \frac{a}{\sin \alpha} - Pl \sin \alpha = 0.$$

Ținînd seamă de ecuația precedentă  $R \sin \alpha - P = 0$ , vom obține din ecuația a doua că  $Y = 0$ ; aceasta se poate deduce și direct datorită simetriei. Mai departe vom avea:

$$R = \frac{P}{\sin \alpha},$$

$$X = R \cos \alpha = P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Introducînd această valoare a lui  $X$  în ecuația a treia vom găsi:

$$-\frac{Pa \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + Pl \sin \alpha = 0.$$

De aici, prin simplificare cu  $P$ , vom obține:

$$\sin^3 \alpha - \frac{a}{l} \cos \alpha = 0.$$



Impărțind ambele părți ale acestei ecuații cu  $\cos^3 \alpha$ , vom avea:

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{a}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0;$$

deoarece

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

ajungem la următoarea ecuație de gradul trei pentru determinarea unghiului  $\alpha$  în poziția de echilibru:

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{a}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{a}{l} = 0. \quad (12.2)$$

Determinînd de aici unghiul  $\alpha$  și introducînd valoarea lui în expresiile lui  $R$  și  $X$ , vom găsi modulele reacțiunii interioare și exterioare. Din cauza simetriei este evident că cercetarea ecuațiilor de echilibru ale barei din stînga nu ne dă nici un rezultat suplimentar.

**§ 53. Principiul lui Torricelli.** Pentru cazul sistemelor grele se mai poate utiliza și următorul procedeu pentru găsirea pozițiilor de echilibru, care apare ca un caz particular al principiului general al staticii stabilit de Lagrange, principiul deplasărilor virtuale. Dacă sistemul este greu, este evident că el va fi în poziția de echilibru stabil, cînd centrul lui de greutate ocupă poziția cea mai joasă, astfel ca în cazul unei mici devieri din această poziție, centrul de greutate să se poată doar ridica. Dacă în cazul unei mici devieri a sistemului, centrul de greutate nici nu se ridică, nici nu coboară, atunci în poziția considerată sistemul este în *echilibru indiferent*, cum este de exemplu cazul unei sfere grele omogene, situată pe un plan orizontal. În sfîrșit, dacă centrul de greutate ocupă poziția cea mai de sus, astfel că în cazul unei deplasări a sistemului din această poziție centrul de greutate să coboare, atunci, deși corpul este în echilibru, poziția de echilibru considerată este nestabilă, așa cum este, spre exemplu, poziția de echilibru a unui con circular drept, așezat vertical pe vîrf. Notăm prin  $\zeta$  coordonata pe verticală a centrului de greutate al sistemului. Poziția echilibrului indiferent se caracterizează prin faptul că  $\zeta = \text{const}$ . Poziția echilibrului stabil se caracterizează prin faptul că în această poziție  $\zeta$  va fi un minim, dacă axa verticală este orientată în sus; este clar că în cazul cînd axa verticală este orientată în jos, mărimea  $\zeta$  trebuie să fie maximă. În cazul echilibrului nestabil, valorile lui  $\zeta$  sînt inverse. În această constă principiul lui Torricelli (1608—1647). Să presupunem că valoarea coordonatei  $\zeta$  depinde de un para-



metru oarecare  $\alpha$  astfel ca  $\zeta = f(\alpha)$ . Din cele precedente urmează că pentru găsirea pozițiilor de echilibru stabil sau nestabil ale sistemului, trebuie să se caute maximum sau minimum, adică extremalele funcției  $\zeta = f(\alpha)$ . Din calculul diferențial se știe că valorile  $\alpha$  care corespund unui maxim sau minim satisfac relația:

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = f'(\alpha) = 0, \text{ sau } d\zeta = f'(\alpha) d\alpha = 0.$$

În cazul echilibrului indiferent  $\zeta = \text{const}$  și avem iarăși  $d\zeta = 0$ . Dacă coordonata  $\zeta$  este o funcție de mai mulți parametri, de exemplu  $\zeta = f(\alpha, \beta, \gamma)$ , atunci, pentru găsirea maximumului sau minimumului ei, este necesar să fie satisfăcute condițiile:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0.$$

Deoarece

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} d\gamma,$$

condițiile precedente sînt și ele echivalente cu  $d\zeta = 0$  și invers. În acest fel, pentru găsirea poziției de echilibru a unui sistem greu, trebuie să se găsească soluțiile ecuației

$$d\zeta = 0. \quad (12.3)$$

Pentru a arăta cum trebuie să se aplice practic acest procedeu, să examinăm următorul exemplu. O bară omogenă și grea

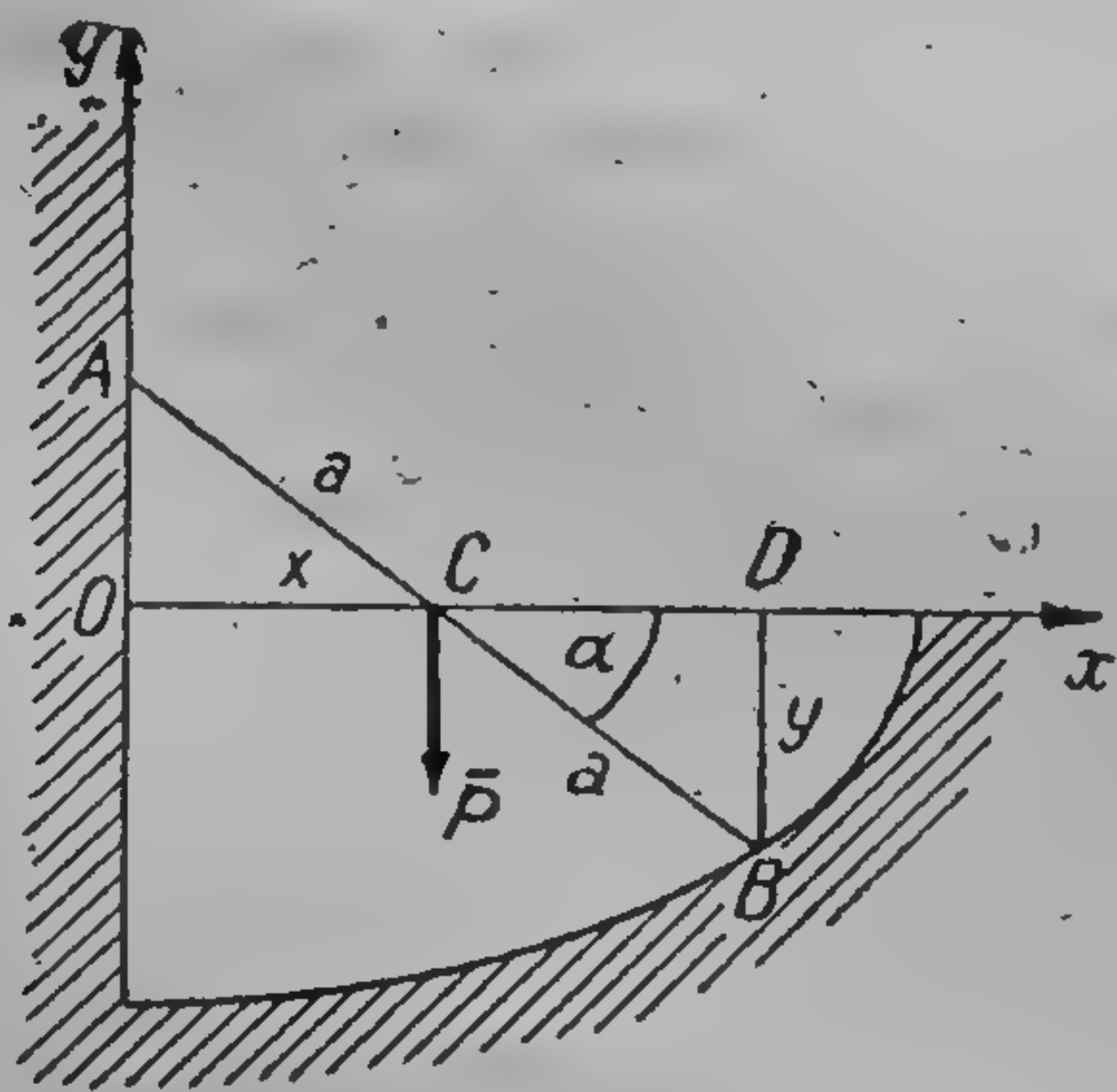


Fig. 105

de lungime  $2a$  se reazemă cu capătul  $A$  pe un perete vertical și cu celălalt capăt  $B$  pe o curbă oarecare; să se găsească această curbă cu condiția ca bara să rămână în echilibru în toate pozițiile, adică bara să fie în echilibru indiferent. Deoarece bara este în echilibru indiferent, trebuie să avem  $\zeta = \text{const}$ , adică centrul de greutate  $C$  al barei trebuie să se deplaseze pe o dreaptă orizontală. Să alegem această dreaptă ca axă  $Ox$  și dreapta

verticală pe care alunecă capătul  $A$  ca axă  $Oy$  (fig. 105). Astfel ajungem la următoarea problemă. Să se afle curba descrisă de ca-



pătul  $B$  al barei al cărei centru  $C$  alunecă pe orizontala  $Ox$  și capătul  $A$  pe verticala  $Oy$ . Notînd unghiul format de bara cu axa  $Ox$  prin  $\alpha$  avem pentru coordonatele punctului  $B$  următoarele expresii:

$$y = -DB = -a \sin \alpha, \quad x = OD = 2OC = 2a \cos \alpha.$$

De aici obținem:

$$\frac{x}{2a} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{a} = -\sin \alpha.$$

Ridicînd la pătrat și adunînd vom avea:

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

adică capătul  $B$  al barei trebuie să se rezeme pe o elipsă cu semiaxele  $2a$  și  $a$ .

Pentru a lămuri mai bine acest principiu îl vom aplica și la exemplul studiat în § 52. Deoarece centrul de greutate al barei  $AB$  (fig. 104) se află în punctul  $C$ , iar centrul de greutate al barei identice  $AB_1$  se află în punctul  $C_1$ , atunci centrul de greutate al sistemului se află în punctul  $O_1$  care este mijlocul segmentului  $CC_1$ . Să găsim coordonata  $\zeta = OO_1$ . Avem:

$$OO_1 = AO_1 - AO;$$

dar din  $\triangle AO_1C$  obținem:

$$AO_1 = l \cos \alpha,$$

iar din  $\triangle AOD$  obținem:

$$AO = \frac{a}{\sin \alpha};$$

prin urmare,

$$\zeta = -l \cos \alpha + \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Vedem că în problema examinată avem:

$$f(\alpha) = -l \cos \alpha + \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Ecuția de echilibru

$$d\zeta = f'(\alpha) d\alpha = 0$$

ia forma

$$f'(\alpha) = +l \sin \alpha - \frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

de unde găsim:

$$l \sin^3 \alpha - a \cos \alpha = 0.$$



După efectuarea transformării arătate în paragraful precedent, obținem ecuația de gradul trei

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{a}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{a}{l} = 0,$$

adică ajungem la soluția (12.2).

Ătragem atenția că la folosirea acestui procedeu nu trebuie să ținem seamă de loc de reacțiuni; în această constă avantajul acestui procedeu. Mai departe, cu ocazia expunerii principiului deplasărilor virtuale al lui Lagrange, vom vedea motivul pentru care se elimină aceste reacțiuni.



# STATICA GRAFICĂ

---

## CAPITOLUL XIII

### POLIGON FUNICULAR

§ 54. Importanța staticii grafice. Poligon funicular. La rezolvarea multor probleme ale staticii se pot aplica procedee grafice. Totuși, în prezent, cu tehnica larg dezvoltată a calculelor, cu utilizarea mașinilor de calculat care în multe cazuri fac inutile chiar și tabelele de logaritmi, ținând seamă că exactitatea procedeelor grafice este limitată, precizia rezultatului depinzând de exactitatea construcțiilor și măsurătorilor pe desene, apare naturală întrebarea, dacă este rațional să se studieze procedeele grafice și să ne ocupăm de ele sau să le considerăm ca ceva de domeniul trecutului. O asemenea părere asupra procedeelor grafice de rezolvare a problemelor statice, ar fi greșită. Procedeele grafice de rezolvare a problemelor statice au un avantaj față de rezolvările algebrice; ele ne permit ca într-un singur tablou să cuprindem problema în ansamblul ei și fac ca rezultatele obținute să fie sugestive, ușurând găsirea imediată a greșelilor strecurate. Calculele algebrice nu au aceste proprietăți; prin utilizarea lor, rezolvarea problemei se desfășoară fără a fi sugestivă și fiecare rezultat se obține ca urmare a celui alt. În plus, deși exactitatea calculelor algebrice poate fi cât de mare dorim, totuși în fiecare problemă practică datele sînt de obicei aproximative; de aceea efectuarea calculelor algebrice cu o exactitate mai mare decît a premiselor de calcul este în general inutilă; exactitatea procedeelor grafice este foarte des suficientă. În sfîrșit, din cauza iuțelii și ușurinței aplicării în rezolvarea unor probleme de statică într-o serie de cazuri practice procedeele grafice sînt mai avantajoase decît calculele algebrice. De aceea, procedeele grafice sînt foarte folositoare cînd sîntem nevoiți să studiem mai multe variante spre a alege dintre ele pe cea mai avantajoasă; o dată varianta aleasă, putem aplica procedeele exacte, dar totdeauna destul de groaie, ale calculului algebric. Toate aceste considerente ne obligă să folosim chiar și în prezent procedee grafice pentru rezolvarea problemelor de statică.



La mijlocul secolului al XIX-lea, diferitele procedee grafice existente atunci pentru rezolvarea problemelor de statică au fost strinse într-un studiu separat, punându-se bazele unei științe speciale — *statica grafică*. Construcțiile din statica grafică au fost dezvoltate mai ales pentru sisteme de forțe în plan. În prezentul curs vor fi examinate pe scurt unele construcții numai pentru problemele plane; o expunere cu mult mai amănunțită a acestor probleme se poate găsi în lucrarea prof. V. L. Kirpicev, „Bazele staticii grafice” (1933). Există construcții în statica grafică și pentru sistemele de forțe spațiale, dar aceste construcții sînt destul de complicate și prin urmare ele nu vor fi studiate în cursul de față. Cei ce doresc să le cunoască, le pot găsi în

lucrarea prof. B. N. Gorbunov și prof. A. A. Umanski „Statica sistemelor spațiale” (1932). Statica grafică în spațiu folosește procedeele geometriei descriptive, reprezentare convențională a figurilor din spațiu pe un desen plan.

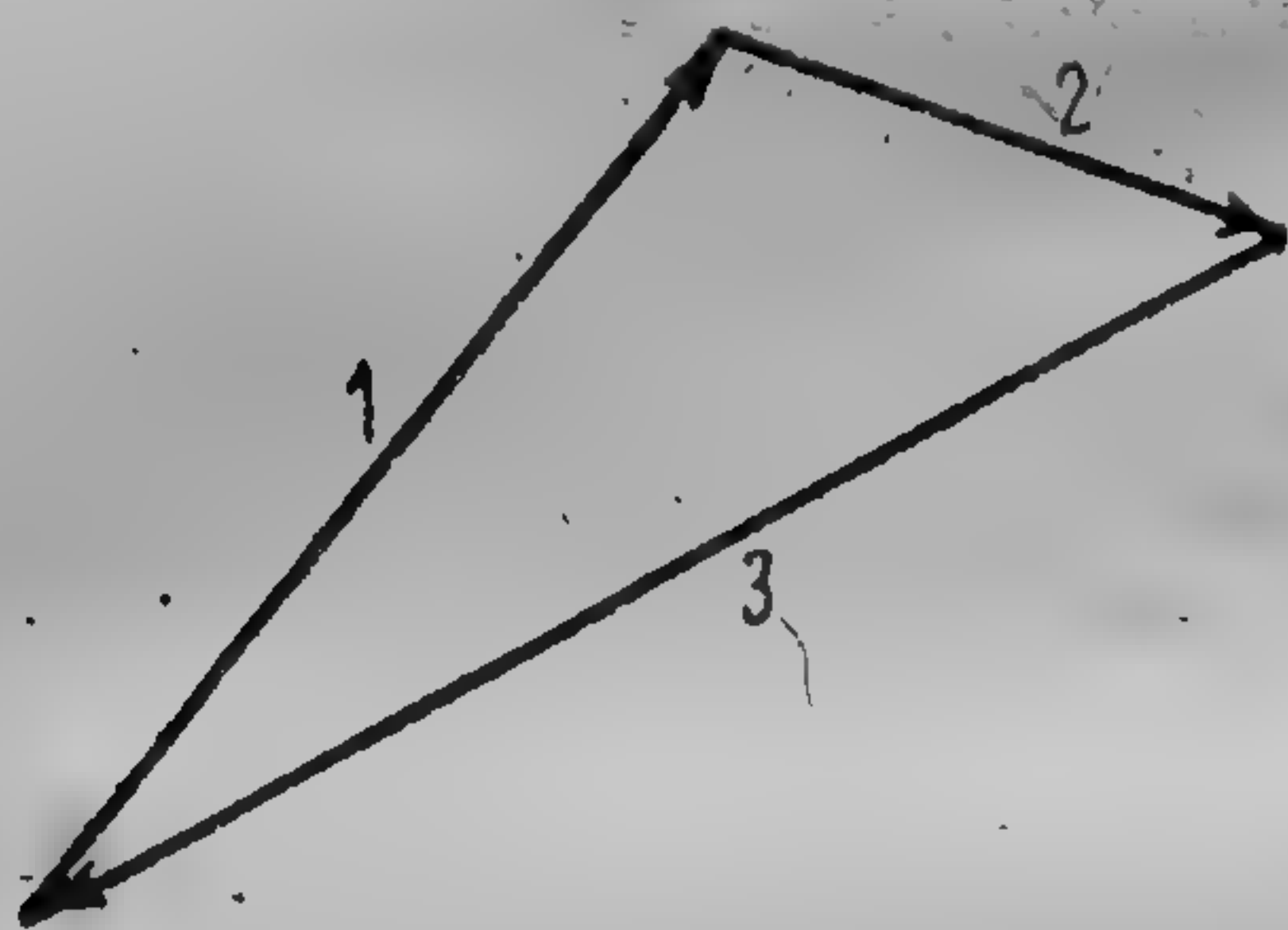


Fig. 106

Dacă avem un sistem plan de forțe, atunci putem întâlni numai trei cazuri; sau sistemul se reduce la o rezultantă, sau la un cuplu, sau se echilibrează. Ca și mai înainte, vom reprezenta forțele prin vectori (segmente de dreaptă cu săgeți), notînd acești vectori prin cifre. Noi știm că dacă poligonul forțelor construit pentru sistemul plan de forțe dat este închis, atunci sistemul de forțe, fie că se reduce la un cuplu, fie că este în echilibru. În ambele cazuri, sensul săgeților care reprezintă forțele, stabilesc sensul de parcurgere al perimetrului poligonului. În cazul a trei forțe vom obține în acest fel triunghiul forțelor (fig. 106). Este evident că dacă se modifică sensul unui vector, atunci el va reprezenta rezultanta forțelor reprezentate prin ceilalți vectori.

Să considerăm un sistem de forțe plane, de exemplu, sistemul format din patru forțe 1, 2, 3, 4 reprezentat în fig. 107, stînga. Construim pentru acest sistem de forțe poligonul forțelor  $a b c d e$  reprezentat în fig. 107, dreapta. Dacă poligonul forțelor se va închide, atunci ori va avea loc echilibrul ori sistemul se va reduce la un cuplu; astfel, închiderea poligoanelor forțelor este



o condiție de echilibru, necesară dar nu și suficientă. Dacă însă poligonul forțelor este deschis, atunci sistemul de forțe se reduce nu numai la o rezultantă, așa cum se întâmplă în cazul fig. 107, unde dreapta de închidere  $ae$  a liniei frânțe  $abcd$  dă mărimea, direcția și sensul rezultantei; desigur că laturile  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ , și  $de$  ale acestei linii frânțe trebuie să fie paralele și egale cu forțele 1, 2, 3, 4, pentru ca direcția  $ae$  să reprezinte cu adevărat direcția rezultantei  $\bar{F}$ . Pentru a cunoaște complet rezultanta  $\bar{F}$ , este necesar să găsim un punct oarecare prin care trece suportul acestei forțe  $\bar{F}$ . Pentru rezolvarea acestei ultime probleme să

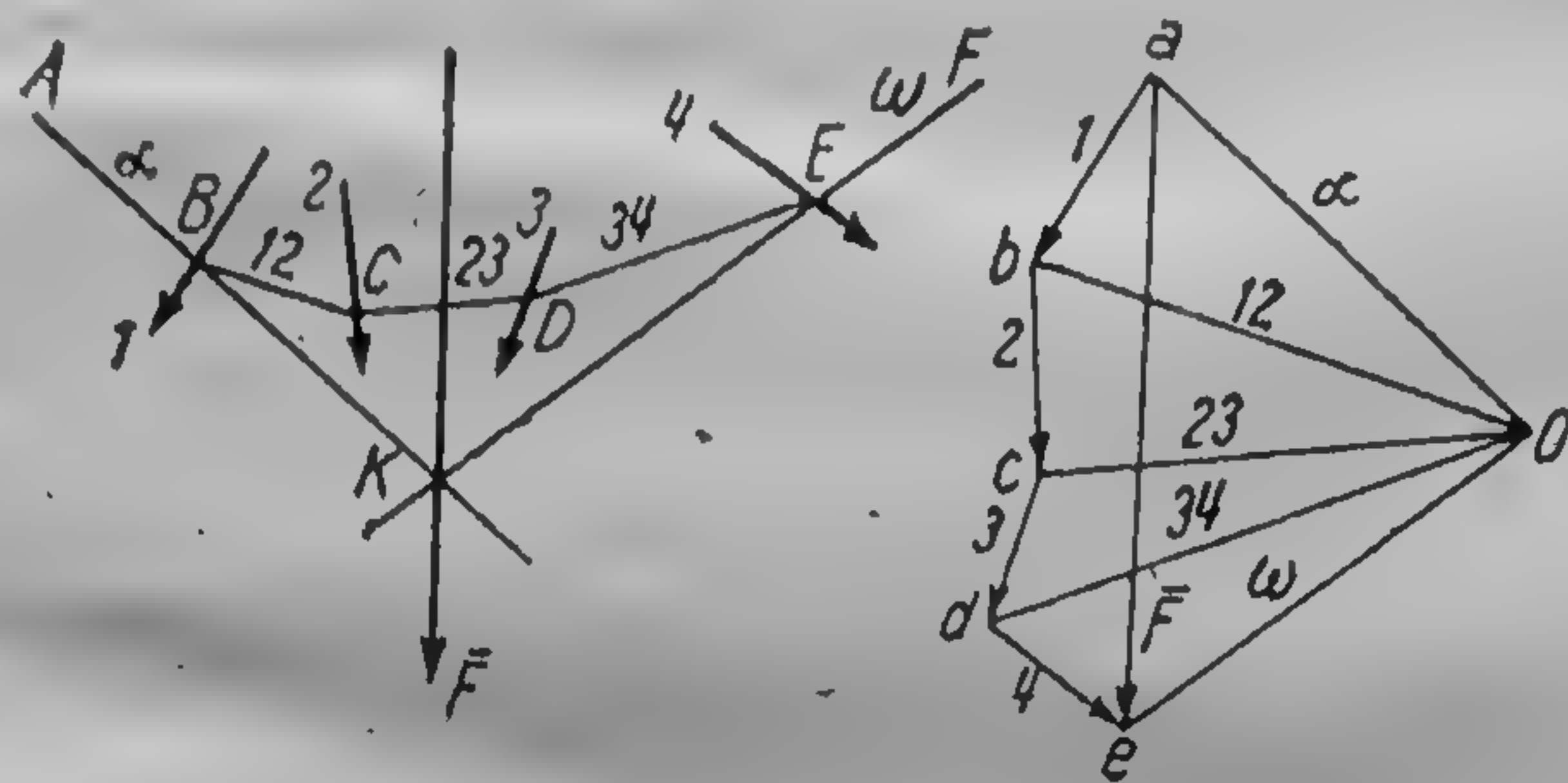


Fig. 107

luăm un punct oarecare  $O$ , din plan, pe care-l vom numi *pol*. Unim polul  $O$  cu vîrfurile liniei frânțe (1, 2, 3, 4). Vom denumi aceste drepte *raze*; prima și ultima rază le vom nota cu prima și ultima literă din alfabetul grecesc  $\alpha$  și  $\omega$ , iar razele intermediare prin cele două cifre ale laturilor liniei frânțe în ale căror puncte de intersecție este dusă raza considerată. Astfel, raza 12 este dusă în punctul de intersecție al laturilor 1 și 2; raza 23 este dusă prin punctul de intersecție al laturilor 2 și 3 etc. Ca și mai înainte vom numi poligonul (1, 2, 3, 4) *poligonul forțelor*. Construim acum al doilea poligon, reprezentat în fig. 107, stînga. Luăm un punct arbitrar  $A$  al planului și ducem prin el dreapta  $AB$  paralelă cu raza  $\alpha$ , pînă în punctul  $B$  unde această dreaptă intersectează suportul forței 1 așa cum se arată în fig. 107, stînga. Prin punctul  $B$  vom duce dreapta  $BC$  paralelă cu raza 12 pînă în punctul  $C$  unde intersectează suportul forței 2 etc. În sfîrșit, prin punctul  $E$  vom duce dreapta  $EF$  paralelă la raza  $\omega$ . Astfel, vom obține linia poligonală  $ABCDEF$ , ale cărei laturi le vom nota la fel cu razele paralele cu ele. Această linie poligonală ( $\alpha$ , 12, 23, 34,  $\omega$ ) o vom numi *poligon funicular*, *poligon articulat* sau



o condiție de echilibru, necesară dar nu și suficientă. Dacă însă poligonul forțelor este deschis, atunci sistemul de forțe se reduce numai la o rezultantă, așa cum se întâmplă în cazul fig. 107, unde dreapta de închidere  $ae$  a liniei frânțe  $abcde$  dă mărimea, direcția și sensul rezultantei; desigur că laturile  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$ , și  $de$  ale acestei linii frânțe trebuie să fie paralele și egale cu forțele 1, 2, 3, 4, pentru ca direcția  $ae$  să reprezinte cu adevărat direcția rezultantei  $F$ . Pentru a cunoaște complet rezultanta  $\bar{F}$ , este necesar să găsim un punct oarecare prin care trece suportul acestei forțe  $\bar{F}$ . Pentru rezolvarea acestei ultime probleme să

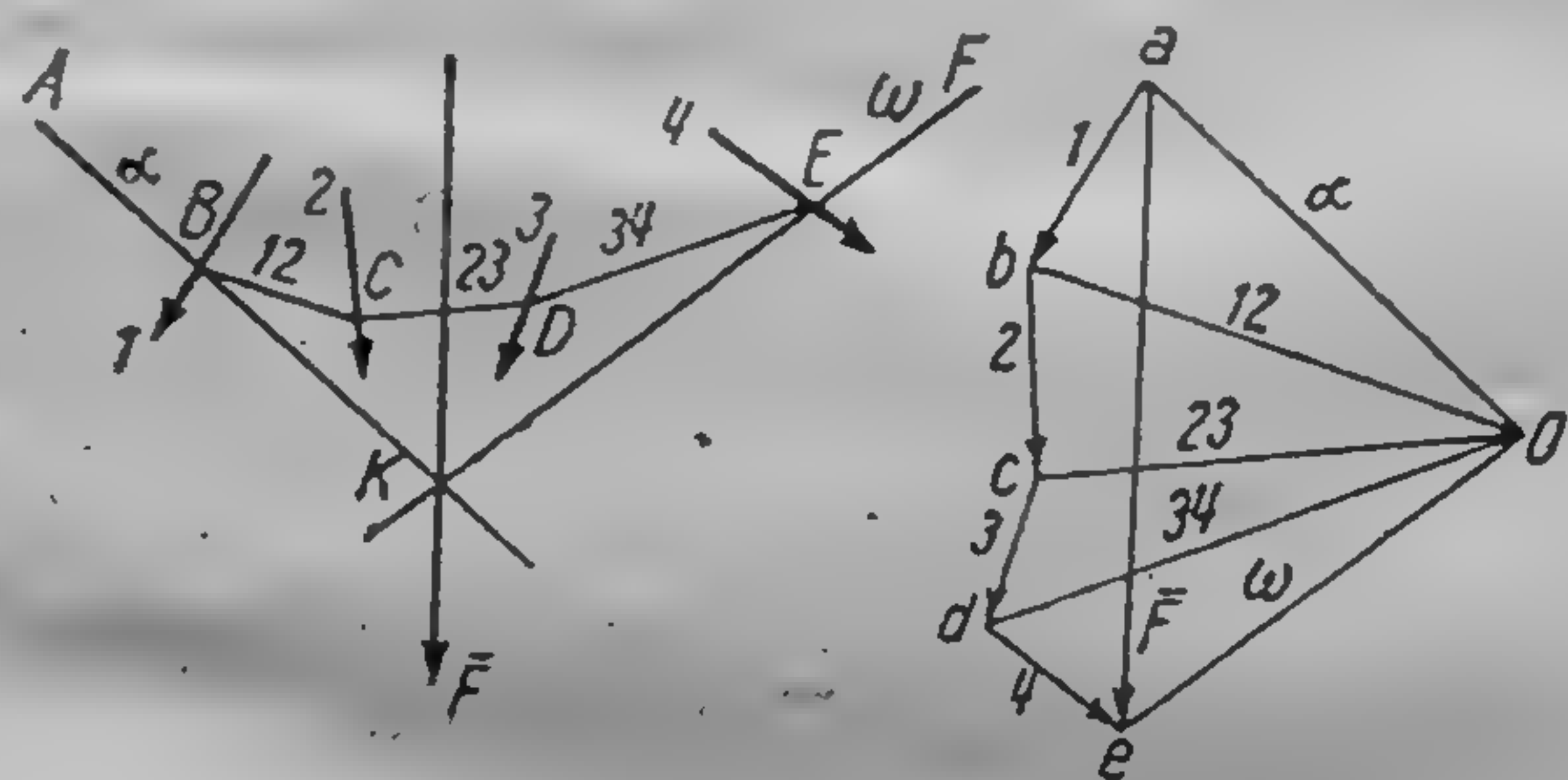


Fig. 107

luăm un punct oarecare  $O$ , din plan, pe care-l vom numi *pol.* Unim polul  $O$  cu vîrfurile liniei frânțe (1, 2, 3, 4). Vom denumi aceste drepte *raze*; prima și ultima rază le vom nota cu prima și ultima literă din alfabetul grecesc  $\alpha$  și  $\omega$ , iar razele intermediare prin cele două cifre ale laturilor liniei frânțe în ale căror puncte de intersecție este dusă raza considerată. Astfel, raza 12 este dusă în punctul de intersecție al laturilor 1 și 2; raza 23 este dusă prin punctul de intersecție al laturilor 2 și 3 etc. Ca și mai înainte vom numi poligonul (1, 2, 3, 4) *poligonul forțelor*. Construim acum al doilea poligon, reprezentat în fig. 107, stînga. Luăm un punct arbitrar  $A$  al planului și ducem prin el dreapta  $AB$  paralelă cu raza  $\alpha$ , pînă în punctul  $B$  unde această dreaptă intersectează suportul forței 1 așa cum se arată în fig. 107, stînga. Prin punctul  $B$  vom duce dreapta  $BC$  paralelă cu raza 12 pînă în punctul  $C$  unde intersectează suportul forței 2 etc. În sfîrșit, prin punctul  $E$  vom duce dreapta  $EF$  paralelă la raza  $\omega$ . Astfel, vom obține linia poligonală  $ABCDEF$ , ale cărei laturi le vom nota la fel cu razele paralele cu ele. Această linie poligonală ( $\alpha$ , 12, 23, 34,  $\omega$ ) o vom numi *poligon funicular*, *poligon articulat* sau



poligonul lui Varignon. Atragem atenția asupra următoarei legături dintre ambele desene reprezentate în fig. 107. Laturile ambelor figuri sînt respectiv paralele. Fiecărui triunghi din prima figură îi corespund trei drepte care se întretaie într-un punct din cealaltă figură și invers. În adevăr, să examinăm, de exemplu, triunghiul format de dreptele 12,  $\alpha$ , 1 din poligonul forțelor. În poligonul funicular, dreptele corespunzătoare se întretaie în punctul B. Triunghiului format de poligonul funicular, de dreapta 12 și prelungirile segmentelor 1 și 2, îi corespund în poligonul forțelor dreptele 1, 2 și 12, care se întretaie în punctul b. O asemenea corespondență a două

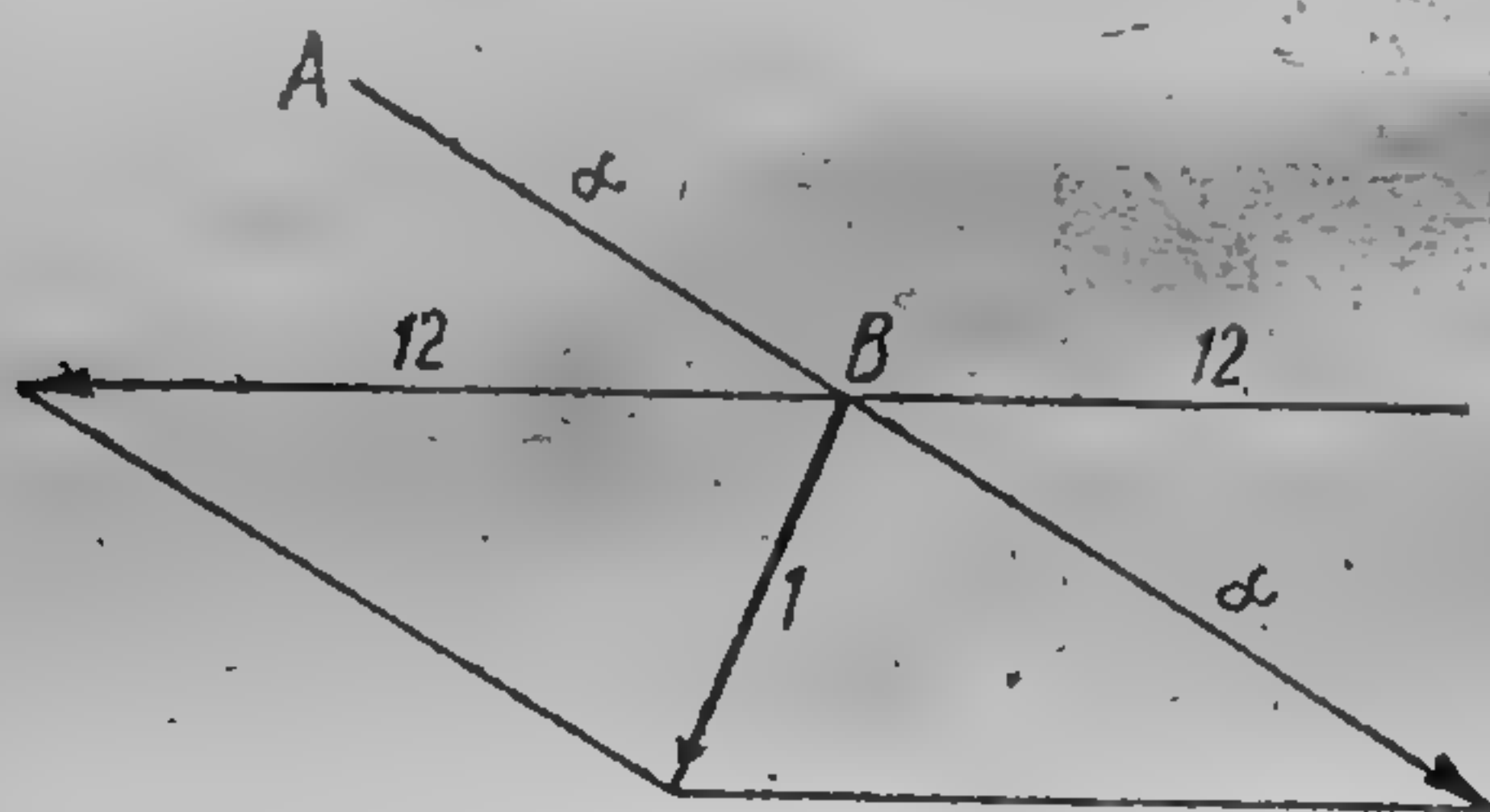


Fig. 108

figuri se numește *reciprocă*, iar figurile se numesc și ele *reciproce*. Folosindu-ne de construcția razelor în poligonul forțelor, forța 1 se poate descompune în două forțe  $\alpha$  și 12, paralele și egale cu aceste raze. Forța  $\alpha$  este dirijată înspre punctul O, forța 12 dinspre punctul O. Mutînd

forțele 1,  $\alpha$  și 12 în punctul B, vom vedea că de fapt am efectuat în acest fel descompunerea forței 1 în două forțe, paralele cu razele  $\alpha$  și 12, după legea paralelogramului (fig. 108) și nu este de loc nevoie să desenăm acest paralelogram, deoarece forțele necunoscute  $\alpha$  și 12 ne sînt date direct pe desen în poligonul forțelor. Tot astfel forța 2 poate fi descompusă în două forțe 12 și 23, dintre care prima este dirijată înspre punctul O, iar a doua este dirijată dinspre punctul O. Mutînd aceste forțe în poligonul funicular, vedem că de-a lungul laturii sale 12 se vor așeza două forțe egale cu raza 12 dar dirijate în sens opus. Continuînd această construcție, vom găsi că sistemul de forțe date 1, 2, 3, 4, se poate înlocui cu forțe care merg de-a lungul laturilor poligonului funicular. De-a lungul fiecărei laturi intermediare 12, 23, 34, sînt dirijate cîte două forțe direct opuse și respectiv egale cu razele 12, 23 și 34; prin urmare aceste forțe se echilibrează între ele. Rămîn neechilibrate cele două forțe dirijate de-a lungul laturilor extreme  $\alpha$  și  $\omega$  și egale respectiv cu razele  $\alpha$  și  $\omega$ . Forța  $\alpha$  are direcția  $\alpha O$ , iar forța  $\omega$  direcția  $O\omega$ . În acest fel, sistemul forțelor date 1, 2, 3, 4, s-a redus numai la două forțe concurente  $\alpha$  și  $\omega$ . Prelungind suporturile lor vom obține punctul K, prin



care trebuie să treacă rezultanta lor  $\bar{F}$ ; însă direcția și mărimea rezultanței  $\bar{F}$  sunt cunoscute din poligonul forțelor. Ducind prin punctul  $K$  o dreaptă paralelă cu segmentul  $ae$  și măsurând pe ea forța  $\bar{F}$ , problema este complet rezolvată.

Este evident că acest procedeu este aplicabil pentru orice număr de forțe, oricum ar fi ele situate și în orice ordine ar fi luate.

Trebuie numai să se rețină că forța aplicată unui solid este un vector alunecător și de aceea laturile poligonului funicular

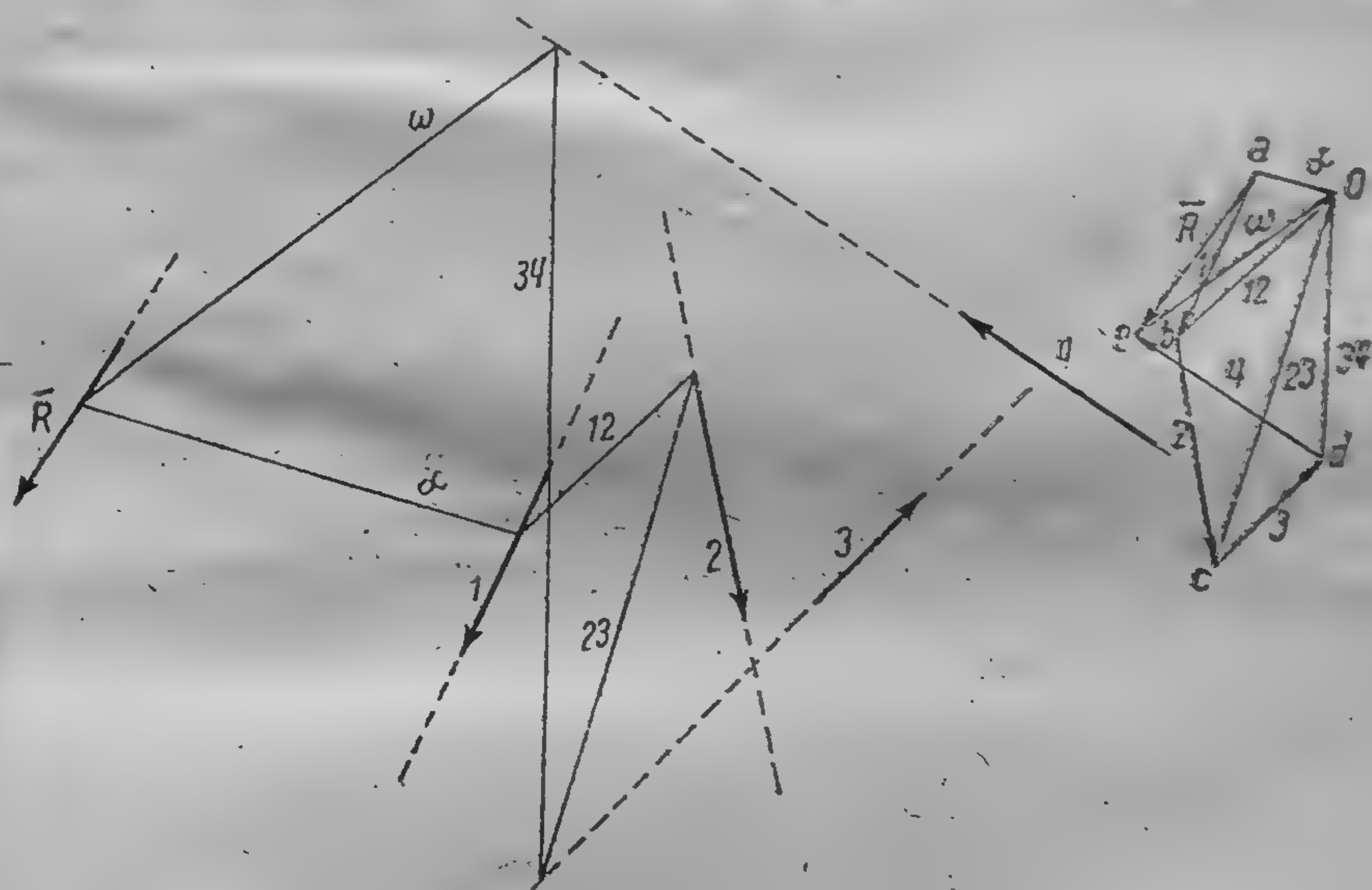


Fig. 109

pot fi limitate atât de forțele înseși, cât și de suporturile lor. În fig. 109 este dată construcția pentru o altă așezare a celor patru forțe 1, 2, 3, 4 diferită de cazul din fig. 107. Și aici aceste patru forțe pot fi înlocuite prin două forțe  $\alpha$  și  $\omega$  iar forțele  $\alpha$  și  $\omega$  pot fi înlocuite prin rezultanta  $\bar{R}$  care trece prin punctul de intersecție al laturilor  $\alpha$  și  $\omega$  ale poligonului funicular.

Presupunem acum că poligonul forțelor va fi închis. În acest caz rezultanta este egală cu zero și sistemul forțelor se reduce la un cuplu sau se echilibrează. Să examinăm cazul a trei forțe, reprezentat în fig. 110. Construind poligonul forțelor, vedem că el este închis. Vom lua într-un punct oarecare polul  $O$  și vom



duce razele  $\alpha$ , 12, 23,  $\omega$ . Deoarece originea și extremitatea poligonului forțelor coincid, razele  $\alpha$  și  $\omega$  se vor suprapune. Prin urmare sistemul celor trei forțe 1, 2, 3 se poate reduce la două

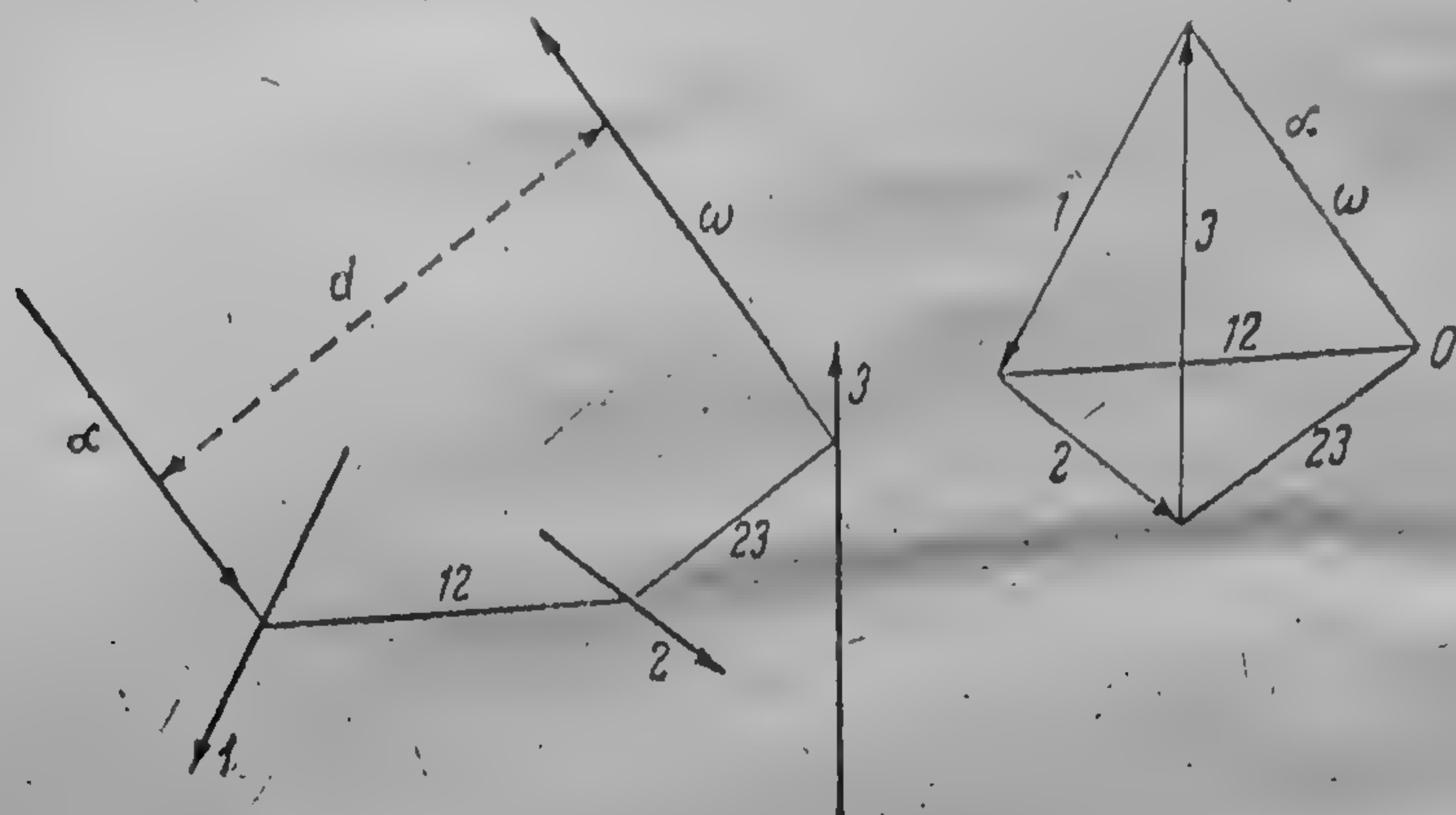


Fig. 110

forțe  $\alpha$  și  $\omega$  egale ca mărime și opuse ca sens. În poligonul funicular laturile  $\alpha$  și  $\omega$  vor fi paralele, deoarece ele trebuie să fie paralele cu razele suprapuse  $\omega$  și  $\alpha$ ; observăm în exemplul nostru

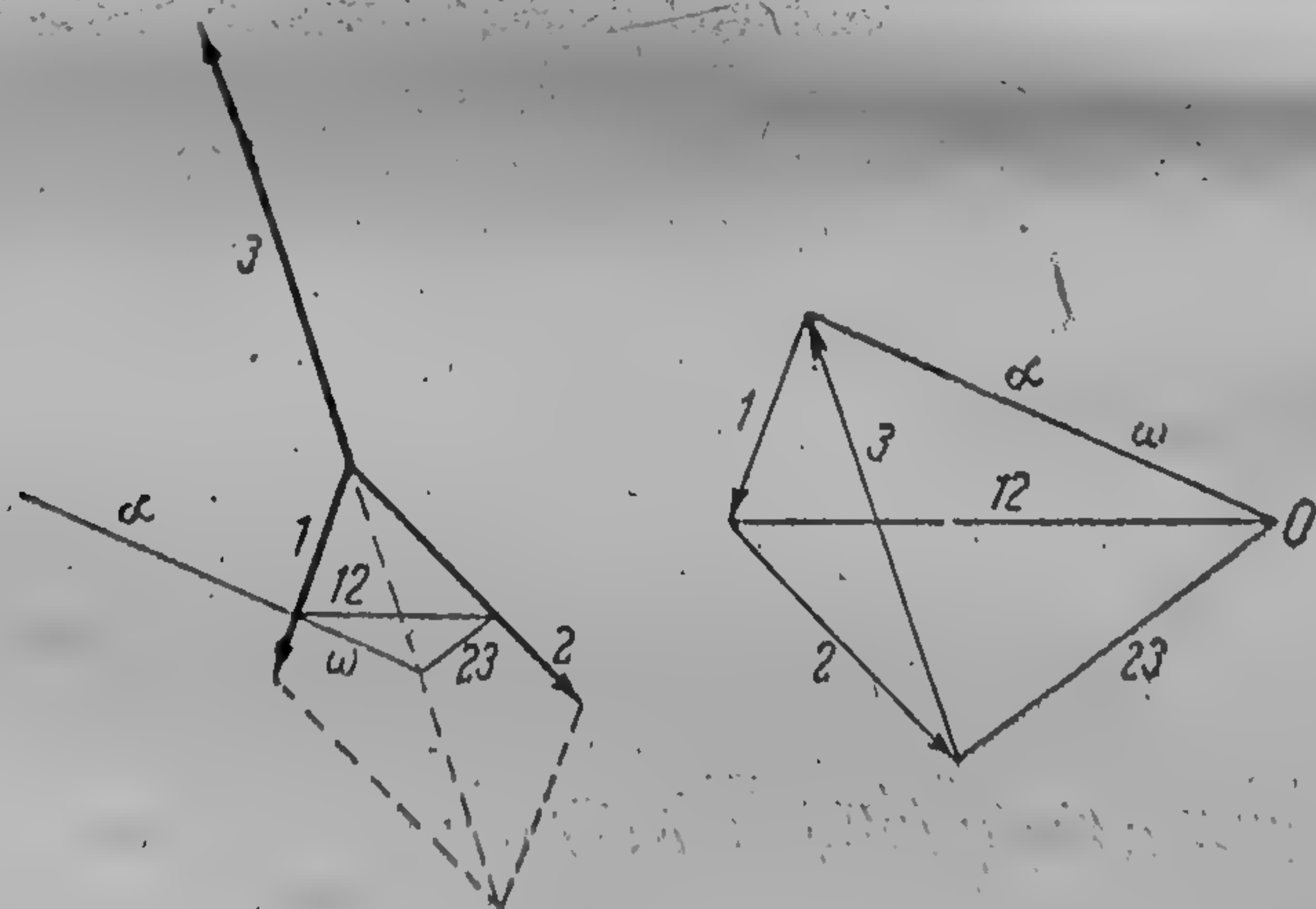


Fig. 111

că aceste laturi nu se suprapun în poligonul funicular. Prin urmare, sistemul de forțe dat se reduce la un cuplu ( $\alpha, \omega$ ), și vom găsi ușor momentul acestui cuplu, măsurând în poligonul for-



duce razele  $\alpha$ , 12, 23,  $\omega$ . Deoarece originea și extremitatea poligonului forțelor coincid, razele  $\alpha$  și  $\omega$  se vor suprapune. Prin urmare sistemul celor trei forțe 1, 2, 3 se poate reduce la două

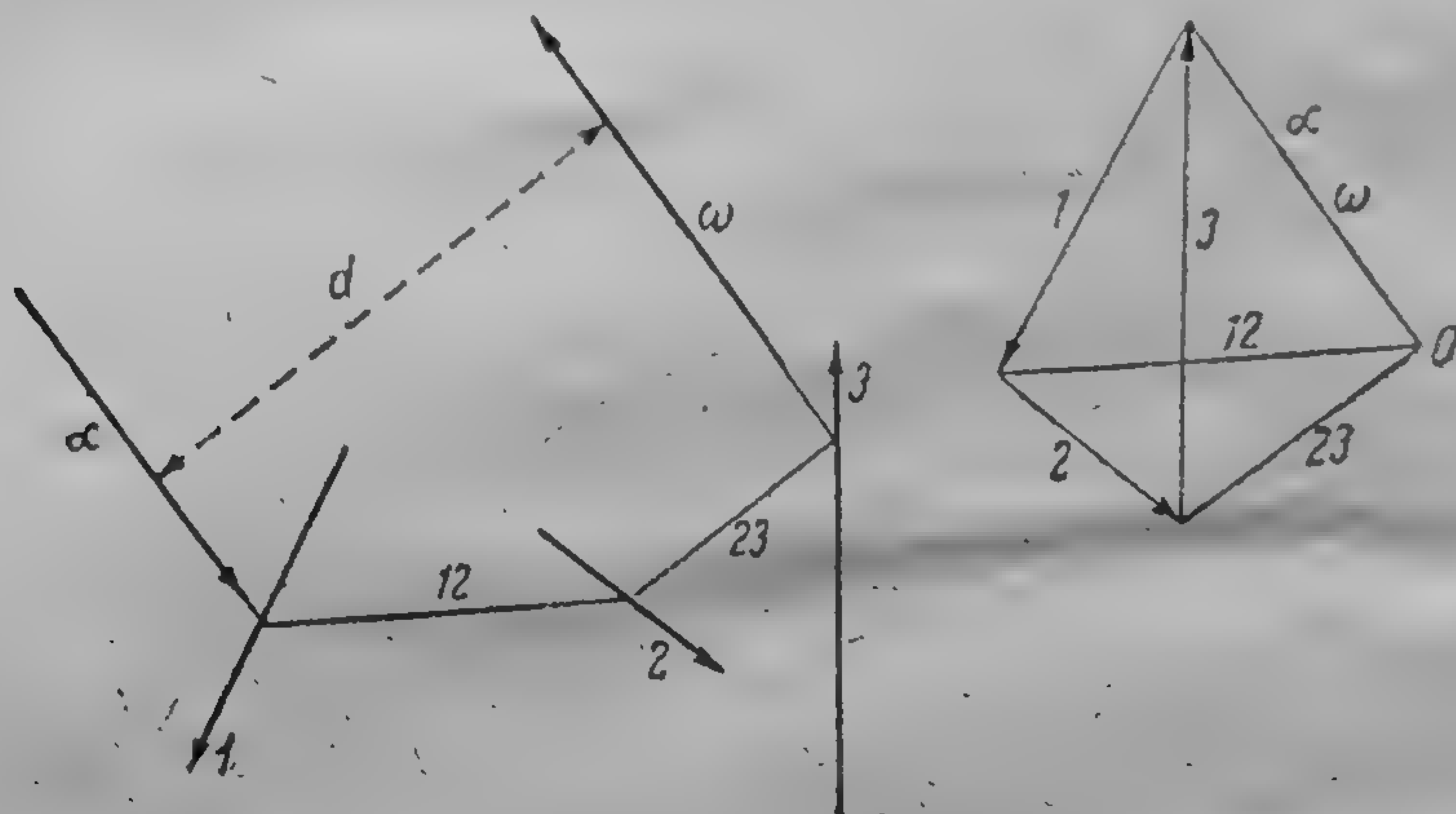


Fig. 110

forțe  $\alpha$  și  $\omega$  egale ca mărime și opuse ca sens. În poligonul funicular laturile  $\alpha$  și  $\omega$  vor fi paralele, deoarece ele trebuie să fie paralele cu razele suprapuse  $\omega$  și  $\alpha$ ; observăm în exemplul nostru

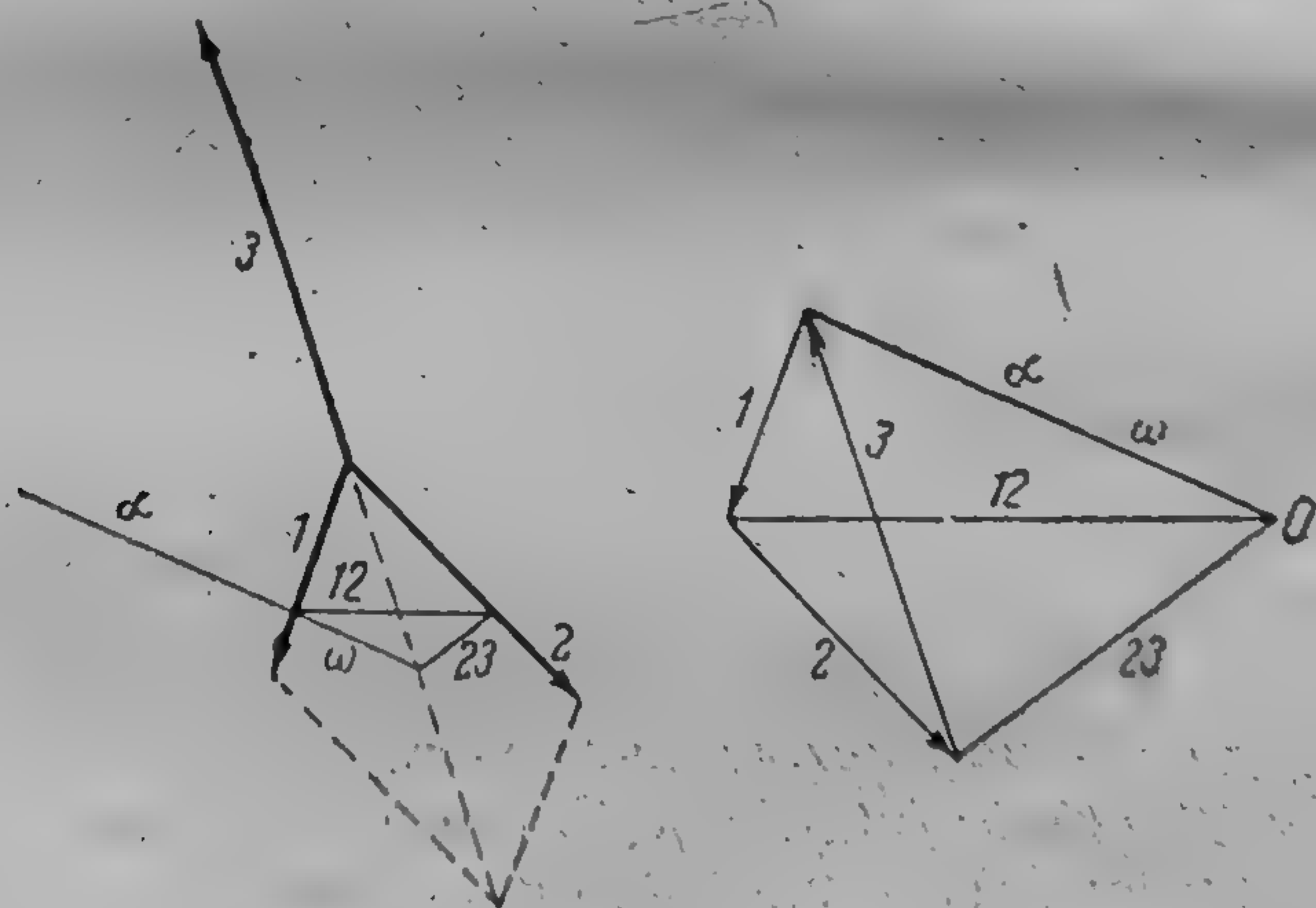


Fig. 111

că aceste laturi nu se suprapun în poligonul funicular. Prin urmare, sistemul de forțe dat se reduce la un cuplu ( $\alpha, \omega$ ), și vom găsi ușor momentul acestui cuplu, măsurând în poligonul for-



țelor modulul  $\alpha = \omega$ , iar în poligonul funicular distanța  $d$  dintre laturile extreme  $\alpha$  și  $\omega$ , care reprezintă brațul cuplului.

Să presupunem, în sfârșit, că nu numai poligonul forțelor, dar și poligonul funicular se va închide, după cum se arată în fig. 111; în acest caz, forțele egale  $\alpha$  și  $\omega$ , la care se reduce sistemul de forțe dat, vor fi situate de-a lungul unei drepte și fiind de sensuri diferite se vor echilibra. Prin urmare, sistemul de forțe dat este de asemenea în echilibru. Astfel, obținem următoarea teoremă:

*Pentru ca un sistem de forțe în plan să fie în echilibru, este necesar și suficient ca poligonul forțelor și poligonul funicular să fie închise.*

Să considerăm două forțe 1 și 2 (fig. 112). Construim pentru ele poligonul forțelor și poligonul funicular. Dacă ne imaginăm

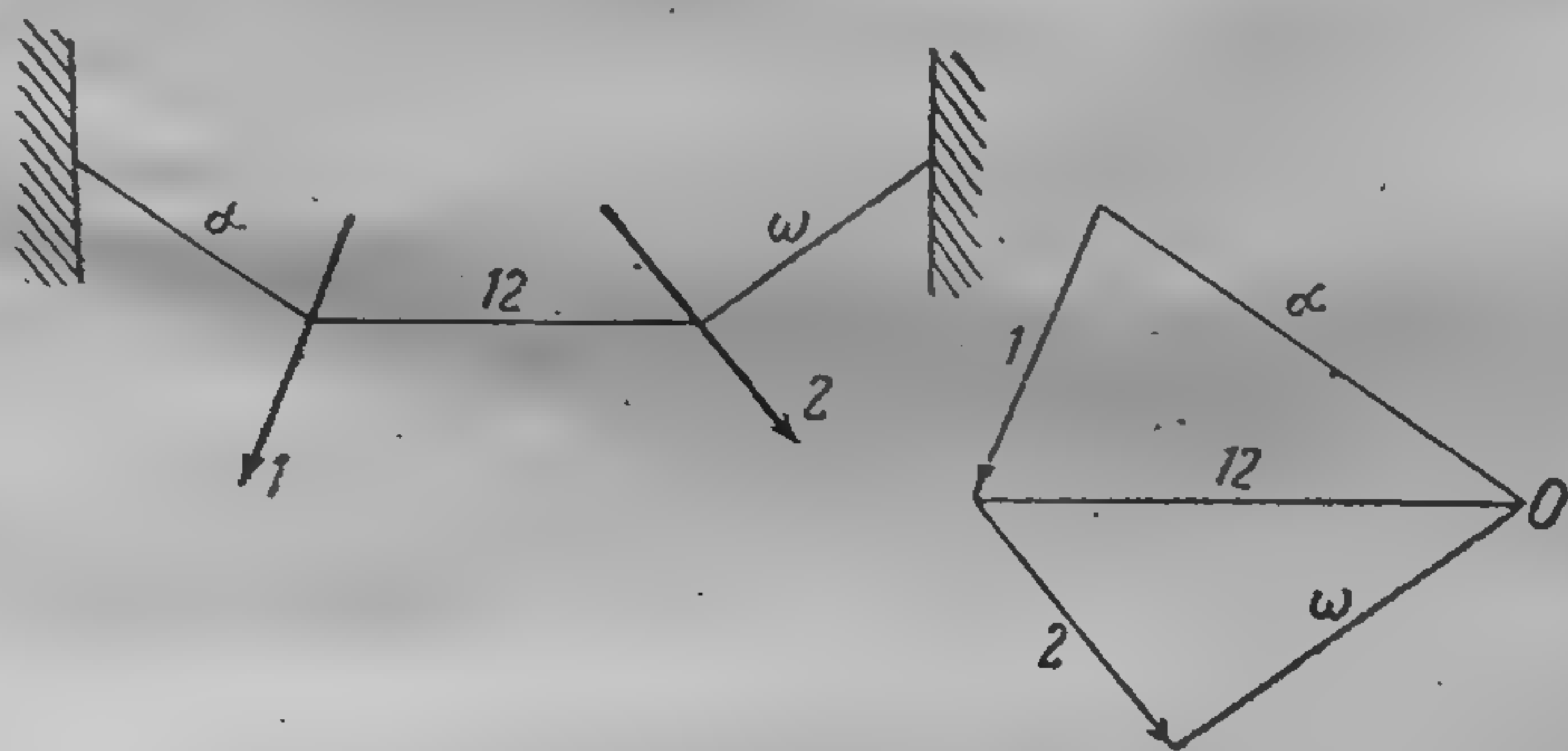


Fig. 112

că laturile poligonului funicular sînt bare articulate, atunci un astfel de poligon articulat, sub acțiunea forțelor date 1 și 2 aplicate în articulațiile sale, va fi în echilibru. În adevăr, forțele 1 și 2 pot fi înlocuite prin eforturile  $\alpha$ , 12,  $\omega$ , care acționează de-a lungul barelor. Neglijînd micile variații de lungime ale barelor sub acțiunea acestor forțe, vedem că forțele din barele extreme sînt echilibrate de reacțiunea barelor în cele două puncte de fixare. Pentru cazul arătat în fig. 112, toate barele sînt întinse, după cum ne putem convinge ușor examinînd direcțiile forțelor  $\alpha$ , 12 și  $\omega$ . De aceea, în acest caz barele se pot înlocui prin lanțuri sau frînghii, ceea ce desigur nu se poate face dacă barele sînt comprimate. Din cele de mai sus se înțelege de ce acest poligon se numește *poligon articulat sau poligon funicular*.



Să mai examinăm și cazul poligonului articulată, reprezentat în fig. 113. În nodurile lui sunt aplicate forțe egale și paralele  $p$ .

Din poligonul forțelor găsim:

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{2p}{h}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{p}{h};$$

unde  $h$  este distanța polară sau

$$\operatorname{tg} \beta_2 = 2 \operatorname{tg} \beta_1, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{2}.$$

În general, pentru orice număr de bare vom avea:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{3} = \dots = \frac{\operatorname{tg} \beta_n}{n}.$$

În ceea ce privește eforturile în bare, care pentru simetria notării le vom nota  $T, T_1, T_2, \dots$ , din triunghiurile corespunzătoare ale poligonului forțelor vom avea:

$$T = T_1 \cos \beta_1 = T_2 \cos \beta_2 = \dots = T_n \cos \beta_n.$$

Vedem că aici barele sunt de asemenea întinse, tensiunile din bare crescând la trecerea și la bara mijlocie către cele marginale. O asemenea construcție se face la calculul podurilor suspendate.

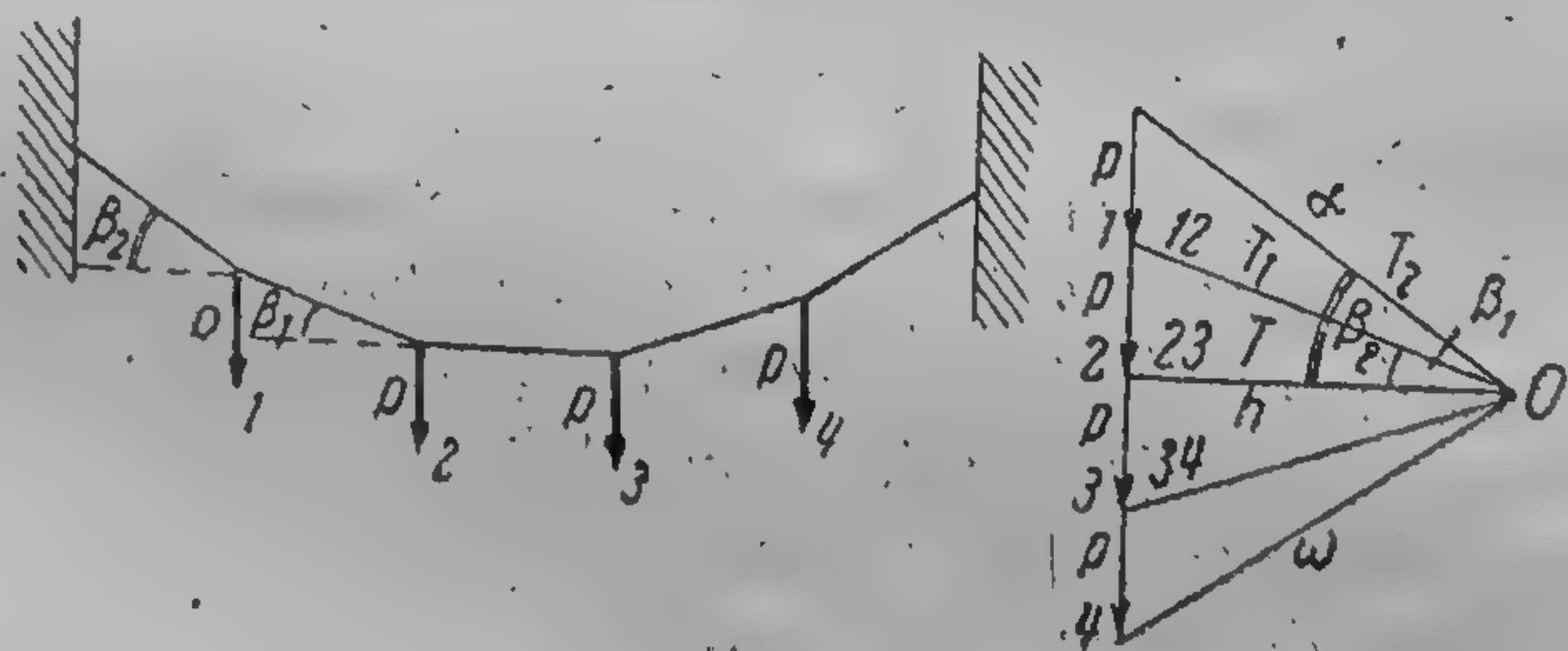


Fig. 113

Fie dat un sistem oarecare de forțe în plan, de exemplu, trei forțe 1, 2, 3 (fig. 114). Construim poligonul forțelor și poligonul funicular pentru un pol oarecare  $O$  luat arbitrar. Apoi,



luăm polul în alt punct oarecare  $O'$  și construim poligonul funicular pentru acest nou pol. Vom demonstra următoarea teoremă:

*Laturile a două poligoane funiculare construite pentru același sistem de forțe, în două poziții diferite ale polului, se intersectează respectiv pe o dreaptă paralelă cu dreapta ce unește polii.*

Să examinăm două poligoane funiculare  $(\alpha, 12, 23, \omega)$  și  $(\alpha', 12', 23', \omega')$ . Prelungim laturile  $\alpha$  și  $\alpha'$  pînă la intersecția lor în punctul  $A$ , laturile  $12$  și  $12'$  pînă la intersecția lor în punctul  $L$  și unim printr-o dreaptă punctele  $A$  și  $L$ . Vom obține un patrulater  $ABB'L$  cu două diagonale. În poligonul forțelor îi

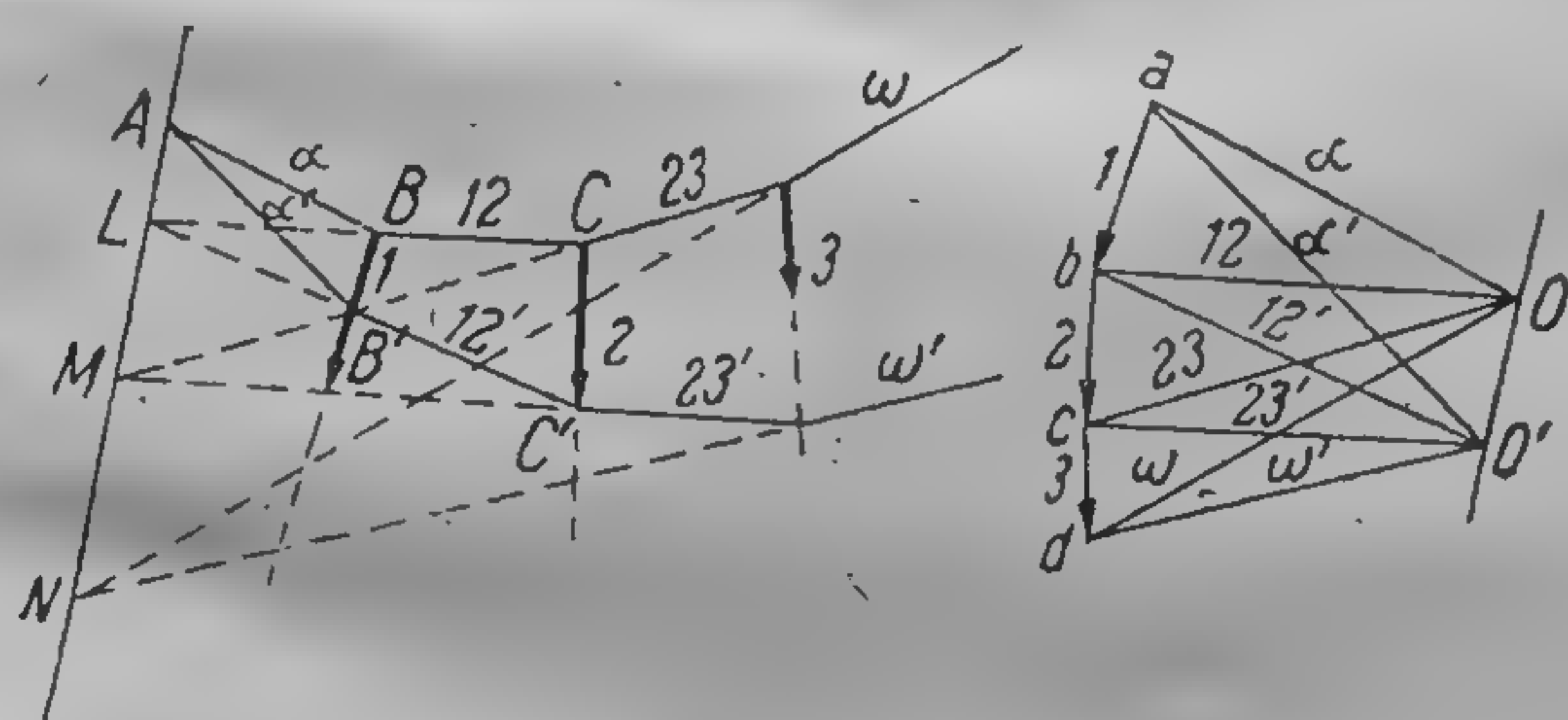


Fig. 114

va corespunde patrulaterul  $aOO'b$ . În general, și laturile și diagonalele le vom numi laturi. Vedem că cinci laturi ale primului patrulater sînt respectiv paralele cu cinci laturi ale celui de-al doilea patrulater; rămîne de demonstrat că și ultimele laturi ale ambelor figuri și anume  $AL$  și  $OO'$  vor fi paralele între ele. Observăm că patrulaterele  $ABB'L$  și  $aOO'b$  nu sînt asemenea: ele sînt însă figuri reciproce, deoarece unui triunghi al unei figuri îi corespund trei laturi curențe din cealaltă figură și invers. Paralelismul laturilor  $AL$  și  $OO'$  poate fi dovedit fie geometric, fie pe considerente mecanice; vom alege ultima metodă. Forța  $1$ , dirijată de-a lungul lui  $BB'$ , poate fi descompusă în două forțe  $\alpha$  și  $12$ , reprezentate în poligonul forțelor prin vectorii  $\overline{dO}$  și  $\overline{Ob}$ . De-a lungul suportului forței  $1$  vom introduce o forță nouă egală ca modul și direcție cu forța  $1$ , dar de sens contrar, adică de la  $B$  spre  $B'$ ; această nouă forță  $1$  se poate descompune în două forțe:  $12'$  și  $\alpha'$ , reprezentate în poligonul forțelor prin vectorii  $\overline{bO'}$  și  $\overline{O'a}$ . Aceste patru forțe obținute  $\alpha$ ,  $12$ ,  $\alpha'$  și  $12'$ , se echilibrează deoarece ele sînt echivalente cu cele două forțe  $1$ , care acționează în sens opus  $BB'$  și  $B'B$ . Aceste patru forțe se pot



grupa două câte două altfel. Să considerăm forțele  $\alpha'$ ,  $\alpha$  și forțele  $12'$ ,  $12$ . Din poligonul forțelor rezultă că forțele  $\alpha'$  și  $\alpha$  au o rezultantă egală cu vectorul  $\overline{O'O}$  și forțele  $12'$  și  $12$  au o rezultantă egală cu vectorul  $\overline{OO'}$ . Din poligonul funicular vedem că rezultanta forțelor  $\alpha'$  și  $\alpha$  trebuie să treacă prin punctul lor de concurență  $A$ , iar rezultanta forțelor  $12'$  și  $12$  trebuie să treacă prin punctul lor de concurență  $L$ . Deoarece rezultantele sînt egale respectiv cu vectorii  $\overline{O'O}$  și  $\overline{OO'}$ , rezultă că prin punctele  $A$  și  $L$  trec două forțe egale ca mărime, paralele și de sens opus. Aceste forțe pot forma fie un cuplu, fie se echilibrează; în ultimul caz ele trebuie să fie situate de-a lungul dreptei  $AL$  și prin urmare dreapta

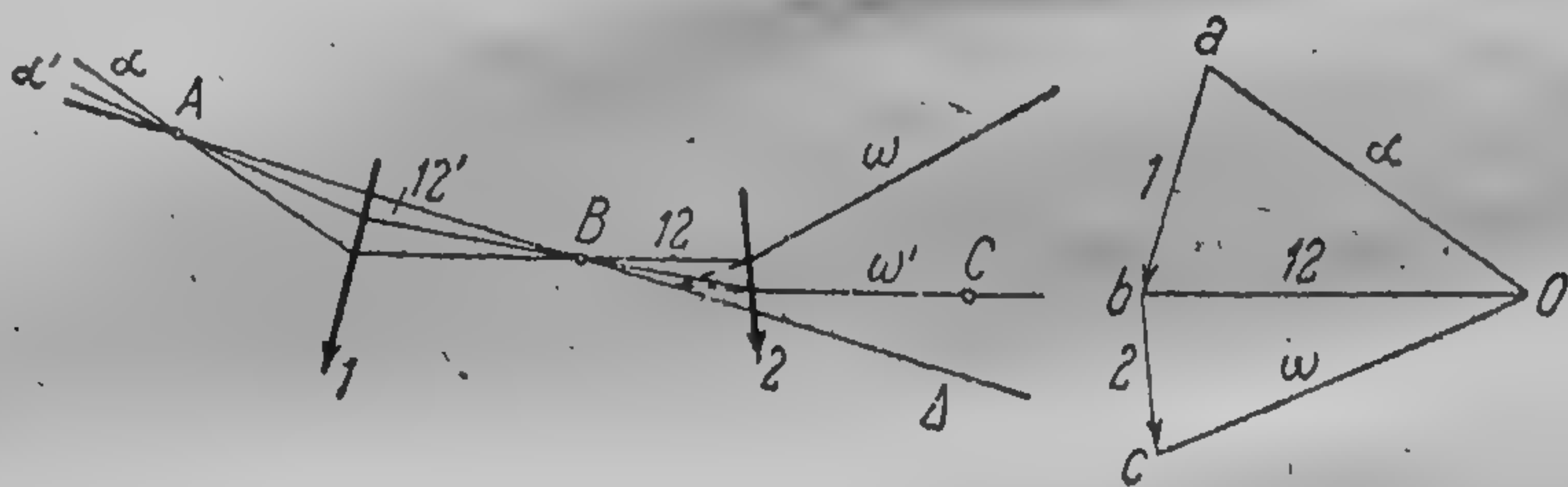


Fig. 115

$AL$  trebuie să fie paralelă cu dreapta  $OO'$ . Aici are loc ultimul caz, deoarece sistemul de forțe considerat este în echilibru. Presupunând că în lungul lui  $CC'$  și  $C'C$  acționează forțe egale în modul cu forța 2, ne vom convinge în același mod că dreapta  $LM$  este paralelă cu dreapta  $OO'$  etc. Prin urmare, dreapta  $ALMN$  este o dreaptă paralelă cu dreapta  $OO'$  și teorema este demonstrată.

Să aplicăm această teoremă la următoarea problemă: Se dau două forțe 1 și 2; să se construiască pentru ele poligonul funicular, care trece prin trei puncte date  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , (fig. 115). Vom duce arbitrar prin punctul  $A$  latura  $\alpha$  a poligonului funicular pînă la intersecția ei cu forța 1; ducem mai departe prin acest punct și prin punctul  $B$  latura 12. Aceste două laturi vor determina direcțiile razelor  $\alpha$  și 12 din poligonul forțelor și totodată polul  $O$ . Unind punctul  $c$  cu punctul  $O$  vom obține raza  $\omega$ ; ducînd latura  $\omega$  în poligonul funicular, vom găsi în general că ea nu va trece prin al treilea punct dat  $C$ . Prin urmare, poligonul funicular  $(\alpha, 12, \omega)$  nu este soluția problemei și este necesar să se caute alt poligon  $(\alpha', 12', \omega')$ , care ne va da soluția problemei și care corespunde unei alte poziții a polului. Deoarece latura  $\alpha'$



trebuie să treacă prin punctul  $A$ , iar latura  $12'$  prin punctul  $B$ , atunci dreapta  $\Delta$ , care trece prin aceste puncte  $A$  și  $B$ , este dreapta pe care sînt așezate punctele de intersecție ale laturilor respective ale poligoanelor funiculare  $(\alpha, 12, \omega)$  și  $(\alpha', 12', \omega')$ . Prin urmare, laturile  $\omega$  și  $\omega'$  trebuie să se întretaie tot pe această dreaptă. Să prelungim latura  $\omega$  pînă la intersecția ei cu dreapta  $\Delta$ ; ducînd prin punctul obținut și prin cel de-al treilea punct  $C$  o dreaptă, tragem concluzia că această dreaptă este latura  $\omega'$  a poligonului funicular căutat. Ducînd o dreaptă prin punctul de intersecție al laturii  $\omega$  cu forța 2 și prin punctul  $B$ , vom obține latura  $12'$  și, în sfîrșit, ducînd o dreaptă prin punctul de intersecție a laturii  $12'$  cu forța 1 și prin punctul  $A$ , vom obține latura  $\alpha'$  a poligonului funicular căutat, care reprezintă soluția problemei propuse.

§ 55. Reprezentarea grafică a momentelor. Să trecem acum la reprezentarea grafică a momentelor forțelor. Fie, date, de

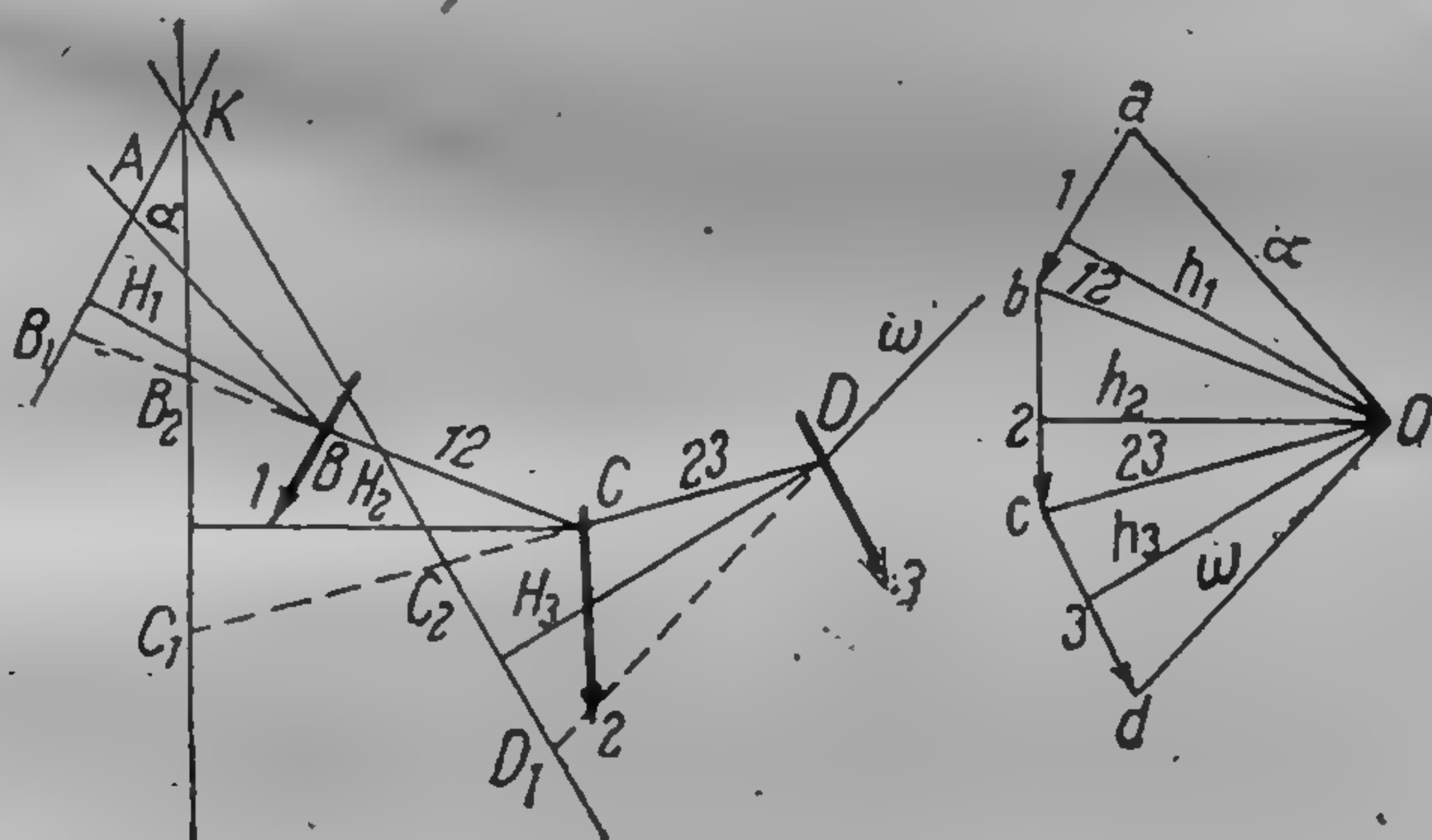


Fig. 116

exemplu, trei forțe 1, 2, 3. Să se găsească momentele lor în raport cu un punct oarecare  $K$  (fig. 115). Vom duce prin punctul  $K$  drepte paralele cu forțele. Distanțele  $H_1, H_2, H_3$  dintre aceste drepte și forțele 1, 2, 3 reprezintă brațele, și, înmulțind aceste brațe respectiv cu forțele 1, 2, 3 vom obține momentele acestor forțe. Construim poligonul forțelor și poligonul funicular pentru un pol oarecare  $O$ . Prelungim laturile poligonului funicular care se întretaie cu o forță oarecare (de ex. 1), pînă la intersecția lor cu dreapta  $(KB_1)$  care trece prin punctul  $K$  și este paralelă cu această forță. Vom obține triunghiurile  $ABB_1, B_2CC_1$ ,



$C_2DD_1$  cu înălțimile  $H_1, H_2, H_3$ . În poligonul forțelor le vor corespunde triunghiurile asemenea cu laturi paralele  $aOb, bOc, cOd$  cu înălțimile  $h_1, h_2, h_3$ . Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă:

$$\frac{AB_1}{ab} = \frac{H_1}{h_1}, \quad \frac{B_2C_1}{bc} = \frac{H_2}{h_2}, \quad \frac{C_2D_1}{cd} = \frac{H_3}{h_3},$$

sau

$$ab \cdot H_1 = \text{mom}_K(1) = AB_1 \cdot h_1,$$

$$bc \cdot H_2 = \text{mom}_K(2) = B_2C_1 \cdot h_2,$$

$$cd \cdot H_3 = \text{mom}_K(3) = C_2D_1 \cdot h_3.$$

Vedem că prin construcția de mai sus am transformat brațele  $H_1, H_2, H_3$ , în  $h_1, h_2, h_3$ , schimbînd respectiv segmentele 1, 2, 3 care reprezintă forțele în segmentele  $AB_1, B_2C_1$  și  $C_2D_1$ .

În cazul unei poziții arbitrare a forțelor, o astfel de transformare nu aduce nici un fel de avantaj substanțial; dar nu același

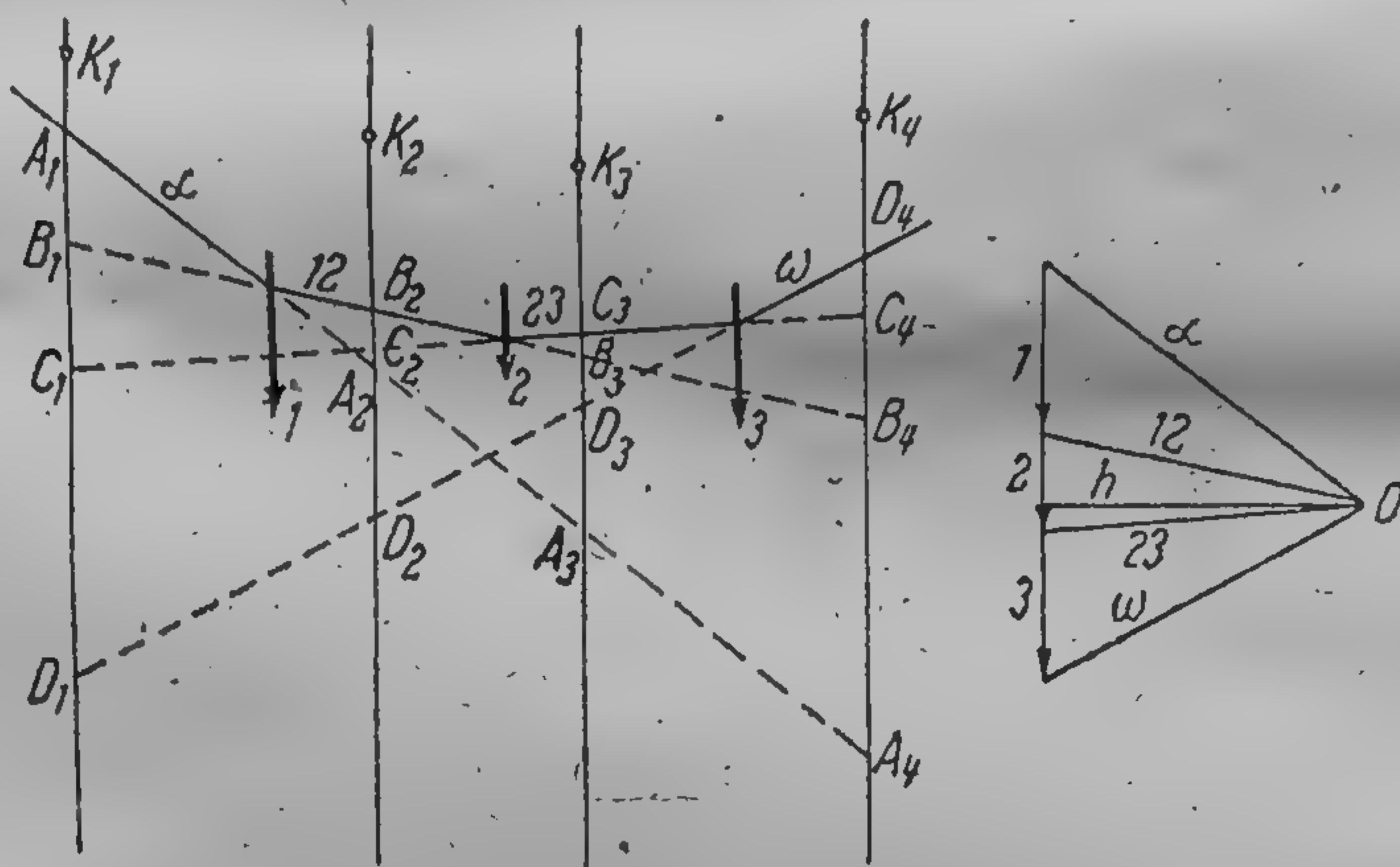


Fig. 117

lucru se va întîmpla dacă forțele date sînt paralele. Atunci toate dreptele care trec prin punctul  $K$  se vor suprapune și toate brațele  $h_1, h_2, h_3$  vor fi egale între ele.

Să considerăm un sistem oarecare de forțe paralele, de exemplu, trei forțe 1, 2, 3, (fig. 117). Alegem o distanță polară oarecare și construim poligonul forțelor care în acest caz se reduce la o dreaptă cu polul  $O$ , situat la distanța  $h$  față de dreaptă.



Construim apoi poligonul funicular. Vom găsi momentul fiecărei forțe în raport cu punctul  $K_1$ . Conform celor precedente vom avea:

$$\text{Mom}_{K_1}(1) = A_1B_1 \cdot h,$$

$$\text{Mom}_{K_1}(2) = B_1C_1 \cdot h,$$

$$\text{Mom}_{K_1}(3) = C_1D_1 \cdot h.$$

Deoarece la toate momentele brațul  $h$  este comun, momentele vor fi proporționale cu segmentele  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  și  $C_1D_1$ , care pot fi considerate ca reprezentarea grafică a momentelor. Momentele tuturor forțelor în raport cu punctul  $K_1$  sînt negative și vedem că vom obține momentul rezultat al sistemului de forțe direct pe desen. Astfel, momentul rezultat al sistemului de forțe 1 și 2 se va reprezenta prin segmentul  $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$ ; momentul rezultat al sistemului de forțe (1, 2, 3) se va reprezenta prin segmentul  $A_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1$ .

Dacă drept origine a segmentului care reprezintă momentul vom lua punctul de intersecție al dreptei  $K_1A_1$  cu raza precedentă, iar ca extremitate punctul de intersecție cu raza următoare, vom trage concluzia că momentele negative se vor reprezenta pe desen ca segmente dirijate de sus în jos.

Să găsim acum momentele forțelor în raport cu punctul  $K_2$ . Momentul forței 1 va fi pozitiv și se va reprezenta prin segmentul  $\overline{A_2B_2}$  dirijat de jos în sus; momentul forțelor 2 și 3 vor fi negative și se vor reprezenta prin segmentele  $\overline{B_2C_2}$  și  $\overline{C_2D_2}$ . Momentul rezultat al sistemului celor trei forțe se va reprezenta prin segmentul  $\overline{A_2D_2}$ , dirijat în jos și, prin urmare, va fi negativ.

Să găsim, mai departe, momentul forțelor în raport cu punctul  $K_3$ . Momentele forțelor 1 și 2 vor fi pozitive și se vor reprezenta prin segmentele  $\overline{A_3B_3}$  și  $\overline{B_3C_3}$ ; momentul forței 3 va fi negativ și se va reprezenta prin segmentul  $\overline{C_3D_3}$ ; momentul rezultat al sistemului se va reprezenta prin segmentul  $\overline{A_3D_3}$  și va fi pozitiv. În sfîrșit, pentru punctul  $K_4$  toate momentele vor fi pozitive și momentul rezultat se va reprezenta prin segmentul  $\overline{A_4D_4}$ . Vedem că prin mutarea punctului  $K$  de la stînga spre dreapta, momentul rezultat care inițial este negativ scade în valoare absolută, apoi devine pozitiv și crește. Variația momentului fiind continuă, trebuie să existe o poziție a punctului  $K$  pentru care momentul să fie egal cu zero. Nu este greu de înțeles că în acest



caz punctul  $K$  se află pe suportul rezultantei. Într-adevăr, din teorema lui Varignon știm că momentul resultant al sistemului de forțe paralele este egal cu momentul rezultantei; ultimul însă, evident, va fi egal cu zero, dacă rezultanta va trece prin punctul în raport cu care se determină momentul.

Este necesar totuși, de reținut, că la calcularea momentului trebuie să se înmulțească lungimea segmentului care reprezintă momentul, cu brațul  $h$ . Geometric, aceasta este echivalent cu calculul ariei dreptunghiului care are o latură egală cu  $h$  și cea-

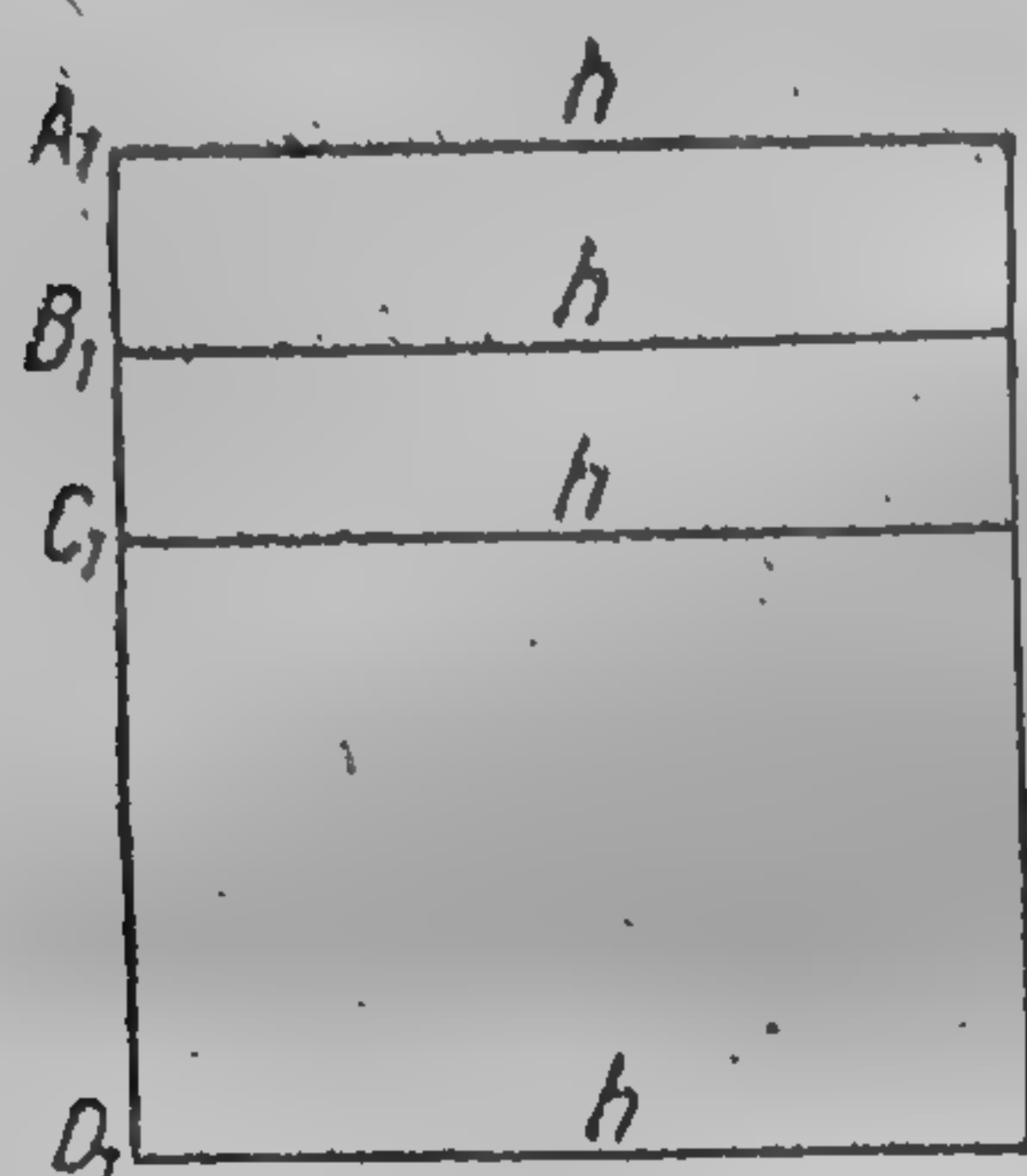


Fig. 118

laltă cu lungimea segmentului ce reprezintă momentul. Este evident că numai datorită egalității laturilor  $h$ , scăderea și adunarea momentelor se reduce la scăderea și adunarea segmentelor care reprezintă momentele, după cum se vede în fig. 118, care reprezintă sub formă de arii momentele forțelor 1, 2, 3, în raport cu punctul  $K_1$ . Este de asemenea evident că, măsurând segmentele care reprezintă momentele, adică segmentele

$\overline{A_1B_1}$ ,  $\overline{B_1C_1}$ , ..., la scara forțelor, trebuie să măsurăm brațul  $h$  la scara lungimilor; se poate pune și condiția inversă, adică să se măsoare brațul  $h$  la scara forțelor, iar segmentele  $\overline{A_1B_1}$ ,  $\overline{B_1C_1}$ , ... — la scara lungimilor.

Metoda expusă de reprezentarea grafică a momentelor poate fi aplicată pentru calculul grafic al sumelor de la numărătorii formulelor (6.12), pentru cazul figurilor plane. Fie dată figura plană, a cărei arie este egală cu  $\sigma$ , și o axă oarecare  $\Delta$ , situată în planul acestei figuri plane. Să examinăm expresia

$$\lim \sum H \Delta \sigma,$$

unde  $\Delta \sigma$  este elementul de suprafață al figurii plane considerate;  $H$  — distanța de la centrul de greutate al acestui element pînă la axa  $\Delta$ . Această mărime se numește *momentul static al suprafeței figurii plane date în raport cu o axă dată*. Este evident că dacă axa  $\Delta$  coincide cu axa  $Oy$  sau  $Ox$ , vom obține:

$$\lim \sum x \Delta \sigma, \quad \lim \sum y \Delta \sigma,$$



adică vom ajunge la sumele din formulele (5.12). Împărțim figura plană considerată, prin drepte paralele cu axa  $\Delta$ , în suprafețe ce pot fi asimilate cu trapeze atunci când distanțele dintre dreptele de secționare sînt mici; cele două suprafețe de la capete pot fi asimilate cu triunghiuri (fig. 119). Conform indicațiilor § 29, putem găsi poziția centrelor de greutate ale fîșiilor în care

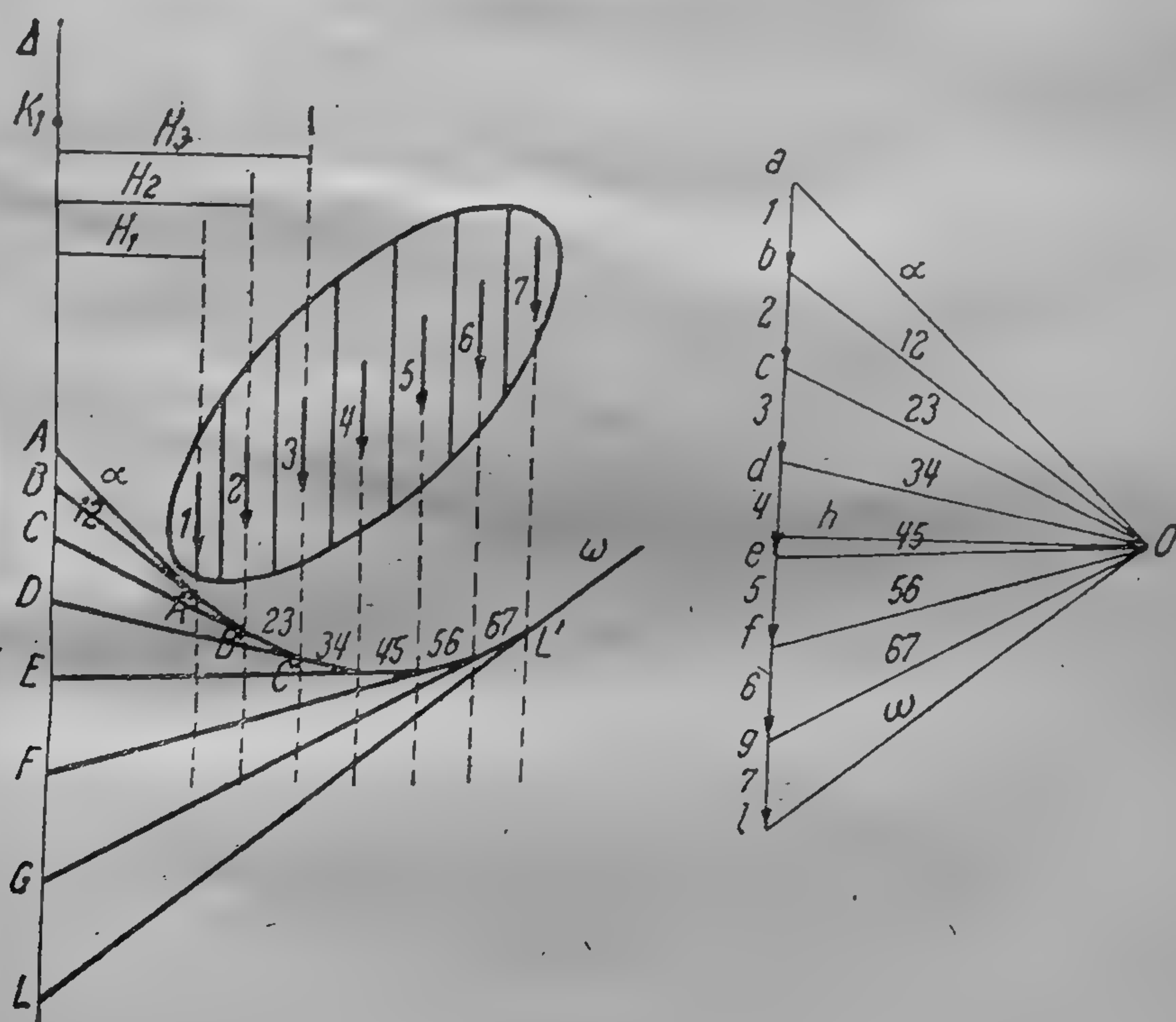


Fig. 119

s-a împărțit figura plană, și fie cu ajutorul proprietăților cunoscute din geometria elementară, fie direct pe desen, cu ajutorul unui planimetru, putem determina ariile  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3, \dots$  ale acestor fîșii. Să reprezentăm aceste suprafețe  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3, \dots$  prin vectorii  $1, 2, 3, \dots$ , aplicați în centrele de greutate ale acestor suprafețe și paraleli cu axa  $\Delta$ , modulii acestor vectori fiind proporționali cu ariile  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3, \dots$  iar factorul de



proportionalitate fiind  $a$ . Astfel, vom reduce calculul sumei  $H_1 \Delta \sigma_1 + H_2 \Delta \sigma_2 + H_3 \Delta \sigma_3 + \dots$  la calculul sumei

$$H_1 \cdot a \cdot 1 + H_2 \cdot a \cdot 2 + H_3 \cdot a \cdot 3 + \dots = \\ = a (H_1 \cdot 1 + H_2 \cdot 2 + H_3 \cdot 3 \dots),$$

adică de fapt la calculul momentului rezultat  $H_1 \cdot 1 + H_2 \cdot 2 + H_3 \cdot 3 + \dots$  al vectorilor 1, 2, 3 în raport cu un punct oarecare  $K_1$  situat pe axa  $\Delta$ . Această problemă a fost rezolvată grafic;

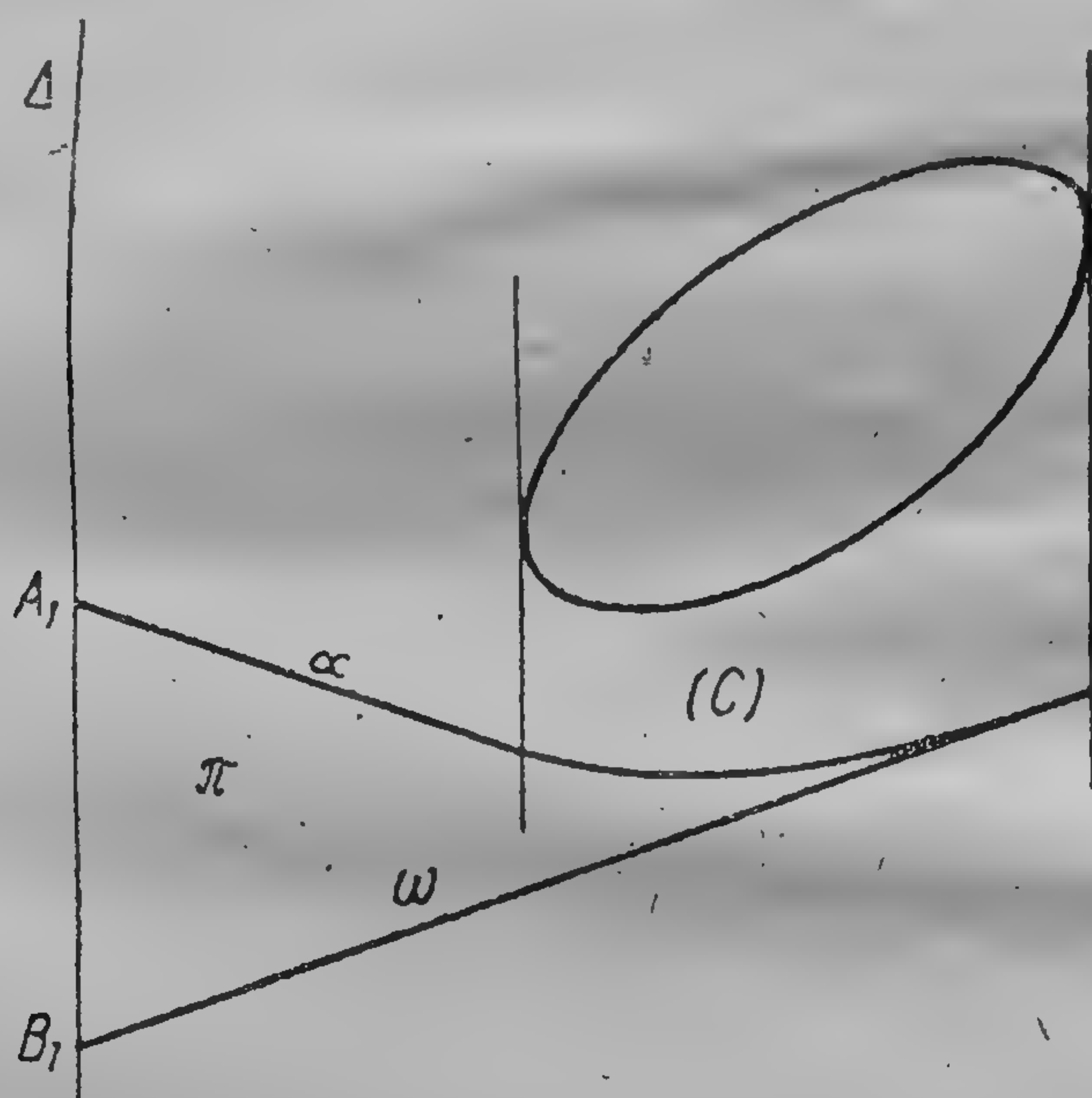


Fig. 120

am văzut că luând arbitrar distanța polară  $h$ , construind poligonul funicular și prelungind laturile lui pînă la intersecția lor cu axa  $\Delta$ , vom obține:

$$H_1 \cdot \Delta \sigma_1 = H_1 \cdot a \cdot 1 = AB \cdot ha,$$

$$H_2 \cdot \Delta \sigma_2 = H_2 \cdot a \cdot 2 = BC \cdot ha,$$

$$H_3 \cdot \Delta \sigma_3 = H_3 \cdot a \cdot 3 = CD \cdot ha,$$

astfel vom găsi:

$$\sum H \Delta \sigma = AL \cdot ha,$$

unde  $AL$  este segmentul axei  $\Delta$  cuprins între laturile  $\alpha$  și  $\omega$  ale poligonului funicular, după cum se vede din fig. 119. Dacă nu-



mărul dreptelor de diviziune al figurii plane va crește la infinit, atunci poligonul funicular va tinde către o curbă ( $C$ ), iar direcțiile laturilor sale  $\alpha$  și  $\omega$  către tangentele în capetele curbei ( $C$ ), după cum se arată în fig. 120. Aceste tangente vor tăia pe axa  $\Delta$ , segmentul  $A_1B_1$  iar limita căutată a sumei va fi:

$$\lim \sum H \Delta \sigma = \iint H d\sigma = A_1B_1 \cdot ha.$$

Am văzut că mărimile  $h$  și  $a$  se pot lua arbitrar, dar sigur că lungimea segmentului  $A_1B_1$  depinde de ele. Vom lua mărimile  $h$  și  $a$  astfel ca să avem  $ha = \sigma$ ; în acest caz vom avea:

$$\lim_{\sigma} \frac{\sum H \Delta \sigma}{\sigma} = \frac{\iint H d\sigma}{\sigma} = A_1B_1.$$

§ 56. Determinarea grafică a momentului de inerție al unei figuri plane. Fie dată o figură plană a cărei suprafață este egală cu  $\sigma$ , și o axă oarecare  $\Delta$  situată în planul acestei figuri. Vom introduce următoarea definiție:

Se numește *moment de inerție al unei figuri plane în raport cu o axă situată în planul ei, limita sumei produselor elementelor de suprafață ale acestei figuri cu pătratele distanțelor de la centrele lor de greutate pînă la axa considerată.*

Prin urmare, introducînd pentru momentul de inerție în raport cu axa  $\Delta$  notația  $I_{\Delta}$ , avem:

$$I_{\Delta} = \lim \sum H^2 \Delta \sigma = \iint H^2 d\sigma,$$

unde  $d\sigma$  este elementul de suprafață, iar  $H$  — distanța de la centrul său de greutate pînă la axa  $\Delta$ . Dacă axa  $\Delta$  coincide cu axa  $Oy$  și cu axa  $Ox$ , atunci vom obține respectiv:

$$I_y = \lim \sum x^2 \Delta \sigma = \iint x^2 d\sigma, \quad I_x = \lim \sum y^2 \Delta \sigma = \iint y^2 d\sigma.$$

Adunînd ultimele două formule, vom avea:

$$I_x + I_y = \lim \sum (x^2 + y^2) \Delta \sigma = \lim \sum r^2 \Delta \sigma = \iint (x^2 + y^2) d\sigma = \iint r^2 d\sigma,$$

unde  $r^2 = x^2 + y^2$  este pătratul distanței de la centrul de greutate al elementului  $d\sigma$  pînă la originea coordonatelor. Ultima expresie se numește *momentul de inerție polar în raport cu originea coordonatelor*; îl vom nota prin  $I_0$ , așa că vom avea:

$$I_0 = \lim \sum r^2 \Delta \sigma = \iint r^2 d\sigma,$$



Momentele de inerție ale figurilor plane se întâlnesc în rezistența materialelor. Să examinăm suma

$$\sum H^2 \Delta \sigma = H_1^2 \Delta \sigma_1 + H_2^2 \Delta \sigma_2 + H_3^2 \Delta \sigma_3 + \dots;$$

ea poate fi reprezentată sub forma:

$$H_1 \cdot H_1 \Delta \sigma_1 + H_2 \cdot H_2 \Delta \sigma_2 + H_3 \cdot H_3 \Delta \sigma_3 + \dots,$$

dar la sfârșitul § 55 am văzut că

$$H_1 \Delta \sigma_1 = AB \cdot ha, \quad H_2 \Delta \sigma_2 = BC \cdot ha, \quad H_3 \Delta \sigma_3 = CD \cdot ha, \dots,$$

unde segmentele  $AB, BC, CD, \dots$  sînt reprezentate în fig. 119. În acest fel vom avea:

$$\sum H^2 \Delta \sigma = (H_1 \cdot AB + H_2 \cdot BC + H_3 \cdot CD + \dots) ha.$$

Din fig. 119 se vede că avem:

$$H_1 \cdot AB = 2 \text{ aria } \triangle ABA'$$

$$H_2 \cdot BC = 2 \text{ aria } \triangle BCB'$$

$$H_3 \cdot CD = 2 \text{ aria } \triangle CDC' \dots$$

Prin urmare vom obține:

$$\sum H^2 \Delta \sigma = 2ha (\text{aria } \triangle ABA' + \text{aria } \triangle BCB' + \text{aria } \triangle CDC' + \dots),$$

sau

$$\sum H^2 \Delta \sigma = 2ha \cdot \text{aria } AA'L'L,$$

unde aria  $AA'L'L$  este suprafața figurii mărginite de raza  $\alpha$  raza  $\omega$  și celelalte raze ale poligonului funicular și de segmentul  $AL$  al axei  $\Delta$ . Cînd numărul de elemente de divizare a figurii plane tinde către infinit (fig. 120) vom obține la limită

$$\lim \sum H^2 \Delta \sigma = \iint H^2 d\sigma = 2ha\pi,$$

unde  $\pi$  este aria figurii mărginite de curba  $(C)$  de tangentele  $\alpha$  și  $\omega$  în capetele acestei curbe și de segmentul axei  $\Delta$ , așa cum se reprezintă în fig. 120. Desigur, totdeauna se poate lua numărul elementelor în care este divizată suprafața dată, suficient de mare, încît aria  $AA'L'L$  să fie destul de apropiată de aria  $\pi$ .



## CAPITOLUL XIV

### APLICAȚII ALE METODELOR GRAFICE ÎN STATICĂ

§ 57. Centrul de greutate. Ne vom ocupa acum de aplicarea practică a construcțiilor grafice arătate mai înainte. Să examinăm mai întâi problema determinării grafice a centrului de greutate al figurilor plane.

Vom distinge două cazuri: când figura plană are axă de simetrie și când nu are axă de simetrie. Presupunem întâi că figura are axă de simetrie. Știm că centrul de greutate trebuie să

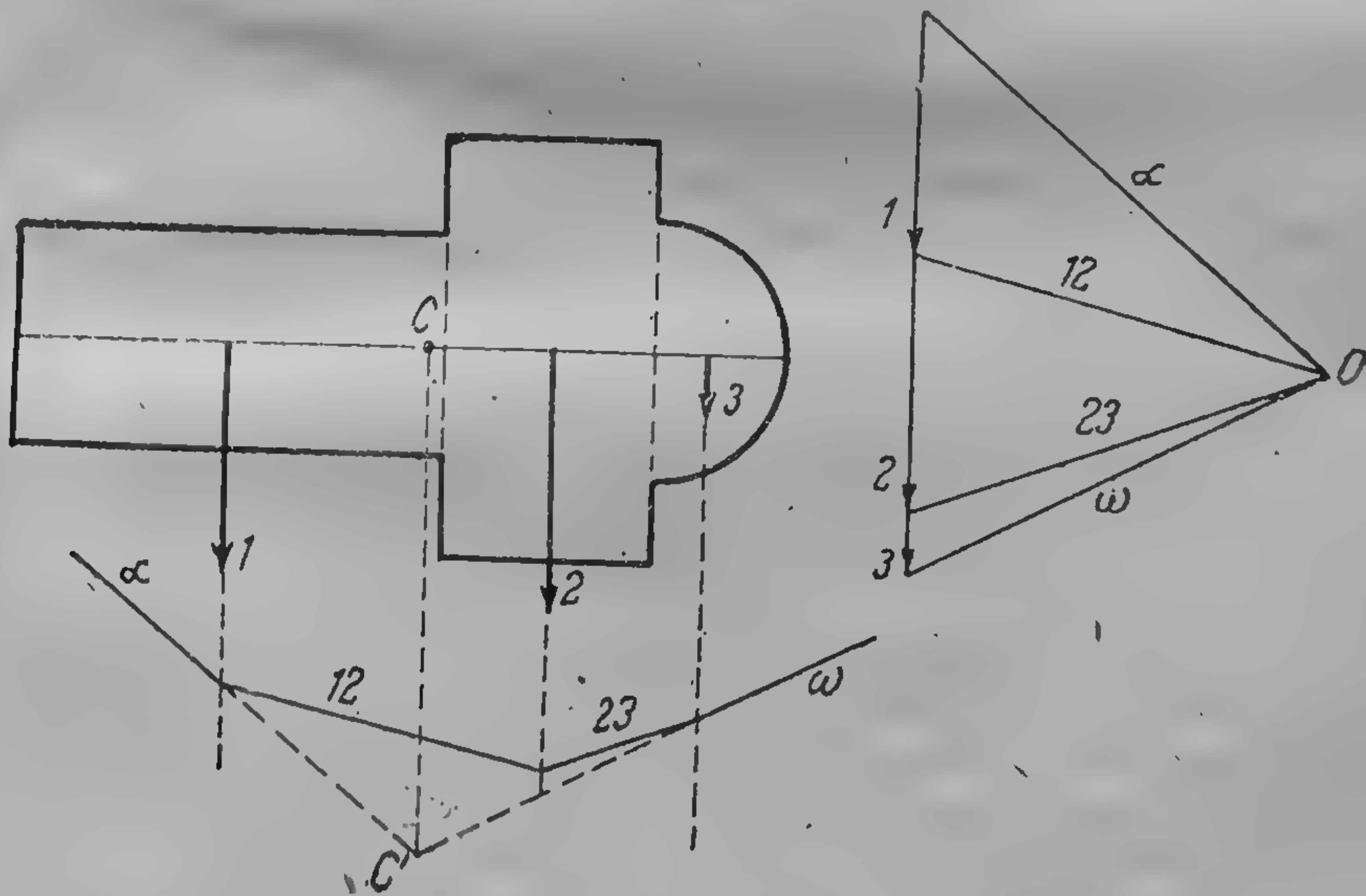


Fig. 121

fie situat pe această axă. Să admitem că putem diviza figura în figuri separate, ale căror centre de greutate și greutăți ne sînt cunoscute, așa cum, de exemplu, se întîmplă în cazul reprezentat în fig. 121. Dacă figura plană este omogenă, atunci greutățile



sînt proporționale cu ariile și este suficient să se măsoare aria fiecărei porțiuni, de exemplu, cu ajutorul planimetrului, pentru a se construi vectori proporționali cu greutatea. Pentru obținerea rezultantei sistemului de forțe, construim poligonul forțelor și poligonul funicular. Laturile extreme  $\alpha$  și  $\omega$  ale poligonului funicular se intersectează în punctul  $C'$ . Ducînd dreapta  $C'C$ , paralelă se intersectează în punctul  $C'$ . Ducînd dreapta  $C'C$ , para-

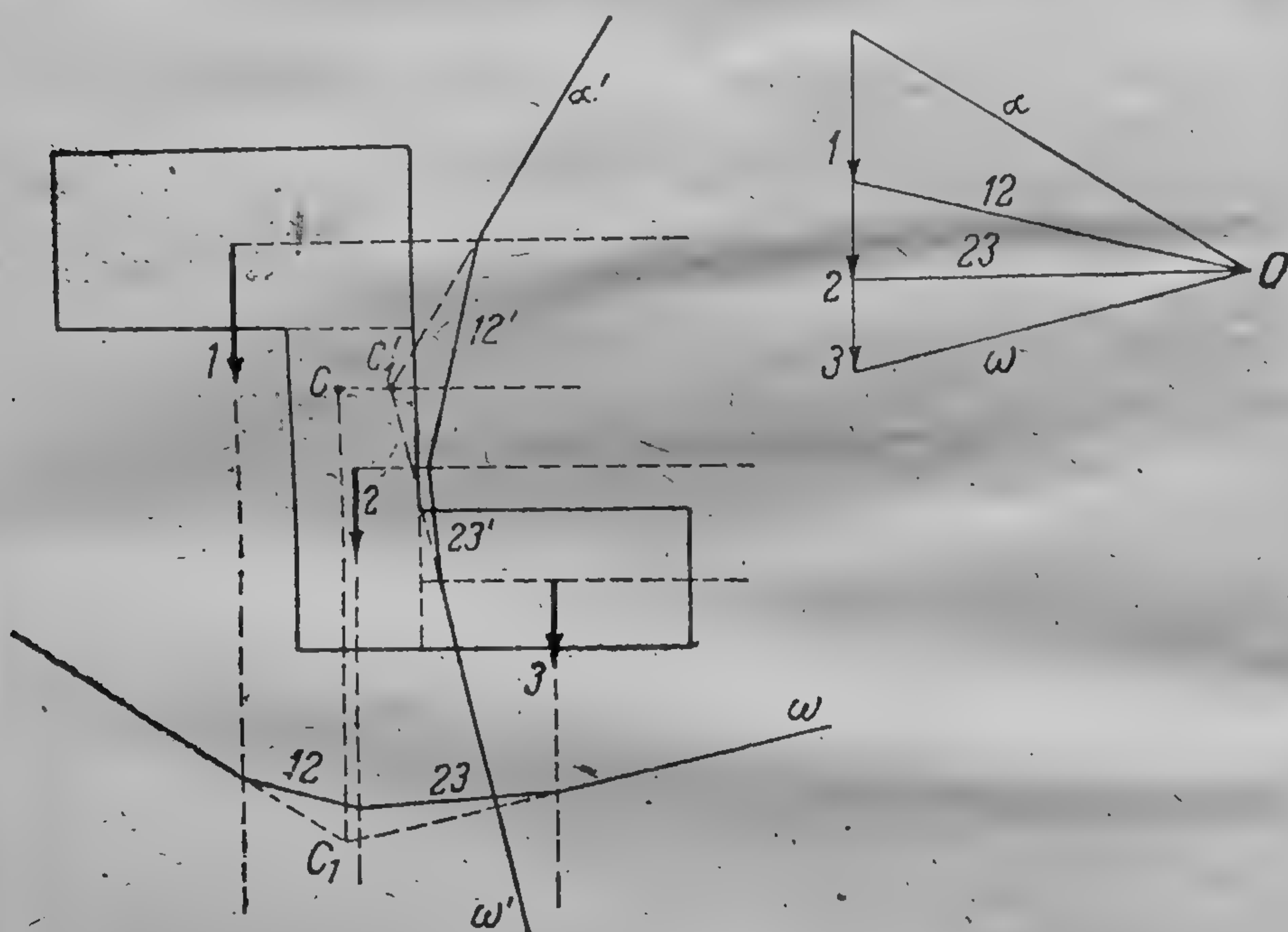


Fig. 122

lelă cu forțele, concludem că rezultanta trebuie să fie dirijată de-a lungul acestei drepte. Punctul  $C$ , punctul de intersecție al rezultantei cu axa de simetrie, este centrul de greutate.

Să trecem acum la cazurile cînd nu există axă de simetrie, așa cum este cazul din fig. 122. Împărțind figura considerată în trei dreptunghiuri, vom construi poligonul forțelor și poligonul funicular pentru sistemul de trei forțe obținut, 1, 2, 3. Laturile extreme  $\alpha$  și  $\omega$  ale poligonului funicular se intersectează în punctul  $C_1$ . Ducînd prin acest punct dreapta  $C_1C$  paralelă cu forțele, deducem că rezultanta trebuie să fie dirijată de-a lungul acestei drepte  $C_1C$  și centrul de greutate trebuie să se afle pe această dreaptă. Știm (cap. V) că centrul forțelor paralele nu se



schimbă dacă toate forțele se rotesc cu același unghi. Rotim forțele 1, 2, 3, de exemplu, cu un unghi drept și construim pentru această nouă poziție a forțelor poligonul funicular ( $\alpha'$ , 12', 23',  $\omega'$ ). Este evident că laturile noului poligon funicular vor fi respectiv perpendiculare pe laturile primului poligon funicular ( $\alpha$ , 12, 23,  $\omega$ ); de aceea construirea poligonului ( $\alpha'$ , 12', 23',  $\omega'$ ) se reduce la trasarea prin punctele date a unor drepte perpendiculare pe laturile  $\alpha$ , 12, 23,  $\omega$ . Ducând prin punctul de intersecție  $C'_1$  al laturilor extreme  $\alpha'$  și  $\omega'$  ale noului poligon funicular, dreapta  $C'_1C$ , perpendiculară pe dreapta  $C_1C$ , tragem concluzia că centrul de greutate trebuie să fie situat pe această dreaptă  $C'_1C$ ; prin urmare, centrul de greutate se găsește în punctul de intersecție al celor două drepte  $C_1C$  și  $C'_1C$ .

§ 58. Grinda pe două reazeme. Să presupunem că avem o grindă așezată pe două reazeme, iar asupra grinzii acționează

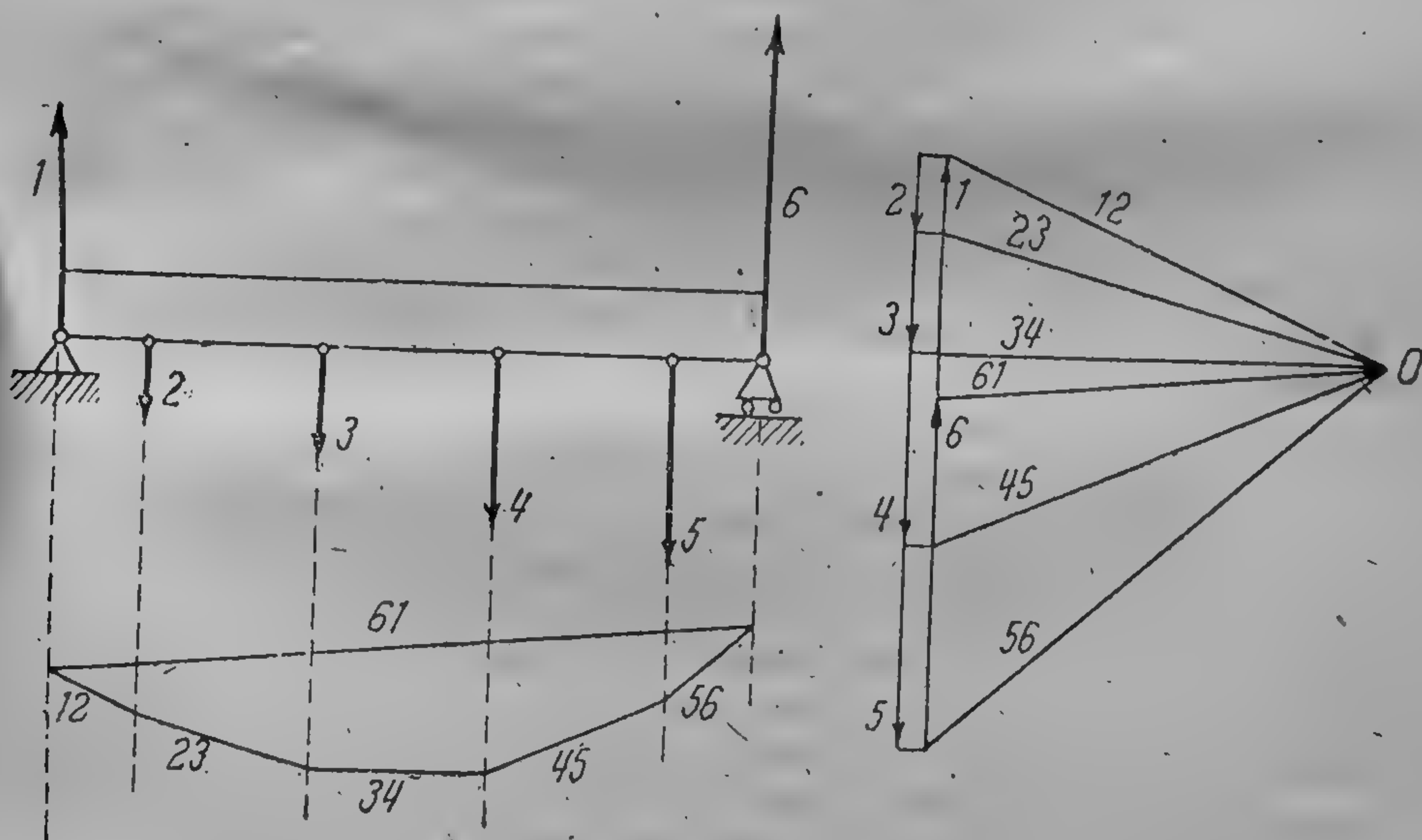


Fig. 123

forțele concentrate 2, 3, 4, 5. Vom neglija deocamdată greutatea proprie a grinzii (fig. 123). Să arătăm mai întâi cum se pot determina reacțiunile 1 și 6 ale reazemelor grinzii. Determinarea analitică a acestor reacțiuni nu prezintă nici un fel de dificultăți. Deoarece grinda este în echilibru sub acțiunea tuturor celor șase forțe, suma momentelor acestor forțe în raport cu orice punct



trebuie să fie egală cu zero. Luând suma momentelor în raport cu fiecare reazem, vom obține două ecuații, în fiecare din ele intervenind numai câte o singură reacțiune necunoscută, care se poate determina ușor. Această problemă se rezolvă ceva mai greu grafic. Deoarece toate cele șase forțe sînt în echilibru, poligonul forțelor și poligonul funicular trebuie să fie închise. Construim mai întîi poligonul forțelor 1, 2, 3, 4, 5, și 6. Forțele 2, 3, 4, și 5 se vor așeza pe dreaptă într-un singur sens; forțele 6 și 1 vor fi dirijate de-a lungul aceleiași drepte, dar în sens opus. Astfel, poligonul forțelor se reduce în acest caz la un segment de dreaptă de-a lungul căruia se găsesc forțele 2, 3, 4, 5, într-un sens și forțele 6 și 1 în sens opus. Vom duce razele 12, 23, 34, 45, 56 și cu ajutorul lor, poligonul funicular, care pentru ușurința desenului îl vom plasa sub grindă. Deoarece poligonul funicular trebuie să fie închis, direcția razei 61 din poligonul funicular este determinată. Ducînd apoi din polul  $O$  raza 61 în poligonul forțelor, vom determina forța 6 care se va situa între razele 56 și 61 și forța 1 care se va situa între razele 61 și 12. Astfel, problema determinării reacțiunilor 1 și 6 este rezolvată.

Prin aceeași construcție se determină și momentul încovoietor în orice secțiune a grinzii. *Moment încovoietor, într-o secțiune oarecare a grinzii, este momentul rezultat, în raport cu această secțiune, al forțelor așezate pe o singură parte a acestei secțiuni.* Deoarece grinda este în echilibru, momentul rezultat al tuturor forțelor care acționează asupra ei, în raport cu orice secțiune, este egal cu zero; de aceea, momentul rezultat al forțelor situate pe o singură parte a secțiunii, este egal ca mărime și opus ca sens momentului rezultat al forțelor așezate pe cealaltă parte a secțiunii. Să examinăm grinda asupra căreia acționează forțele concentrate 1, 2, 3 și reacțiunile 4, 5. Determinăm momentul forțelor așezate de exemplu, în stînga secțiunii  $A$  (fig. 124). Construim întîi poligonul forțelor alegînd un pol la o anumită distanță polară  $h$ , și apoi poligonul funicular. Folosind construcția arătată mai înainte, vom determina reacțiunile 4 și 5. Pentru determinarea momentului total al forțelor 5, 1, 2, 3, în raport cu secțiunea  $A$ , vom folosi reprezentarea grafică a momentului prin intermediul unor segmente. Ducem prin  $A$  dreapta  $\Delta$ , paralelă cu forțele. Momentul forței 5 este negativ și se reprezintă prin segmentul determinat pe  $\Delta$  de razele 45 și 51. Momentul forței 1 este pozitiv și se reprezintă prin segmentul determinat de  $\Delta$  de razele 51 și 12; prin urmare, momentul rezultat al forțelor 5 și 1 este reprezentat prin segmentul determinat pe  $\Delta$  de razele 45.



și 12. Continuând cu aceleași raționamente, este ușor să ne convingem că momentul resultant al forțelor 5, 1, 2, 3 va fi reprezentat prin segmentul  $ab$ , determinat pe  $\Delta$  de razele 45 și 34, adică de razele extreme ale sistemului format din cele patru forțe din stînga secțiunii. Momentul resultant al forțelor, situate pe dreapta secțiunii  $A$  va fi reprezentat prin același segment dar de semn opus. Astfel, *momentul încovoietor pentru o secțiune carecăr se reprezintă printr-un segment paralel cu forțele interceptate de razele poligonului funicular în dreptul secțiunii considerate*. Pentru a obține momentul, trebuie să nu uităm că efectuăm produsul dintre segmentul  $ab$  și distanța polară  $h$ ; unul dintre aceste segmente trebuie să fie măsurat la scara forțelor, iar

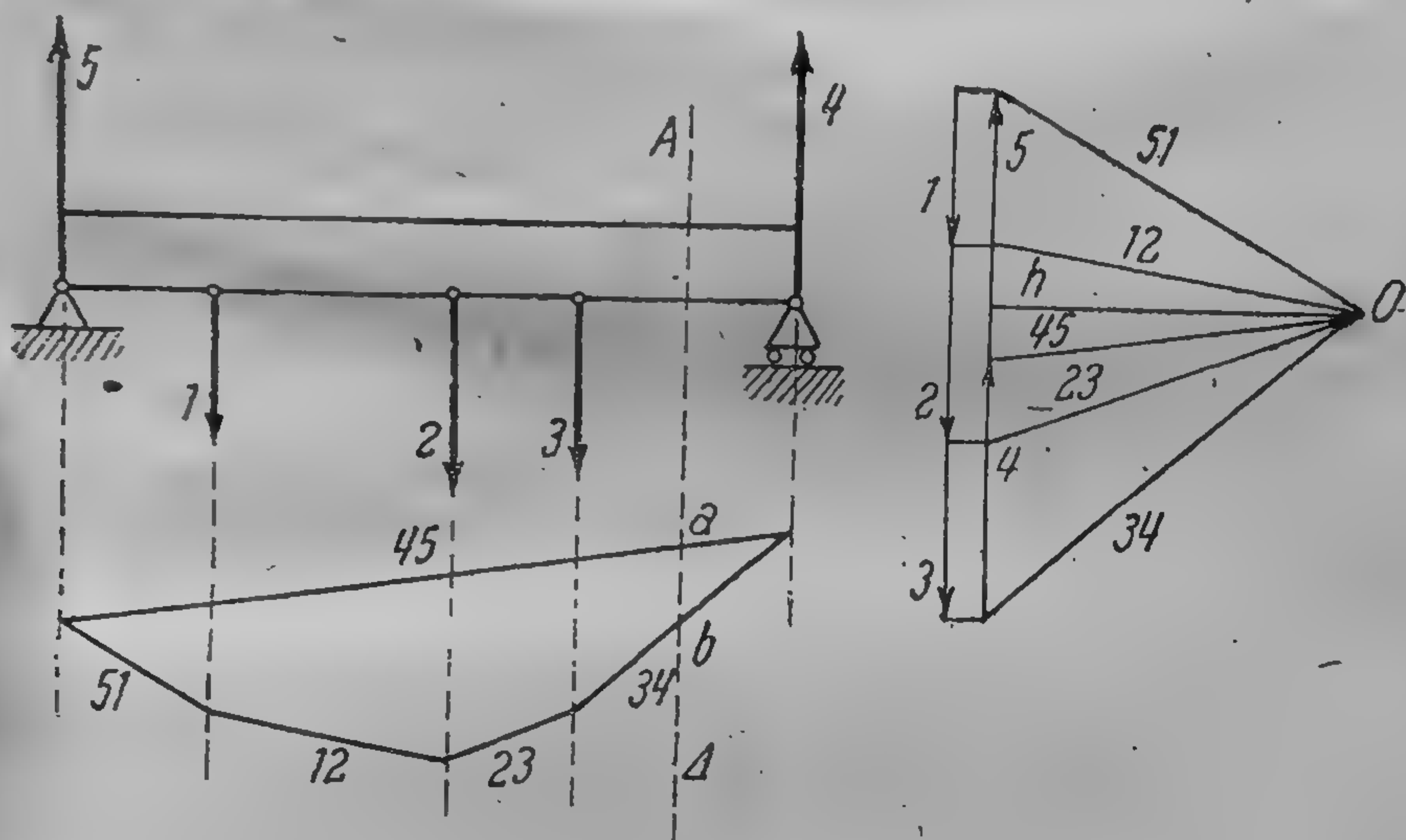


Fig. 124

celălalt la scara lungimilor. Dacă se consideră  $h=1$ , atunci segmentele  $ab$  ne dau chiar valoarea momentelor. De aceea, suprafața închisă în interiorul poligonului funicular se mai numește uneori și *suprafața momentelor*. Vedem că momentul încovoietor este egal cu zero în punctele de rezemare, variază liniar între forțe și poate atinge valoarea maximă numai în dreptul forțelor. De aceea secțiunea periculoasă, în care se produce momentul maxim, poate fi căutată numai în punctele de aplicație ale forțelor. Pentru a nu greși la determinarea semnului momentului, este suficient să urmărim variația lui pe grindă de la extremitate pînă la secțiunea considerată. În adevăr, să ne deplasăm



puțin la dreapta capătului stîng al grinzii. În partea stîngă va fi situată numai forța 5, al cărei moment este negativ și reprezentat prin segmentul interceptat de laturile poligonului funicular. La deplasarea ulterioară spre dreapta, acest segment nu se anulează nicăieri; prin urmare, ținînd seamă de variația sa continuă, momentul rămîne negativ și astfel pentru secțiunea  $A$ , momentul rezultat al forțelor aflate în stînga secțiunii este negativ. Reiese, pe baza observației anterioare, că momentul rezultat al forțelor așezate în dreapta punctului  $A$  este pozitiv.

Să cercetăm și cazul grinzii reprezentate în fig. 125, cînd momentul încovoietor la trecerea de la o secțiune la alta își

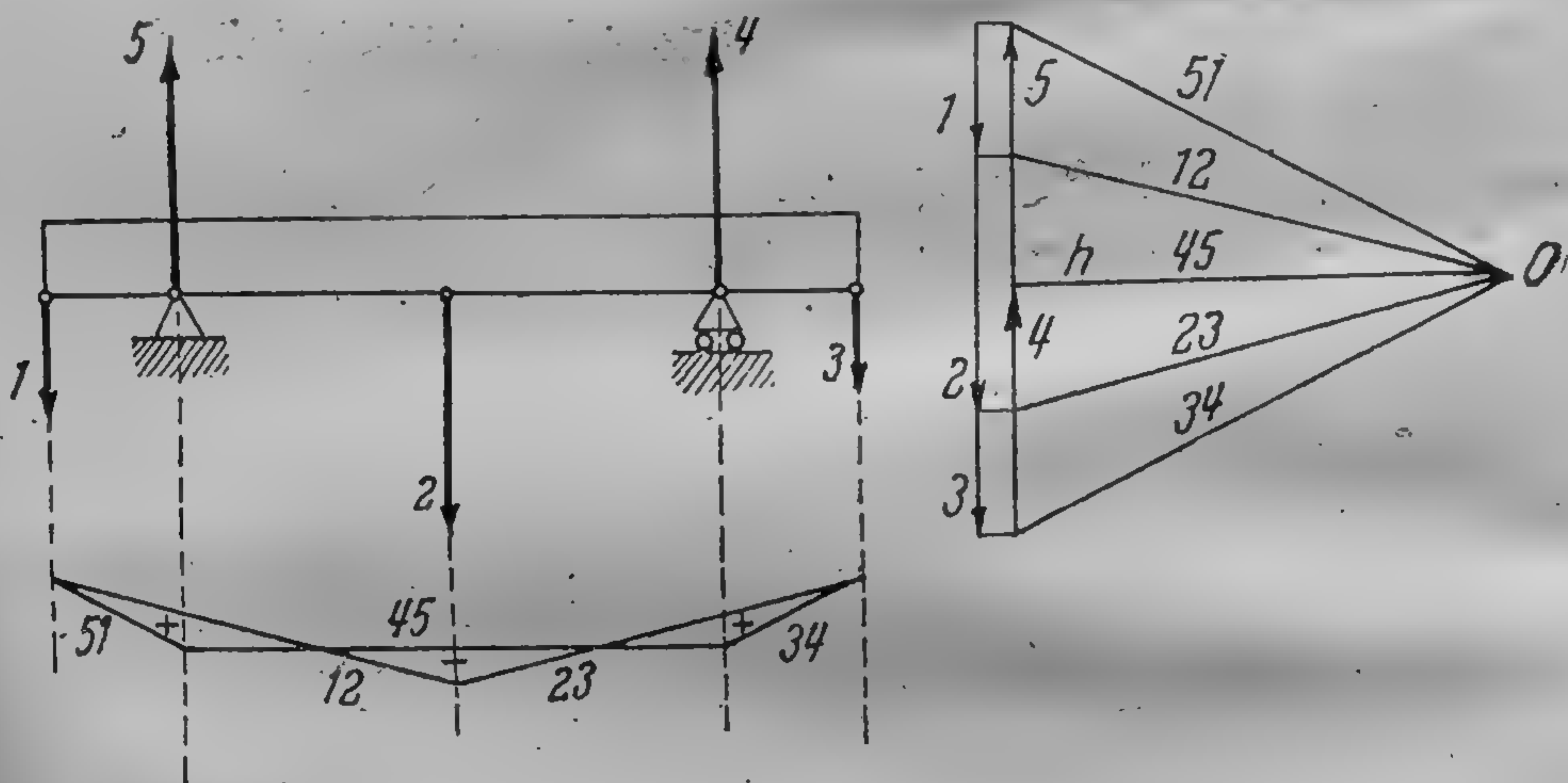


Fig. 125

schimbă semnul. La capetele grinzii sînt aplicate forțele 1 și 3, la mijloc forța 2; în rezeme acționează reacțiunile 4 și 5 pe care le vom determina cu ajutorul metodei arătate mai înainte. În cazul considerat, laturile poligonului funicular 12, 45, și 23, 45, se întretaie, și pentru punctele lor de întrefăiere, momentul încovoietor este egal cu zero. Să urmărim variația momentului încovoietor pentru diferite secțiuni ce se deplasează de la stînga spre dreapta. Dacă vom lua o secțiune foarte apropiată de extremitatea din stînga a grinzii, atunci la stînga secțiunii va acționa numai forța 1, al cărei moment în raport cu această secțiune este pozitiv. În dreptul forței 5, momentul pozitiv atinge cea mai mare valoare, apoi scade și devine zero în punctul de intersecție al laturilor 12 și 45. Nu este greu de înțeles ce se întîmplă. Forțele 1 și



5 dau o rezultantă paralelă cu forța 5, orientată în același sens cu forța 5 și situată în dreapta forței 5. Deoarece, în conformitate cu teorema lui Varignon, momentul resultant al forțelor 1 și 5 este egal cu momentul rezultantei lor, este evident că momentul resultant va fi egal cu zero în punctul de aplicație al rezultantei. De aici rezultă că ducând prin punctul de intersecție al laturilor 12 și 45 o dreaptă paralelă cu forțele, vom obține suportul rezultantei forțelor 1 și 5. Deplasându-ne și mai departe spre dreapta, vom obține momente negative. În adevăr, momentul resultant al forțelor 1 și 5 va fi egal cu momentul rezultantei lor care, evident, este negativ. Acest moment va crește în valoare absolută

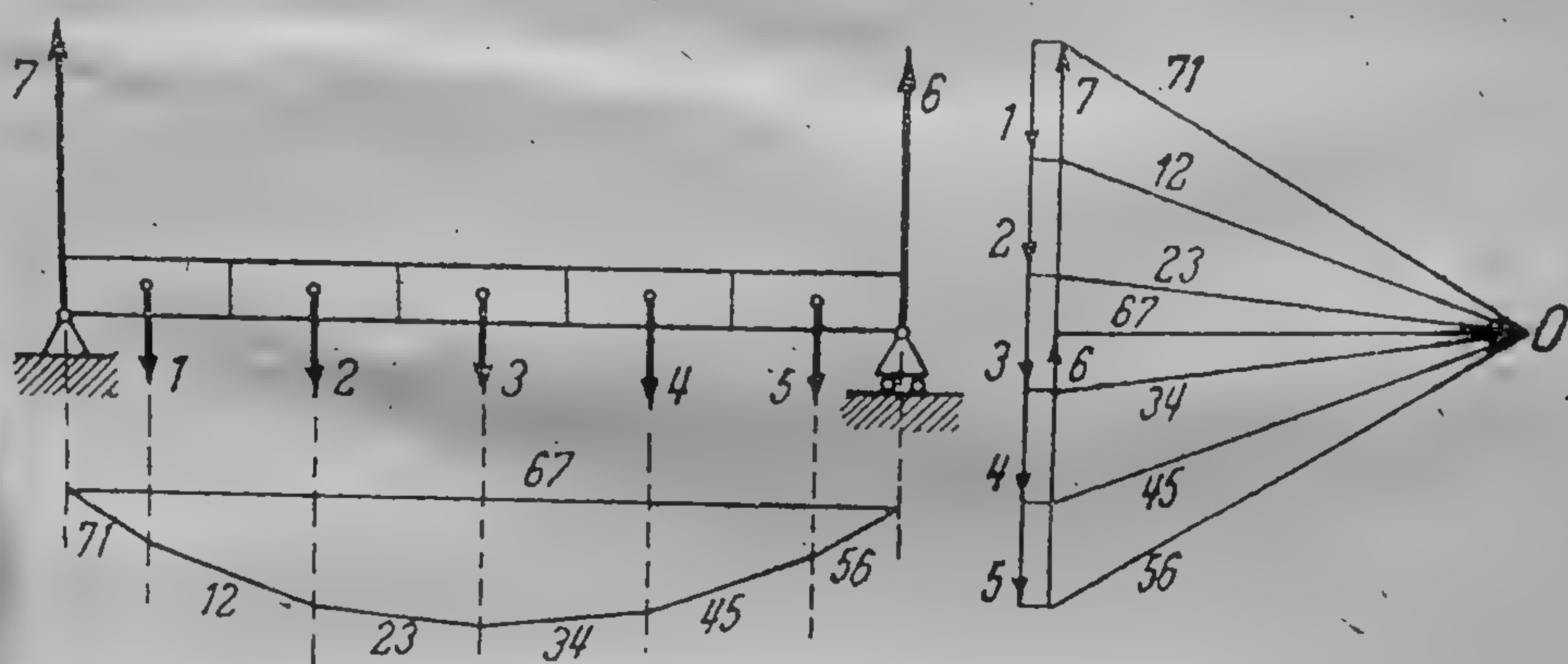


Fig. 126

pînă la secțiunea din dreptul forței 2, apoi va începe să scadă în valoare absolută și va deveni egal cu zero în dreptul punctului de intersecție al laturilor 23 și 45. Ducând prin punctul de intersecție al laturilor 23 și 45 o dreaptă paralelă cu forțele, este evident că vom obține suportul rezultantei forțelor 1, 5 și 2. Prin deplasarea mai departe spre dreapta, momentul devine pozitiv, atinge valoarea maximă în dreptul forței 4 și devine egal cu zero la capătul din dreapta al grinzii. Semnele puse în fig. 125 în poligonul funicular ne indică semnul momentului încovoietor. Vedem că și în acest caz mai complicat se poate determina ușor semnul momentului încovoietor pentru o secțiune oarecare, urmărind variațiile continue ale momentului în timpul deplasării secțiunii pe grindă.

Pînă acum, am neglijat greutatea grinzii și am examinat doar cazul forțelor concentrate, care acționează asupra ei. Presupunem acum că grinda are greutate și este încărcată continuu,



pe toată lungimea sa. Împărțim grinda în porțiuni sepanate și determinăm greutatea fiecărei porțiuni, care se compune din greutatea porțiunii considerate a grinzii și partea corespunzătoare a sarcinilor. Presupunem că am împărțit grinda în 5 părți cu greutățile 1, 2, 3, 4, 5 (fig. 126). Construind după metoda indicată mai înainte, poligonul forțelor și poligonul funicular pentru cele cinci forțe 1, 2, 3, 4, 5, vom determina atât reacțiunile 6 și 7, cât și momentul încovoietor pentru orice secțiune a grinzii. Este evident că, construcția indicată ne va da un rezultat cu atât mai precis cu cât grinda va fi împărțită în mai multe părți. La limită, poligonul funicular se va transforma într-o curbă funiculară cu o coardă de închidere, iar direcțiile razelor 71, 12, 23 etc., ne dau direcțiile tangentelor la această curbă.

Să examinăm mai amănunțit cazul particular, când grinda este omogenă și încărcată cu o sarcină continuă uniform repartizată pe toată lungimea sa. Împărțind grinda într-un număr foarte mare de părți extrem de mici și determinând greutățile lor, vom avea evident un număr foarte mare de forțe egale, care acționează asupra grinzii (fig. 127). Suma lor este egală cu greutatea întregii grinzi și a sarcinii ei totale. Luând polul  $O$  și ducând razele, putem construi poligonul funicular care la limită se transformă într-un arc de curbă. Coarda care închide această curbă va fi raza care determină reacțiunile în poligonul forțelor. Vom arăta că în cazul considerat, curba este o parabolă. Pentru aceasta ne folosim de fig. 128. Notăm greutatea unității de lungime a grinzii prin  $q$ . Atunci greutatea unui element de lungime  $dy$  va fi egală cu  $qdy$ . La fiecare tangentă  $T$  la curba funiculară, îi va corespunde o rază paralelă  $OA$ , în poligonul forțelor și invers. Dirijăm axa  $O_1y$  paralel cu grinda, iar axa  $O_1x$  prin acel punct al curbei în care tangenta este paralelă cu  $O_1y$ . Să considerăm o tangentă oarecare  $T$ , dusă la curbă în punctul  $B$  și care formează cu axa  $O_1x$  unghiul  $\alpha$ . Dacă  $y=f(x)$  este ecuația curbei căutate, se știe că vom avea:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{dx}{dy}.$$

Notăm distanța polară  $CO$  din poligonul forțelor prin  $h$ . Deoarece  $AO \parallel T$ , atunci  $\angle CAO = \alpha$ , și avem:

$$AC = h \operatorname{ctg} \alpha = h \frac{dx}{dy}.$$

Să ne deplasăm acum de-a lungul grinzii spre dreapta cu o lungime infinit mică  $dy$ . Vom obține o nouă tangentă  $T_1$  în



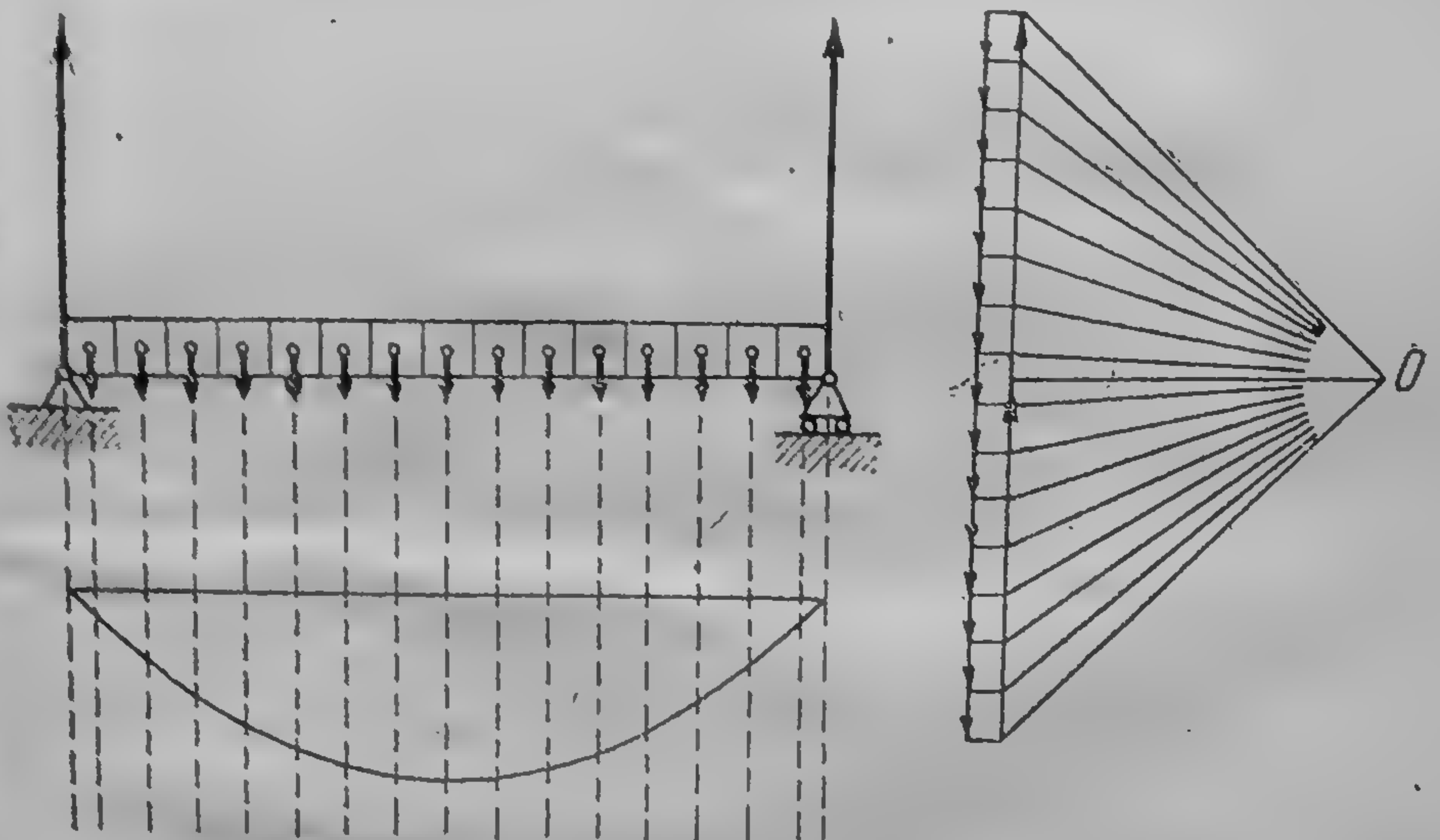


Fig. 127

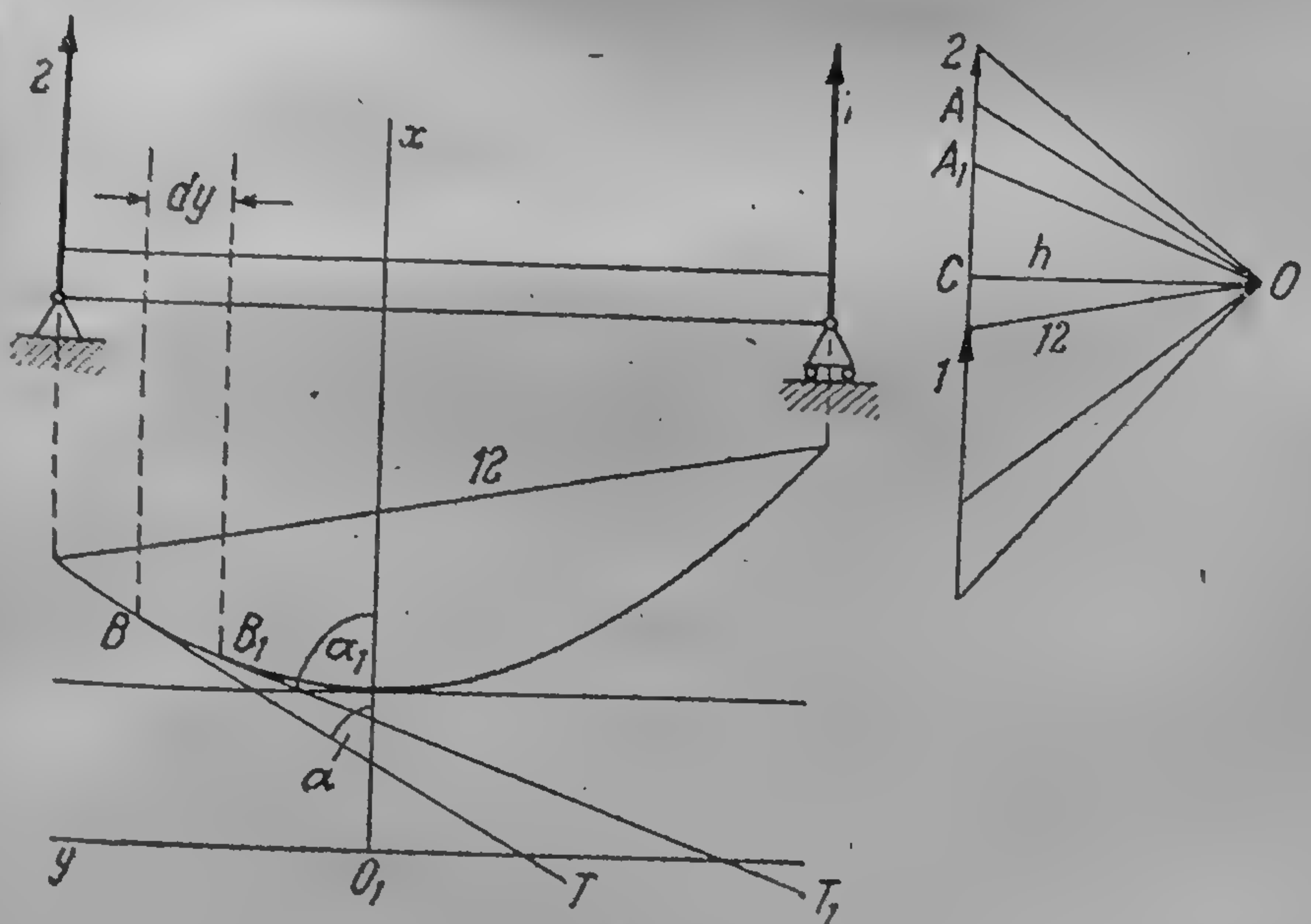


Fig. 128



punctul  $B_1$  și o nouă rază  $OA_1 \parallel T_1$ , care formează cu axa  $O_1x$  unghiul  $\alpha_1$ ; prin urmare, vom avea:

$$A_1 C = h \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Scăzînd a doua egalitate din prima, vom obține:

$$AC - A_1 C = h (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha_1),$$

iar la limită cînd punctul  $A_1$  tinde către  $A$

$$d(AC) = h \cdot d(\operatorname{ctg} \alpha) = h \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right).$$

Deoarece diferențiala  $(AC)$  din poligonul forțelor dă greutatea unei porțiuni infinit de mici a barei, iatunci

$$d(AC) = q dy,$$

și avem:

$$q dy = h \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right), \quad \text{sau } q = h \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy}\right) = h \frac{d^2 x}{dy^2}.$$

De aici găsim:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{q}{h}.$$

Integrînd, vom obține prima derivată:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{q}{h} y + C_1,$$

unde  $C_1$  este o constantă arbitrară. Pentru determinarea ei observăm că în cazul cînd  $y=0$ , tangenta la curbă trebuie să fie așa cum am presupus axa  $O_1y$ , adică trebuie să avem:  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  și

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Presupunînd în egalitatea anterioară că  $y=0$  vom găsi că  $C_1=0$ ; prin urmare, vom avea:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{q}{h} y.$$

De aici vom obține:

$$x = \frac{q}{h} \frac{y^2}{2} + C_2.$$



Pentru a determina pe  $C_2$ , vom nota abscisa punctului în care axa  $O_1x$  intersectează curba prin  $a$ . Pentru  $y=0$ , trebuie să avem:

$$a = C_2,$$

și vom avea:

$$x = \frac{q}{h} \frac{y^2}{2} + a \text{ sau } y^2 = \frac{2h}{q} (x - a).$$

În acest fel, am obținut ecuația unei parabole cu parametrul  $p = \frac{h}{q}$ . Dacă vom alege tangenta paralelă cu grinda ca axă  $O_1y$ , vom avea  $a=0$ , și vom obține ecuația de formă:

$$y^2 = \frac{2h}{q} x.$$

Vom presupune acum că asupra grinzii în afară de sarcinile distribuite mai acționează și forțe concentrate, de exemplu, două forțe 1 și 2 (fig. 129). Să ne imaginăm că împărțim grinda în

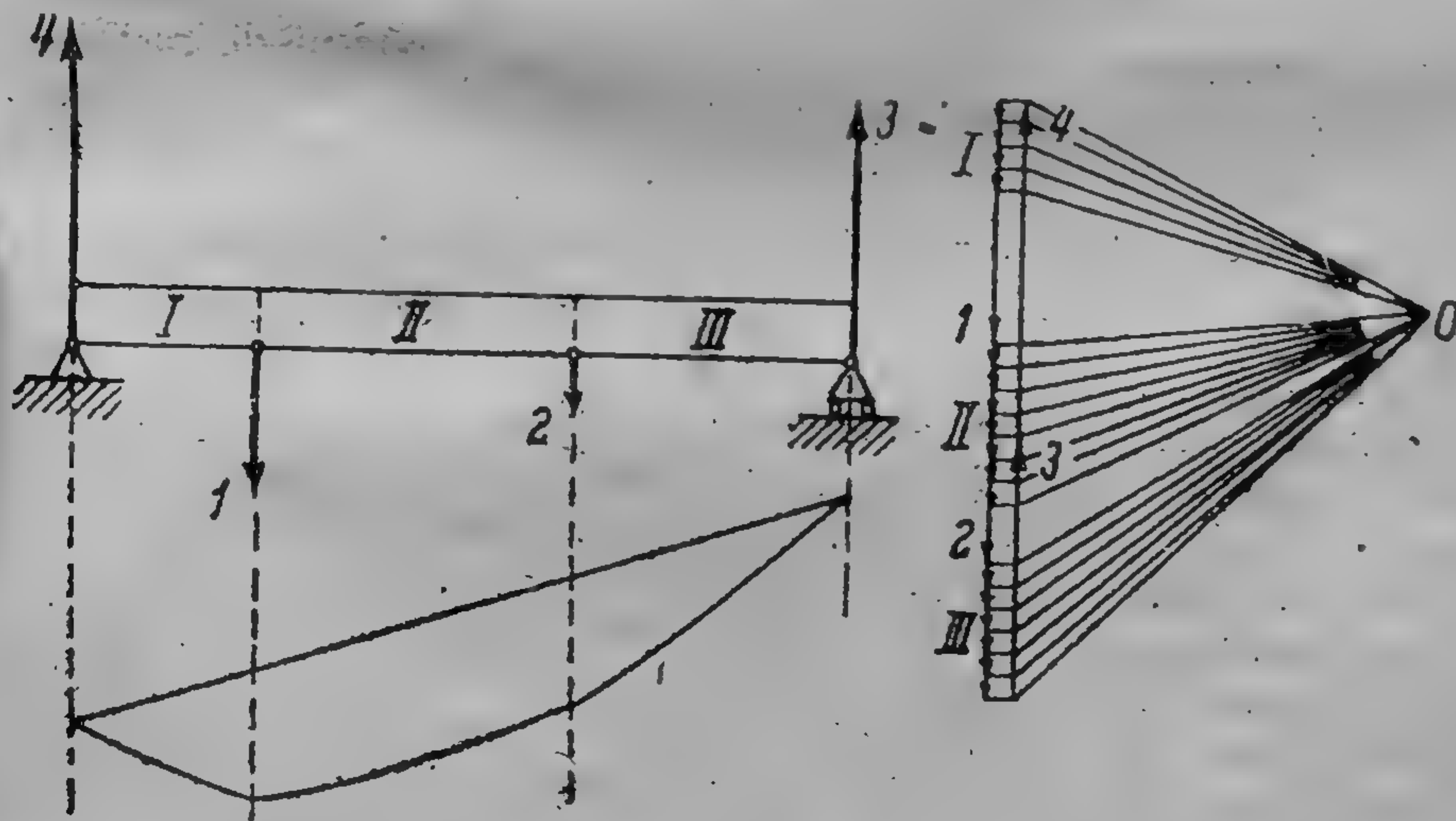


Fig. 129

trei sectoare: I, II și III în dreptul forțelor. Greutatea primului sector va fi reprezentată în poligonul forțelor prin segmentul de dreaptă I; lui îi va corespunde o mulțime infinită de raze. Poligonul funicular pentru sectorul I se va transforma după cele demonstrate anterior într-un arc de parabolă, ale cărei tangente în punctele extreme vor fi paralele cu razele extreme, duse la seg-



mentul *I* în poligonul forțelor. Mai departe, în poligonul forțelor trebuie să reprezentăm forța *I* apoi greutatea sectorului *II*; segmentului *II* îi va corespunde o infinitate de raze. Poligonul funicular pentru sectorul *II* se va transforma într-un arc de parabolă, ale cărui tangente în punctele extreme vor fi paralele cu razele extreme ale segmentului *II* din poligonul forțelor. În sfârșit, vom figura în poligonul forțelor forța *2* și greutatea sectorului *III*. Sectorului *III* îi va corespunde de asemenea un arc de parabolă, ale cărui tangente în punctele extreme sînt paralele cu razele extreme ale segmentului *III* din poligonul forțelor. Ca și mai sus, coarda de închidere va indica direcția razei, care determină reacțiunile *3* și *4*. Vedem că în cazul considerat suprafața momentelor este mărginită de trei arce de parabolă care se frîng în dreptul forțelor concentrate și la coarda de închidere. Tangentele în punctele extreme ale acestor arce de parabolă sînt paralele cu razele extreme ale porțiunilor hașurate în poligonul forțelor.

Să revenim la fig. 124. Ducem în grindă o secțiune prin punctul *A* și eliminăm partea dreaptă a grinzii. Asupra părții din stînga acționează forțele *5*, *1*, *2*, *3*. Alegem punctul de reducere în secțiunea *A* și mutăm acolo toate forțele *5*, *1*, *2*, *3*. Dacă vom lua ca pozitiv sensul forței *5*, atunci vom obține rezultanta *R*:

$$R = \text{forța } 5 - \text{forța } 1 - \text{forța } 2 - \text{forța } 3.$$

Această rezultantă *R* se numește forță tăietoare. Astfel, *forța tăietoare într-o secțiune oarecare este egală cu rezultanta tuturor forțelor aplicate pe grindă în stînga secțiunii considerate*. În poligonul forțelor, forța *R* se va reprezenta prin segmentul situat între razele *34* și *45*, care taie dreapta  $\Delta$  dată în punctele *b* și *a*. De aici obținem următoarea regulă:

*Forța tăietoare într-o secțiune oarecare este egală cu segmentul din poligonul forțelor cuprins între razele corespunzătoare acelor laturi ale poligonului funicular, care sînt intersectate de paralela dusă la forțe, prin secțiunea dată.*

Afară de rezultanta *R*, vom mai obține sistemul cuplurilor suplimentare. După cum știm, toate aceste cupluri se pot aduna, iar momentul cuplului rezultat va fi egal cu momentul rezultat al forțelor *5*, *1*, *2* și *3* în raport cu secțiunea *A*, adică cu momentul încovoietor  $M = ab \cdot h$ . Vedem că partea stîngă a grinzii se găsește sub acțiunea forței *R*, aplicate în secțiunea *A* și a cuplului, al cărui moment este egal cu momentul încovoietor *M*. Secționînd grinda pentru ca partea stîngă să rămînă în echilibru, este necesar ca să i se aplice în secțiunea *A* o forță egală ca



mărime și direcție și de sens opus forței tăietoare, și un cuplu al cărui moment este egal ca mărime și de sens opus momentului încovoietor  $M$ . Deoarece atunci când există partea dreaptă, partea stângă rămâne în echilibru, este evident că toată acțiunea mecanică a părții drepte asupra părții stângi se reduce la acea forță și la acel cuplu. De aici se înțelege cât de importantă este cunoașterea forței tăietoare și a momentului încovoietor pentru fiecare secțiune a grinzii; ele caracterizează forțele interioare care acționează în secțiunea considerată a grinzii.

Pentru toate celelalte amănunte, în particular pentru rezolvarea problemelor referitoare la găsirea momentelor maxime, influența deplasării sarcinilor etc., cititorul va consulta cursurile speciale de rezistența materialelor, de statică grafică și de statica construcțiilor.



## CAPITOLUL XV

### GRINZI CU ZĂBRELE

§ 59. Generalități. Orice element de construcție se deformează sub acțiunea forțelor exterioare aplicate asupra lui; forțele elastice care se dezvoltă în acest caz într-o secțiune a elementului de construcție se echilibrează cu forțele exterioare. Există elemente de construcție, ale căror deformații se pot reduce numai la compresiuni și întinderi, în timp ce alte elemente se pot totodată încovoia.

Elementele de construcție solicitate la încovoiere trebuie, în general, să fie mai larg dimensionate, ceea ce duce la un consum mai mare de materiale; în afară de aceasta calculul elementelor solicitate la încovoiere este dificil, trebuind să se țină seama și de proprietățile elastice ale materialului.

De aceea, de multe ori se tinde să se proiecteze elemente de construcție în care, pe măsura posibilității lor, nu apare încovoierea, ci numai compresiunea sau întinderea. De exemplu, piloni înalți pentru radiocomunicații sînt ancorați cu cabluri, pentru a echilibra presiunea vîntului prin tensiunea din cabluri și nu prin încovoierea pilonului. Balcoanele se sprijină cu contrafișe care se reazemă pe zidul clădirii, pentru a echilibra încărcătura balcorului, mai curînd prin compresiunea contrafișelor decît prin încovoierea grinzilor încastrate în zid, pe care se fixează balcoanele. Construcțiile formate din bare articulate între ele, care lucrează numai la întindere și compresiune, se numesc *grinzi cu zăbrele*. Ca urmare a avantajelor pieselor supuse la întindere și compresiune arătate mai înainte, grinzile cu zăbrele sînt cele mai răspîndite elemente de construcție.

Pentru ca barele separate ale grinzii cu zăbrele să lucreze numai la întinderi și compresiune, trebuie să fie satisfăcute următoarele condiții:

1. *Barele trebuie să fie drepte și legate între ele la capetele lor (nodurile grinzii cu zăbrele).*



2. Legăturile trebuie să fie articulații în care să nu apară frecare.

3. Forțele exterioare trebuie să fie aplicate numai în nodurile grinzii.

În adevăr, să presupunem că în nodurile grinzii cu zăbrele sînt aplicate forțe. Sub acțiunea lor grinda începe să se deformeze; această deformare se va opri cînd forțele elastice de deformare vor crește în așa măsură, încît să echilibreze forțele exterioare. Este evident, că dacă nu există frecare în noduri, atunci în timpul deformării fiecare bară va lua o astfel de poziție, încît rezultantele tuturor forțelor aplicate la extremitățile ei să fie dirijate de-a lungul ei, adică să se reducă fie numai la forțe de compresiune, fie la forțe de întindere. Vom observa că aceste deformări ale grinzii cu zăbrele sînt în general mici. Practic,

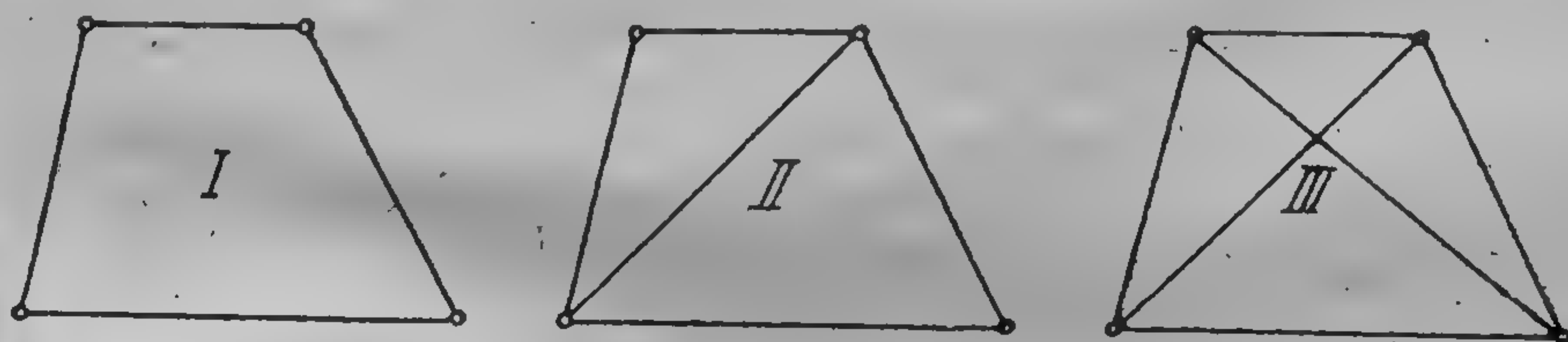


Fig. 130

îmbinarea prin articulații a barelor nu este comodă din punct de vedere constructiv și nu-și atinge scopul, deoarece datorită apariției ruginii, barele încep să se macine în articulații. De aceea, în prezent, barele se îmbină între ele rigid cu ajutorul niturilor. Din această cauză pot apărea în grinzi eforturi dirijate altfel decît de-a lungul barelor. Descompunînd aceste eforturi în două componente, una de-a lungul axei și una perpendiculară pe axa barei, vom constata că componenta perpendiculară pe axa barei, și care tinde să încovoie bare, va fi în general mică. De aceea se neglijează eforturile de încovoiere și se calculează grinzi ca și cînd barele grinzilor cu zăbrele ar fi îmbinate între ele prin articulații ideale fără frecare.

Grinzile cu zăbrele pot fi plane, și în spațiu. Noi ne vom ocupa aici numai de grinzi cu zăbrele plane, în al căror plan acționează forțele date. Este evident că grinda trebuie să reprezinte un sistem invariabil sau, cum se mai spune, un *sistem rigid*. Să examinăm, de exemplu, grinzi reprezentate în fig. 130. Sistemul I nu este rigid. Pentru a-l face rigid este suficient să se unească nodurile opuse printr-o bară în diagonală, cum se arată



în fig. 130 (II). Legarea celorlalte două noduri printr-o a doua bară [(fig. 130 (III))] este de prisos din punctul de vedere al rigidității grinzii. Nu este greu să se stabilească relația dintre numărul barelor  $N$  și numărul nodurilor  $T$  ale unei grinzi rigide cu zăbrele, fără bare suplimentare. În adevăr, pentru fixarea primelor trei noduri, sînt necesare trei bare, fiecare nod următor din cele  $N-3$  noduri va fi fixat prin două bare. Prin urmare,

$$T = 3 + (N-3) \cdot 2 = 2N-3.$$

Dacă  $T < 2N-3$ , atunci grinda cu zăbrele nu va fi rigidă și nu va putea fi utilizată în construcții. Dacă  $T > 2N-3$ , atunci grinda cu zăbrele are bare suplimentare. Astfel de grinzi se folosesc în practică, dar calculul eforturilor în bare la asemenea grinzi duce la o problemă static nedeterminată care poate fi rezolvată numai cu ajutorul rezistenței materialelor.

Pentru ca un sistem plan de forțe să fie în echilibru, trebuie să fie satisfăcute trei ecuații de echilibru (§ 40) de aceea reacțiile grinzii cu zăbrele trebuie să fie astfel alese încît reacțiunile lor să se reducă la cel mult trei necunoscute. Mai departe, fiecare nod al grinzii trebuie să fie de asemenea, în echilibru. Deoarece în nod acționează forțe concurente, numărul ecuațiilor de echilibru al nodului va fi egal cu două; prin urmare, pentru toate nodurile, numărul ecuațiilor va fi egal cu  $2N$ . Din combinarea acestor ecuații vor rezulta trei ecuații de echilibru a întregii grinzi cu zăbrele, pe care noi le folosim pentru determinarea reacțiunilor din reacțime. Celelalte  $2N-3$  ecuații independente, servesc la determinarea forțelor interioare a eforturilor în bare. Astfel, pentru ca grinda să fie static determinată, numărul barelor  $T$  trebuie să fie egal cu  $2N-3$ ;

$$T = 2N-3,$$

*adică grinda rigidă fără bare suplimentare este în același timp static determinată.*

Totalitatea barelor care limitează grinda în sus, formează *talpa superioară*, iar cele care o limitează în jos, formează *talpa inferioară*; partea tălpilor dintre două noduri vecine se numește *panou*; barele dintre tălpile grinzii se numesc bare intermediare, montanți, contrafișe, diagonale etc.

A efectua calculul grinzii înseamnă a determina atît reacțiunile reazemelor, cît și eforturile în toate barele grinzii cu zăbrele,



sub acțiunea forțelor date. Din toate metodele existente, ne vom opri numai la următoarele trei.

**§ 60. Metoda lui Ritter.** Metoda lui Ritter se aplică grinzilor cu zăbrele la care o secțiune transversală ce separă grinda în două părți, intersectează cel mult trei bare ale căror eforturi nu sînt cunoscute. Să examinăm, de exemplu, grinda reprezentată în fig. 131, în ale cărei noduri sînt aplicate forțele 1 și 2. Construind poligonul forțelor, cu distanța polară  $h$  și poligonul funicular, determinăm mai întîi așa cum s-a arătat mai înainte (§ 58) reacțiunile 3 și 4. Ducem o secțiune transversală care intersectează barele  $a$ ,  $b$ , și  $c$ . Eforturile în aceste bare le vom nota cu aceleași litere  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  și  $\bar{c}$ . Forțele  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  și  $\bar{c}$  sînt acele forțe cu care partea dreaptă a grinzii acționează asupra părții din stînga. Este evident că partea din stînga a grinzii cu zăbrele trebuie să se găsească în echilibru, sub acțiunea a cinci forțe: 4, 1,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ . Deoarece direcțiile forțelor  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  sînt cunoscute — ele coincid cu direcțiile barelor respective — atunci din cele trei ecuații de echilibru ale sistemului plan de cinci forțe (4, 1,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ), vom putea determina cele trei forțe necunoscute  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  prin una din metodele arătate în § 40. Desigur că este preferabil să formăm ecuațiile astfel încît în fiecare dintre ele să intre numai cîte una din forțele necunoscute  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ; aceasta se poate realiza folosindu-ne de indicațiile date în observația din § 40. Presupunem, de exemplu, că vrem să determinăm forța  $\bar{c}$ . Pentru aceasta egalăm cu zero momentul resultant al celor cinci forțe (4, 1,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ) în raport cu punctul de intersecție  $I$  al barelor  $a$  și  $b$ . Este evident că momentele forțelor  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  vor fi în acest caz identic egale cu zero și vom obține o ecuație cu o singură forță necunoscută, forța  $\bar{c}$ . Dacă am vrea să găsim forța  $\bar{a}$ , ar trebui să egalăm cu zero momentul resultant al forțelor 4, 1,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  în raport cu punctul  $II$  de intersecție al barelor  $b$  și  $c$ ; de aici vom obține o ecuație pentru determinarea forței necunoscute  $\bar{a}$ . Dacă barele  $a$  și  $c$  nu ar fi paralele, atunci, egalînd cu zero momentul forțelor în raport cu punctul de intersecție al barelor  $a$  și  $c$ , am fi obținut o ecuație pentru determinarea forței necunoscute  $\bar{b}$ . În cazul cînd barele  $a$  și  $c$  sînt paralele așa cum este cazul din fig. 131, acest procedeu de determinare a forței  $\bar{b}$  nu este aplicabil, deoarece punctul de intersecție al barelor  $a$  și  $c$  este situat la infinit. Totuși, determinarea forței  $\bar{b}$  nu întîmpină nici un fel de dificultate; o vom



obține, de exemplu, egalînd cu zero suma proiecțiilor forțelor  $4, 1, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , pe direcția perpendiculară pe barele  $a$  și  $c$ . Aplicarea rezultatelor care ne sînt cunoscute din statica grafică, ne permite să simplificăm și mai mult problema. Momentul forțelor  $4$  și  $1$  în raport cu punctul  $I$  este un moment încovoietor; știm că el este egal cu produsul segmentului  $mn$ , situat în interiorul poligonului funicular, cu distanța polară  $h$  și este în cazul consi-

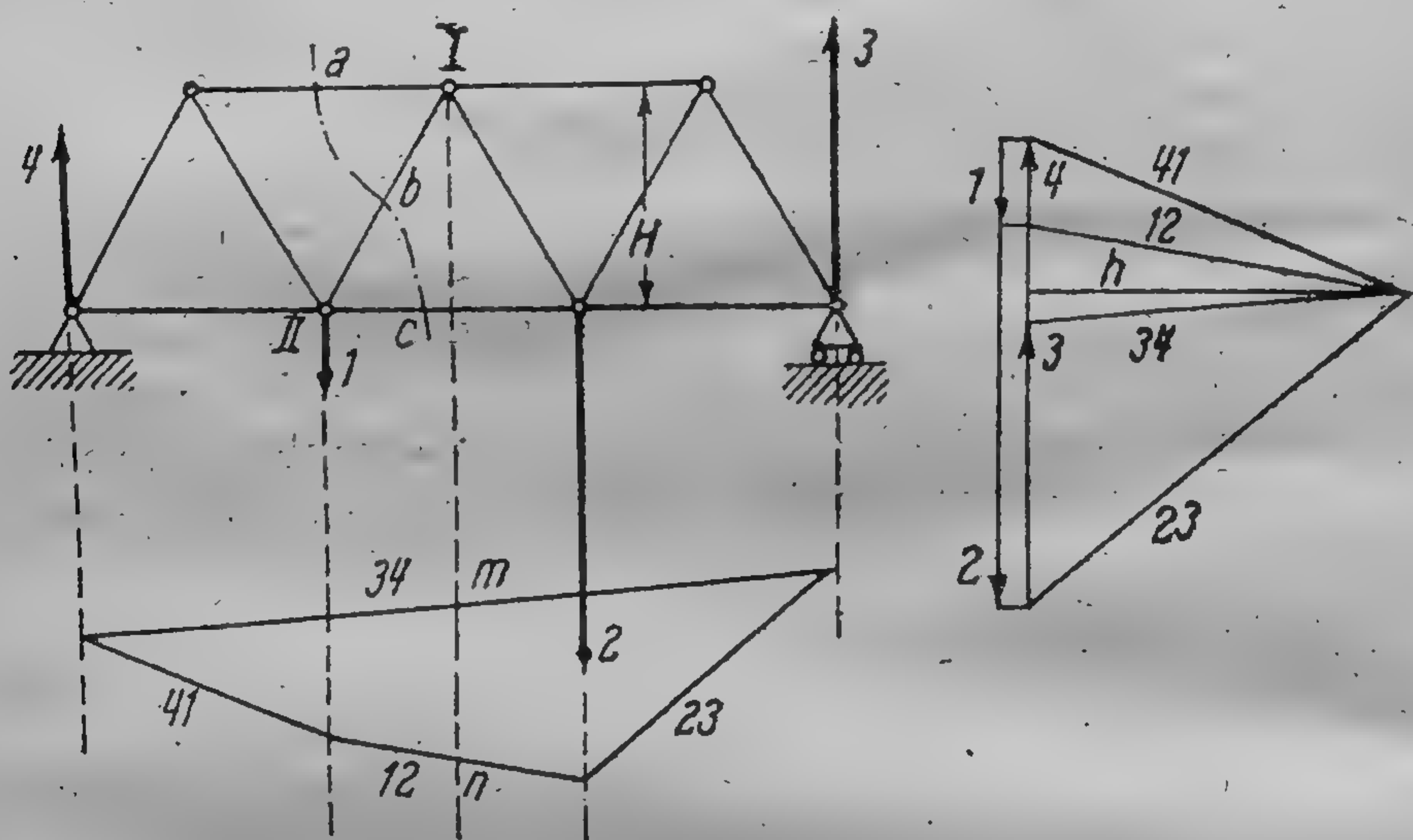


Fig. 131

derat negativ (§ 58). Dacă vom nota înălțimea grinzii prin  $H$ , atunci momentul forței  $c$  trebuie să fie pozitiv și va fi egal cu  $+Hc$ . De aceea ecuația de echilibru căutată va căpăta forma:

$$+Hc - mn \cdot h = 0, \text{ sau } c = mn \frac{h}{H};$$

forța  $c$  trebuie să fie dirijată de la secțiunea  $c$  către forța  $2$ , adică efortul  $c$  este de întindere. Prin acest procedeu vom putea determina efortul în toate barele grinzii cu zăbrele.

**§ 61. Metoda lui Culman.** Această metodă este aplicabilă, ca și cea precedentă, la grinzile în care secțiunea  $a$  taie numai trei bare cu eforturi necunoscute. Fie dată grinda din fig. 132; în nodurile ei sînt aplicate forțele  $1$  și  $2$ . Construind poligonul forțelor și poligonul funicular, vom determina pe cale obișnuită



reacțiunile 3 și 4 ale reazemelor. Ducem secțiunea care va întretaia barele  $a$ ,  $b$ , și  $c$ . Să găsim rezultanta  $\bar{R}$  a forțelor 4 și 1. Vom determina mărimea ei din poligonul forțelor și vom obține punctul prin care trece, prelungind laturile 34 și 12 ale poligonului funicular, pînă la întretaierea lor (pentru a nu complica desenul, aceste construcții nu sînt reprezentate în fig. 132).

Deplasăm originea forței  $\bar{R}$  în punctul  $K$  de întretaiere a suportului ei cu prelungirea barei  $c$  și unim punctul  $K$  cu punctul de intersecție al barelor  $a$  și  $b$ . Cele patru forțe  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{R}$ , trebuie

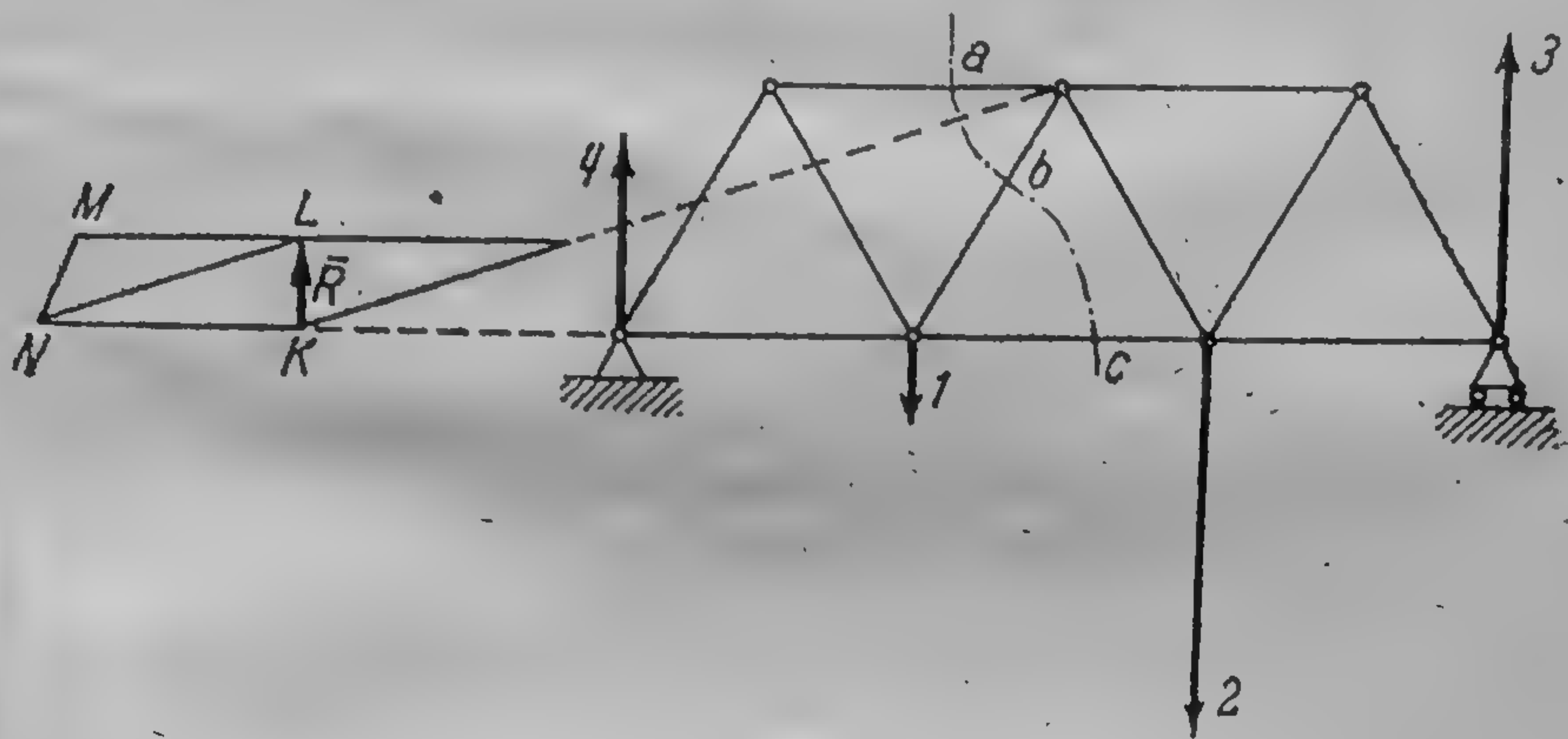


Fig. 132

să fie în echilibru; dar forțele  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  au o rezultantă care trece prin punctul de intersecție al barelor  $a$  și  $b$ . De aceea, forța  $\bar{R}$  trebuie să se echilibreze cu această rezultantă și cu forța  $\bar{c}$ , adică aceste trei forțe trebuie să fie concurente și rezultanta forțelor  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  trebuie de asemenea să treacă și prin punctul  $K$ . Astfel am găsit direcția rezultantei forțelor  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ . Acum nu este greu de găsit această rezultantă și forța  $\bar{c}$  punând condiția ca aceste două forțe să se echilibreze cu forța  $\bar{R}$ ; construim un triunghi  $LNK$  avînd una din laturi egală cu  $\bar{R}$ , iar celelalte laturi paralele cu direcțiile date ale forțelor căutate. Deoarece  $LN$  este rezultanta forțelor  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  vom determina aceste forțe descompunînd pe  $LN$  după două direcții paralele cu  $a$  și  $b$ . Pentru aceasta construim triunghiul  $LMN$  cu latura  $LN$  cunoscută, laturile  $LM$



și  $MN$  fiind respectiv paralele cu barele  $a$  și  $b$ . Astfel, obținem toate cele trei forțe căutate:

$$\bar{a} = \overline{LM}; \quad \bar{b} = \overline{MN}; \quad \bar{c} = \overline{NK}.$$

Sensul forțelor  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  se stabilește prin parcurgerea patrulaterului  $KLMNK$  în sensul indicat de forța  $R$ . Vedem că barele  $a$  și  $b$  sînt comprimate, iar bara  $c$  este întinsă.

Nu este greu de observat că această metodă este de fapt echivalentă cu rezolvarea următoarei probleme: *descompunerea forței date  $R$  în trei forțe, care au suporturile date  $a$ ,  $b$ ,  $c$* . În adevăr, pentru ca partea din stînga a grinzii să fie în echilibru, componentele forței  $R$  după direcția celor trei bare trebuie să fie echilibrate de cele trei forțe ( $\overline{LM}$ ,  $\overline{MN}$ , și  $\overline{NK}$ ) datorite acțiunii părții din dreapta grinzii asupra celui din stînga, forțele fiind aplicate în punctele de secționare ale barelor  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . De aceea, cele trei componente ale forței  $R$  în direcția barelor  $a$ ,  $b$ ,  $c$  trebuie să fie egale și opuse forțelor  $\overline{LM}$ ,  $\overline{MN}$  și  $\overline{NK}$ , adică vor fi reprezentate prin vectorii de sens opus  $\overline{ML}$ ,  $\overline{NM}$  și  $\overline{KN}$ . Din construcția prezentă, rezultă că această problemă are numai o singură soluție.

Excepție face cazul cînd cele trei bare  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sînt concurente; atunci problema va fi evident nedeterminată. Deoarece problema descompunerii unei forțe în patru sau mai multe forțe cu suporturi date, este o problemă nedeterminată, metoda lui Culman nu este aplicabilă la grinzi în care secțiunea transversală întâlnește mai mult decît trei bare cu eforturi necunoscute.

Vedem că ambele metode nu permit să se afle în același timp, eforturile în toate barele; determinarea acestor eforturi trebuie să se facă succesiv, prin construcții și calcule separate.

**Observație.** S-ar părea că metoda lui Culman nu este aplicabilă în cazul cînd forța 4 este egală cu forța 1, deoarece în acest caz  $R=0$ . Dar atunci forțele 4 și 1 formează un cuplu; de aceea forța  $c$  și rezultanta forțelor  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  trebuie de asemenea să formeze un cuplu cu momentul egal și opus. Dacă distanța de la nodul în care se intersectează barele  $a$  și  $b$  la  $c$  este egală cu  $H$ , trebuie să avem:

$$c \cdot H = \text{mom. cuplului } (4,1);$$

de aici vom găsi forța  $c$  și apoi forțele  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ . Dacă pe lîngă aceasta barele  $a$  și  $c$  sînt și paralele, este evident că  $b=0$  și  $a=c$ .



§ 62. Metoda Cremona-Maxwell. Spre deosebire de cele două metode precedente, această metodă ne permite să reprezentăm într-un tablou, eforturile din toate barele grinzii. Teoria ei bazată pe studiul figurilor reciproce, a fost elaborată de către fizicianul Maxwell (1831—1879) și independent de el, pe altă cale, de către matematicianul italian Cremona.

Vom numi ca și pînă acum toate dreptele figurii plane — laturile sale. Vom da definiția figurilor reciproce:

*Două figuri se numesc reciproce, dacă: 1) au același număr de laturi; 2) laturile ambelor figuri sînt respectiv paralele (sau perpendiculare, ceea ce este același lucru); 3) la laturile concurente în același punct pe o figură, le corespund pe cealaltă figură laturi paralele, care formează un poligon închis, și invers.*

Am văzut exemplul unei astfel de figuri la poligonul forțelor și poligonul funicular, construite pentru doi poli diferiți (fig. 114). Vom da încă un exemplu. Să examinăm exagonul format din laturile 1, 2, 3, 4, 5, 6 (fig. 133). Vom determina centrele

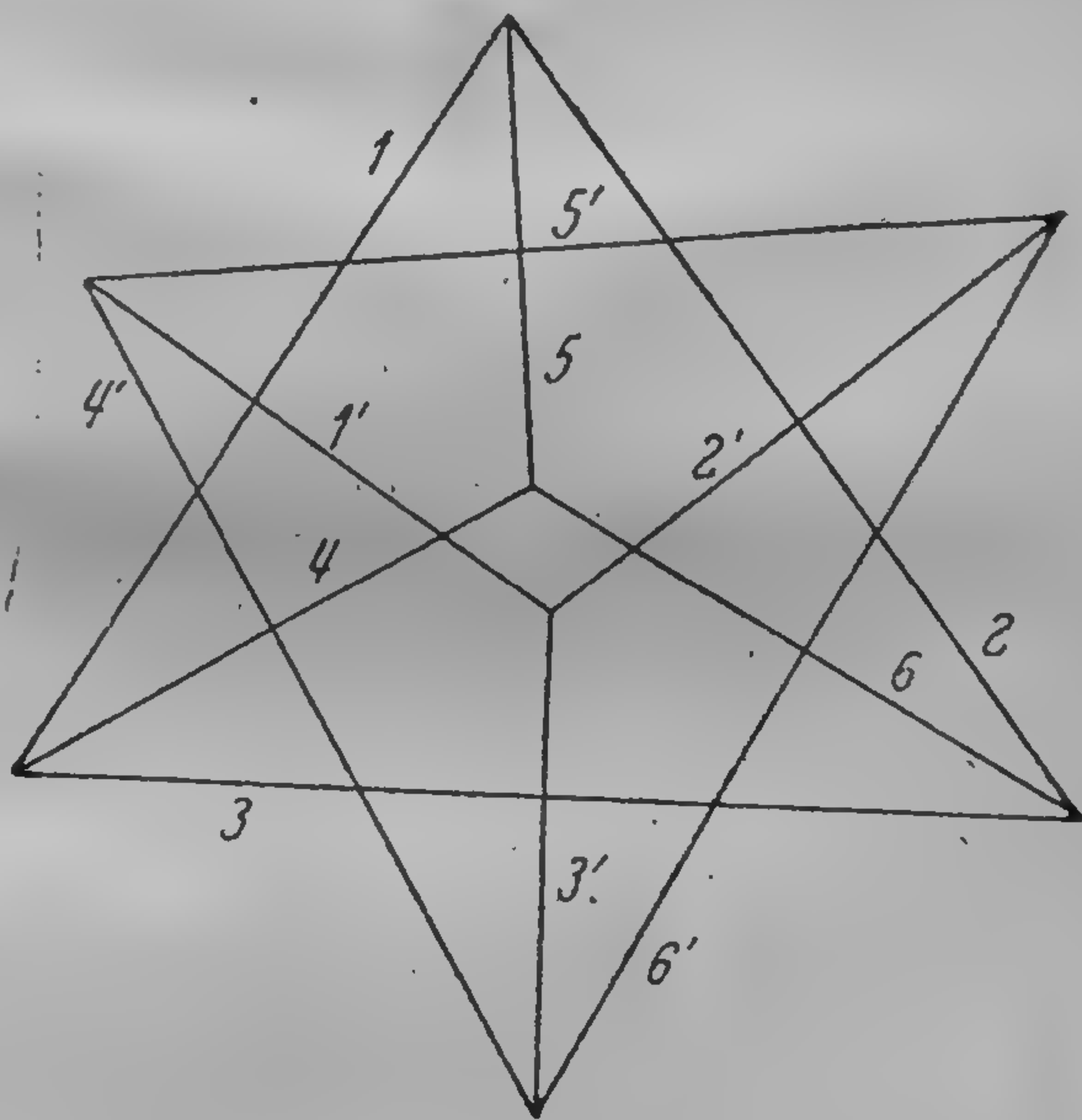


Fig. 133

cercurilor circumscrise triunghiurilor (1, 2, 3), (1, 5, 4), (5, 2, 6), (6, 3, 4). Unind aceste patru centre prin drepte, vom obține un nou exagon cu laturile 1', 2', 3', 4', 5', 6'. Vom demonstra că exagonul obținut va fi reciproc celui alt exagon. Prima condiție, evident, este satisfăcută. Vom arăta acum că laturile 1 și 1', 2 și 2', 3 și 3' etc. sînt perpendiculare între ele. Dreapta 1' unește centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor (1, 2, 3) și (1, 5, 4), la care latura 1 este latură comună și totodată coarda comună a celor două cercuri. Se știe că dreapta care unește centrele a două cercuri secante este perpendiculară pe coarda comună



pe care a împarte în două părți egale, deci laturile  $1$  și  $1'$  sînt perpendiculare. Această demonstrație este valabilă pentru celelalte perechi de laturi. Astfel, a doua condiție este de asemenea satisfăcută. Să trecem în sfîrșit la cea de-a treia condiție. Laturile  $1, 2, 3$  formează un triunghi; laturile  $1', 2', 3'$  sînt concurente într-un punct. Laturile  $1, 5, 2$  sînt concurente într-un punct; laturile  $1', 5', 2'$  formează un triunghi etc. Prin urmare, a treia condiție este și ea satisfăcută și figurile sînt reciproce. Observăm

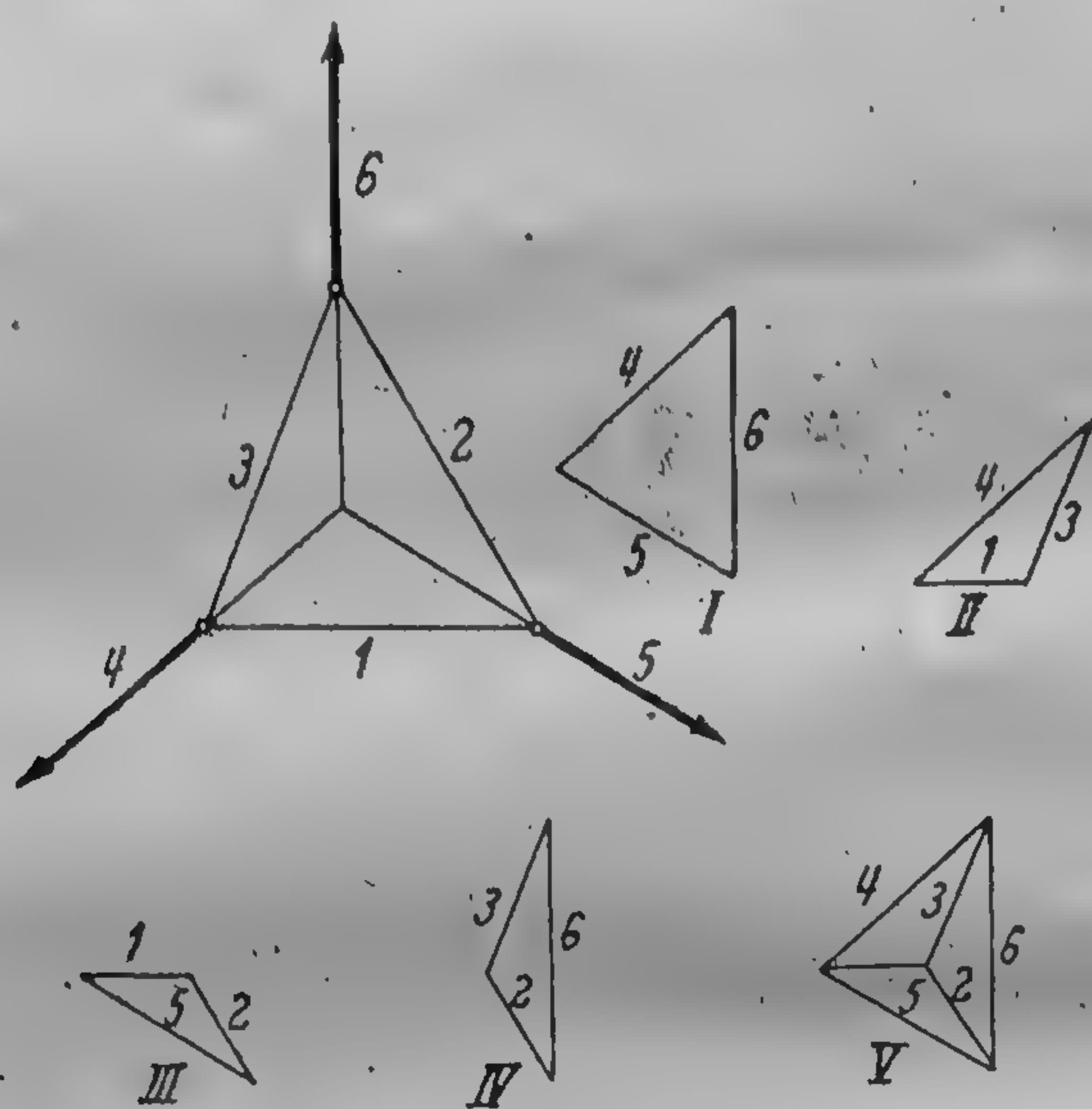


Fig. 134

că ambele exagoane pot fi considerate ca proiecții pe planul desenului a două tetraedre, iar muchiilor unui tetraedru îi corespund vîrfurile celuilalt, și invers, dacă prin muchii corespondente vom considera acelea care sînt perpendiculare una pe alta.

În construcțiile ce urmează vom numi laturi ale figurilor drepte care reprezintă barele grinzii cu zăbrele, suporturile forțelor date, cum și reacțiunile din reazeme. Vom nota aceste laturi prin cifre; aceleași cifre vor servi și pentru reprezentarea forțelor care acționează de-a lungul acestor laturi.

Să examinăm cazul unei grinzi triunghiulare în ale cărei vîrfuri sînt aplicate forțele  $4, 5, 6$  (fig. 134). Barele grinzii le vom nota prin cifrele  $1, 2, 3$ . În primul rînd forțele date  $4, 5, 6$  trebuie să fie în echilibru; pentru aceasta ele trebuie să fie con-



concurrente și poligonul forțelor 4, 5, 6 trebuie să fie închis, adică să fie un triunghi. Acest triunghi este construit în fig. 134 (I). Prelungind suporturile forțelor 4, 5, 6 până la punctul lor de concurență, putem considera figura obținută ca proiecția pe planul desenului a unui tetraedru, având muchiile laterale 4, 5, 6 și baza formată de laturile 1, 2, 3. Dacă toată grinda se găsește în echilibru, atunci fiecare nod al ei trebuie să fie în echilibru. Să examinăm, de exemplu, nodul în care se întâlnesc laturile 4, 1, 3. El trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forței date 4 și eforturilor din barele 1 și 3. Aceste trei forțe trebuie să formeze un triunghi reprezentat în fig. 134 (II), iar construirea acestui triunghi este elementară, deoarece ni se dă o latură 4 și direcțiile celorlalte două laturi 3 și 1; de aici determinăm mărimea forțelor 1 și 3, iar sensul lor se stabilește prin sensul dat al forței 4 în acest triunghi. Mutând forțele 1 și 3 în nod, tragem concluzia că barele 1 și 3 trebuie să fie întinse. Nodul în care se întâlnesc laturile 1, 5, 2 trebuie să fie de asemenea în echilibru; prin urmare, forțele 1, 5, 2 trebuie să formeze un triunghiul reprezentat în fig. 134 (III). Sensul forțelor 1 și 2 se determină prin sensul dat al forței 5. Mutând forțele 1 și 2 în nod, concludem că barele 1 și 2 trebuie să fie ambele întinse. Observăm că forța 1 am întâlnit-o de două ori; în triunghiul II și în triunghiul III; ea are în aceste triunghiuri, sensuri opuse. Aceasta este evident, deoarece bara întinsă acționează asupra celor două noduri pe care le unește cu forțe egale ca mărime și direcție, dar opuse ca sens. Trecând la nodul format de laturile 6, 3, 2, vom construi triunghiul IV, din care vom putea determina forțele 2 și 3. Această construcție este de prisos, deoarece forțele 2 și 3 au fost deduse deja din triunghiurile III și II. Desigur, forțele 2 și 3 în triunghiul IV vor fi de sens contrar cu forțele 2 și 3 din triunghiurile II și III. Vom observa că în construcția triunghiurilor II, III și IV, forțele date, 4, 5, 6 s-au întâlnit câte o singură dată, iar eforturile în barele 1, 2, 3 de câte două ori. Acest procedeu se poate extinde și asupra grinzilor mai complicate; la început căutăm echilibrul forțelor date și al reacțiunilor din reazeme, construind pentru ele poligonul forțelor, apoi, trecem la echilibrul nodurilor separate ale grinzii. Totuși, dacă grinda este complicată, numărul acestor construcții separate va fi foarte mare, și vom fi nevoiți să le trasăm de câte două ori laturile care reprezintă eforturile în bare. Nu este greu de observat că această construcție poate fi simplificată. Este evident că triunghiurile II, III și IV se pot așeza în triunghiul I, așa cum se arată în fig. 134 (V). Figura V ne dă tabloul tuturor eforturilor



și înlocuiește figurile I, II, III și IV. Figura V și figura care reprezintă grinda cu forțele care-i sînt aplicate sînt reciproce. În adevăr, numărul laturilor ambelor figuri este același; laturile sînt paralele două cîte două; în sfîrșit, laturile concurente dintr-una din figuri sînt paralele cu laturile ce formează un triunghi în cealaltă figură și invers, așa cum este cazul laturilor 1, 2, 3. Astfel metoda Cremona-Maxwell se reduce la construirea figurii reciproce a figurii formată de grinda cu zăbrele dată (cu forțele exterioare aplicate în nodurile ei). Ambele figuri reciproce se numesc *diagrame reciproce*; din această cauză metoda se mai numește și *metoda diagramelor reciproce*. Construirea diagrame-

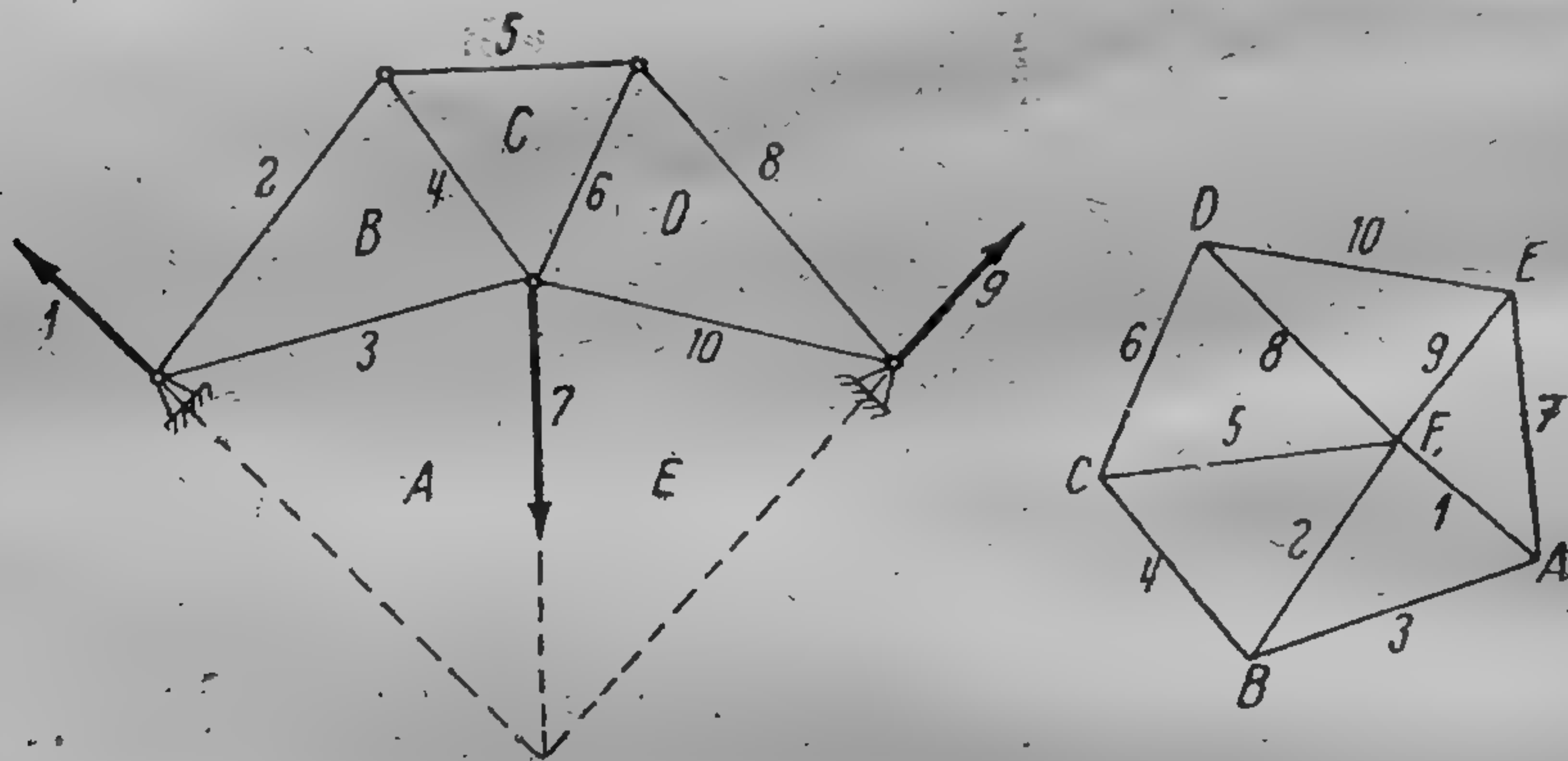


Fig. 135

lor reciproce impune respectarea unor reguli fără de care construcția se poate greși ușor. Vom lămuri aceste reguli numai pentru cazurile cele mai simple, cînd forțele aplicate și reacțiunile reazemelor sînt concurente sau paralele.

Să cercetăm grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 135. Asupra ei acționează forța  $\gamma$ , iar în reazeme se dezvoltă reacțiunile 1 și 9. Aceste trei forțe 1,  $\gamma$ , 9 trebuie să fie concurente deoarece se găsesc în echilibru. Să le prelungim pînă la punctul lor de concurență și să numerotăm toate laturile figurii care se obține. Putem considera această figură ca proiecția pe planul desenului a unei piramide a cărei bază este un pentagon determinat de laturile 1, 2, 5, 8, 9 iar muchiile laterale 3, 4, 6, 10, 7. Notăm baza acestei piramide prin  $F$  iar forțele laterale prin  $A, B, C, D, E$ . Problema constă în construirea unei figuri reciproce cu cea dată. Această figură reciprocă poate fi considerată și ca proiecția pe



planul desenului a unui poliedru ale cărui vîrfuri vor corespunde cu fețele celui dat, și invers. Cu alte cuvinte, de exemplu, fața *A* este formată de laturile 1, 3, 7; pe figura reciprocă în vîrfurile *A* trebuie să se întâlnească laturile paralele cu cele 1, 3, 7. Fața *F* este formată de laturile 1, 2, 5, 8, 9; în figura reciprocă, laturile paralele lor 1, 2, 5, 8, 9, trebuie să se întâlnească în vîrfurile *F*. Astfel, pentru construirea diagramei, în primul rînd trebuie să ne imaginăm care este poliedrul a cărui proiecție este figura dată și să-i notăm fețele prin litere. Prin aceleași litere trebuie să se noteze vîrfurile figurii reciproce în care se unesc laturile cu aceleași cifre.

Mai departe, trebuie construit poligonul forțelor date și al reacțiunilor și să notăm vîrfurile lui cu litere, așa cum s-a arătat mai sus, parcurgînd figura într-un anumit sens, de exemplu, în sensul acelor unui ceasornic. Dacă vom parcurge figura reprezentată pe desenul din stînga al fig. 135, în sensul acelor unui ceasornic, atunci după reacțiunea 1 vom întâlni reacțiunea 9, și apoi forța 7. Vom construi din aceste forțe un triunghi. Pentru a nota cu litere vîrfurile lui, vom observa că laturile 7 și 9 mărginesc fața *E*; de aceea, în figura reciprocă punctul de intersecție al laturilor 7 și 9 trebuie să fie notat prin *E*. În figura dată, laturile 1 și 7 mărginesc fața *A*; de aceea, în figura reciprocă, punctul de intersecție al laturilor 1 și 7 trebuie să fie notat prin *A*. În sfîrșit, 9 și 1 mărginesc fața *F*; de aceea în figura reciprocă, ultimul vîrf al triunghiului se va nota cu *F*.

Trecem apoi la acel nod al grinzii, unde se întîlnesc cel mult două bare cu eforturi necunoscute. Vom lua, de exemplu, nodul format de laturile 1, 2, 3. În figura reciprocă, aceste trei laturi trebuie să formeze un triunghi. O latură a acestui triunghi și anume latura 1 este cunoscută; ne sînt cunoscute și direcțiile celorlalte două laturi; deci construirea triunghiului este posibilă. Pentru a ști care latură va trece prin punctul *A*, și care prin *F*, vom observa că latura 3 mărginește fața *A* și latura 2 convingent fețele *F* și *B*. Prin urmare, prin punctul *A* va trece latura 3 și prin *F* va trece latura 2. Celălalt capăt al laturii 2 trebuie să fie notat prin litera *B*. În adevăr, fața *B* este mărginită de laturile 2 și 3; prin urmare, în figura reciprocă, punctul de intersecție al laturilor 2 și 3 trebuie să fie notat prin *B*. Astfel, s-a construit triunghiul *AFB* în figura reciprocă și s-a obținut un nou vîrf *B*. Vom porni de la el. Fața *B* este mărginită de laturile 2, 3, și 4; prin urmare, în figura reciprocă, prin punctul *B* trebuie să treacă și latura 4. De aceea vom duce prin *B* o dreaptă paralelă cu bara



4 a grinzii. Dar latura 4 mărginește pe lângă fața  $B$  și fața  $C$ ; de aceea pe figura reciprocă, latura 4 trebuie să treacă de asemenea și prin vârful  $C$ ; adică al doilea capăt al laturii 4 trebuie să fie notat cu litera  $C$ . Pentru determinarea acestui punct  $C$  vom observa că fața  $C$  este mărginită și de latura 5 care este totodată și o latură a poligonului  $F$ . În figura reciprocă, latura 5 trebuie să treacă prin  $F$  și  $C$ . Punctul  $F$  îl avem; prin urmare, ducând în diagrama reciprocă prin punctul  $F$  o dreaptă paralelă cu bara 5 a grinzii, la intersecția cu latura 4, vom găsi punctul  $C$ . Mai departe, exact prin același procedeu, vom determina pe latura 6

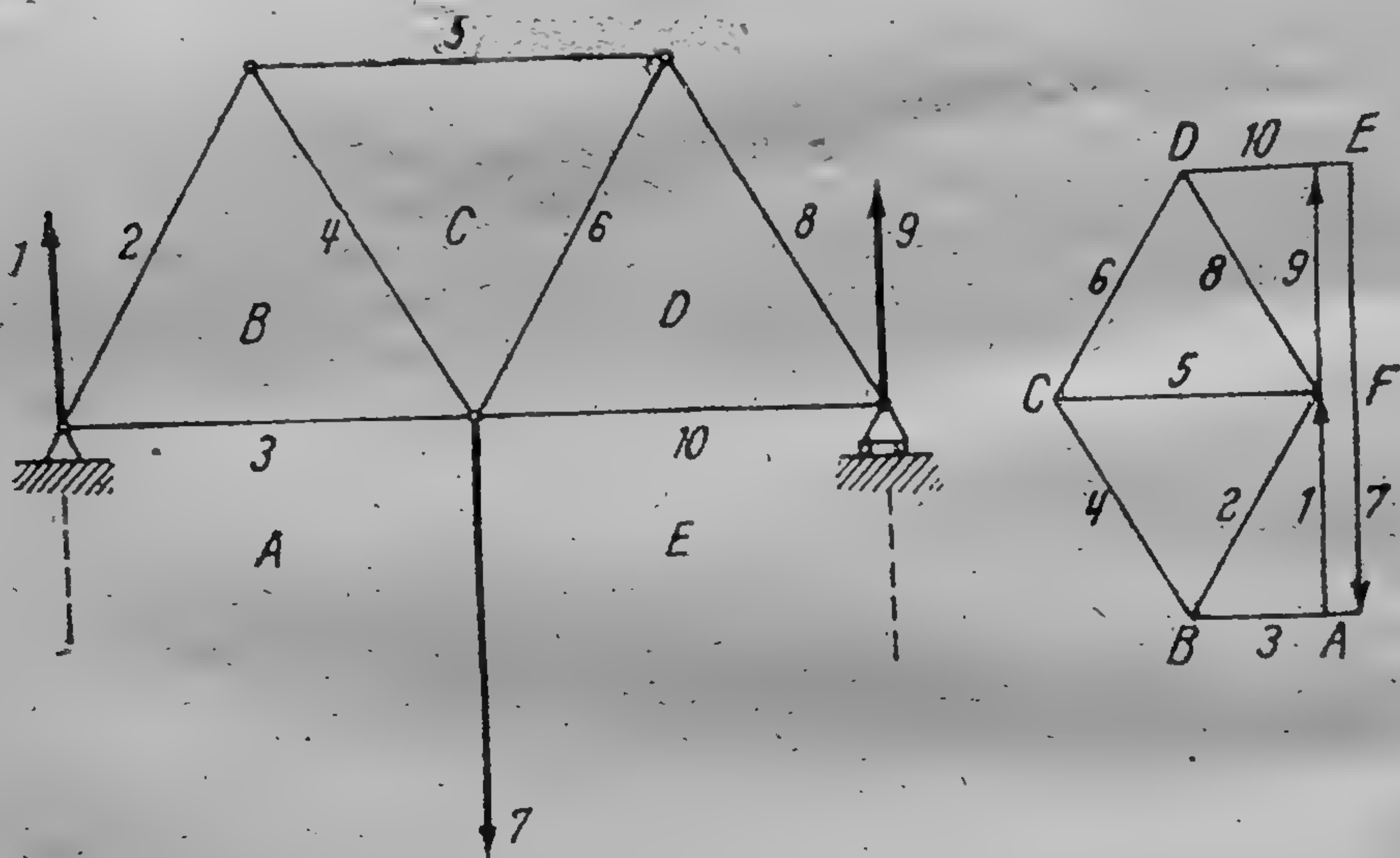


Fig. 136

un nou punct  $D$ , și apoi vom ajunge la punctul  $E$ . Precum se vede, construcția se execută într-o anumită ordine circulară. Astfel, pornind de la primul vîrf luat în poligonul forțelor (în exemplul dat de la vîrf  $A$ ), am construit celelalte poligoane ale forțelor, parcurgînd grinda într-un anumit sens.

Diagrama reciprocă obținută, reprezintă astfel, proiecția unei piramide pe planul desenului, cu vîrf  $F$  și cu baza  $ABCDE$ .

Mărimile eforturilor în toate barele grinzii ne sînt date prin lungimile laturilor acestei diagrame, măsurate la aceeași scară cu scara aleasă pentru reprezentarea forței date 7. Rămîne să se stabilească sensul eforturilor. Pentru aceasta, începem de la un nod al grinzii, la care este aplicată o forță cunoscută, de



exemplu forța 1. Din triunghiul  $AFB$  deducem că forța 2 are sensul de la  $F$  spre  $B$  iar forța 3 de la  $B$  spre  $A$ , adică bara 2 împinge nodul și este deci comprimată, iar bara 3 trage de nod fiind deci întinsă. Pentru determinarea sensului forțelor 4 și 5, vom apela la nodul unde se întâlnesc barele 2, 4, 5. Deoarece bara 2 apasă asupra nodului considerat cu o forță egală și opusă presiunii ei pe primul nod, rezultă că modificând în triunghiul  $BCF$  sensul forței 2, adică de la  $B$  spre  $F$ , vom determina sensul forței 5 de la  $F$  spre  $C$ , și a forței 4 de la  $C$  spre  $B$ . Prin urmare, bara 5 va fi comprimată, iar bara 4 întinsă. Schimbând sensul forței 5 în triunghiul  $CFD$ , adică în sensul de la  $C$  spre  $F$ , vom obține sensul forței 8 de la  $F$  spre  $D$  și a forței 6 de la  $D$  spre  $C$ , adică bara 8 va fi comprimată iar bara 6 întinsă. În sfârșit, schimbând sensul forței 8 în triunghiul  $DEF$ , adică în sensul de la  $D$  spre  $F$ , vom obține sensul forței 9 de la  $F$  spre  $E$  și al forței 10 de la  $E$  spre  $D$ . Prin urmare, bara 10 va fi întinsă, iar în ce privește sensul forței 9, acesta ne este cunoscut, iar rezultatul obținut poate servi ca verificare a raționamentului făcut. Vedem că sensul obținut pentru forța 9 de la  $F$  spre  $E$  nu conține pe cel stabilit anterior.

În cazul când forțele date și reacțiunile sînt paralele între ele, metoda nu diferă principial față de cazul precedent. Trebuie numai să ne imaginăm că punctul de concurență al forțelor s-a îndepărtat la infinit. Este evident că unele fețe se vor transforma în acest caz în benzi infinite. Pentru a ne imagina aceasta, deformăm grinda precedentă pînă ce obținem grinda reprezentată în fig. 136. Fețele  $A$  și  $E$  vor deveni atunci benzi infinite; de asemenea și baza  $F$  va deveni o fișie infinită mărginită de dreptele paralele 1, 9 și de segmentele 2, 5, 8. Construcția se face la fel ca și mai înainte, numai că triunghiul forțelor va deveni un segment rectiliniu  $AE$ , iar punctul  $F$  se va găsi pe acest segment între punctele  $A$  și  $E$ . Figura reciprocă obținută, poate fi considerată tot ca proiecția, pe planul desenului, a unei piramide pentagonale, al cărei vîrf se găsește în  $F$ , avînd de bază pentagonul  $ABCDEA$ , iar fața laterală reprezentată prin triunghiul  $FAE$  este perpendiculară pe planul desenului, așa că ea se proiectează pe acest plan, de-a lungul bazei  $AE$  al acestui triunghi  $FAE$ .

**Observație.** La aceste construcții ne-am servit de proprietatea semnalată de noi că figurile reciproce pot fi reprezentate



ca proiecții pe planul desenului a două poliedre care se găsesc într-un asemenea raport unul față de altul, încît fețele unuia corespund cu virfurile celuilalt și invers; laturile proiecțiilor sînt în acest caz paralele două cîte două. După cum a dovedit Maxwell, această proprietate este generală și poate fi demonstrată riguros. Pentru amănunte, cititorii vor consulta lucrarea citată a prof. V. L. Kirpicev „Bazele staticii grafice”. Vom limita expunerea metodei diagramelor reciproce numai la raționamentele precedente. Utilizarea ei la cazurile cînd forțele nu vor fi concurente sau paralele și orice alte amănunte se pot găsi în cursurile speciale de statică grafică și de statica construcțiilor.



# CINEMATICA

## CAPITOLUL XVI

### VITEZA UNUI PUNCT

§ 63. Sisteme de referință. Cuvântul *cinematică*, provine din grecescul „kinema” care înseamnă mișcare. Orice mișcare pe care o studiem este relativă, noi urmărim variația poziției corpului considerat în raport cu un solid oarecare, care în acest caz constituie sistemul de referință. Mișcarea în cinematică se studiază fără a ține seama de forțe și mase, iar ca sistem de referință se poate lua oricare solid, în raport cu care vrem să studiem mișcarea. Prin urmare, doi observatori care se servesc de două sisteme de referință diferite, vor descrie mișcarea oarecare a aceluiasi obiect material, în general, în mod diferit, și din punct de vedere al cinematicii, ambii observatori vor avea deopotrivă dreptate. În acest fel, rămânând numai în domeniul cinematicii, nu se poate stabili un singur sistem de referință absolut. Totuși căutarea unui sistem de referință absolut, a fost obiectul unor cercetări științifice susținute care ies însă din domeniul cinematicii.

În mecanica clasică se consideră imobil, sistemul inerțial de axe de coordonate ales în mod convențional printre alte sisteme inerțiale; deplasarea în raport cu acest sistem de axe coordonate, se numește *mișcare absolută*, iar deplasarea în raport cu orice alt sistem de axe de coordonate care nu sînt solidar legate de sistemul inerțial dat, se numește *mișcare relativă*. În acest curs de mecanică teoretică ne vom ocupa mai ales de mișcarea absolută. După cum vom vedea, pentru aplicațiile practice de pe pămînt putem alege în majoritatea cazurilor drept sistem imobil de axe de coordonate un sistem de axe de coordonate legate invariabil de suprafața pămîntului fără ca erorile să fie importante; numai în cazuri excepționale sîntem nevoiți să ținem cont de rotația pămîntului în jurul axei sale, iar mișcarea pămîntului în jurul soarelui nu influențează practic aplicațiile tehnice ale mecanicii teoretice.



În studiul mișcării punctului se poate cerceta atât mișcarea unui punct material, cit și mișcarea unui punct geometric luat într-un solid oarecare. Deoarece descrierea elementelor mișcării ambelor puncte vor fi în multe cazuri asemănătoare, în expunerea cinematicii vom întrebuința în general cuvîntul „punct” fără adăugarea cuvintelor „material” sau „geometric”, afară de cazurile cînd noțiunea de „punct” va impune precizări.

§ 64. Ecuatiile mișcării și traiectoria unui punct. Vom considera un punct oarecare fix din spațiu  $O$  și vom lua sistemul fix de axe coordonate  $Oxyz$ , cu originea în acest punct. Fie  $A$  un punct mobil care descrie în mișcarea sa o curbă oarecare  $(C)$ ; această curbă  $(C)$  se numește *traiectoria punctului*. În funcție de forma curbei  $(C)$ , mișcarea punctului va putea fi: *rectilinie* sau *curbilinie*. Unim punctul fix  $O$  cu punctul mobil  $A$  prin *vectorul de poziție*  $\vec{r} = \vec{OA}$ ; este evident că prin mișcarea punctului  $A$ , vectorul de poziție  $\vec{r}$  își va schimba în fiecare moment, în general, atât modulul său cit și direcția sa. Variația direcției vectorului de poziție  $\vec{r} = \vec{OA}$  va fi cunoscută dacă vom cunoaște modul cum variază unghiurile formate de vectorul de poziție  $\vec{r}$  cu axele  $Oxyz$ . Prin urmare, vectorul de poziție  $\vec{r}$  este funcție de timpul  $t$ , adică:

$$\vec{r} = \vec{f}(t). \quad (16.1)$$

Egalitatea (16.1) se numește *ecuația vectorială a mișcării punctului*. Introducem vectorii unitarii  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  și  $\vec{k}$ ; atunci

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$\vec{f}(t) = \vec{i}f_1(t) + \vec{j}f_2(t) + \vec{k}f_3(t).$$

Introducînd aceste expresii ale lui  $\vec{r}$  și  $\vec{f}(t)$  în ecuația (16.1) vom obține:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

Dacă punctul  $A$  prin mișcarea sa rămîne tot timpul în același plan, atunci luînd acest plan drept plan  $Oxy$ , vom avea în locul ecuațiilor (16.2),

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad (16.3)$$



Ecuatiile (15.2) și (16.3) se numesc *ecuații scalare ale mișcării punctului*; dând timpului  $t$  diferite valori, vom obține valorile corespunzătoare ale coordonatelor punctului mobil și astfel vom putea cunoaște în orice moment poziția punctului mobil și cu aceste puncte să construim traiectoria lui ( $C$ ). De aici se vede că ecuațiile (16.2) și (16.3) se pot considera ca ecuații parametrice ale traiectoriei ( $C$ ) a punctului  $A$ , iar parametrul este reprezentat prin timpul  $t$ .

Pentru a obține ecuațiile traiectoriei în forma analitică obișnuită, este suficient să eliminăm timpul  $t$  din ecuațiile (16.2), sau din ecuațiile (15.3).

Observăm, că traiectoria punctului și curba pe care se mișcă punctul, pot să difere între ele. Astfel, dacă punctul descrie o singură dată un cerc sau o porțiune de cerc, în acest caz traiectoria punctului și curba de mișcare a punctului, coincid între ele. În caz că punctul descrie același cerc de mai multe ori, cercul este curba de mișcare a punctului, iar traiectoria punctului va fi același cerc, însă repetat de mai multe ori.

Să examinăm câteva exemple. Fie mișcarea unui punct de-a lungul unei drepte pe care o vom lua drept axă absciselor  $Ox$ , dată prin ecuația:

$$x = a \sin(kt + \epsilon), \quad (16.4)$$

în care  $a$ ,  $k$  și  $\epsilon$  sunt constante. Mișcarea determinată prin ecuația (16.4) se numește *mișcare oscilatorie armonică*. Deoarece sinusul variază de la  $-1$  până la  $+1$ , abscisa  $x$  a punctului variază în limitele  $-a \leq x \leq +a$ , adică punctul în mișcare sa descrie tot timpul un segment de dreaptă de lungime  $2a$  al cărui mijloc se găsește în  $O$ . Constanta  $a$  se numește *amplitudinea mișcării*. Din (16.4) rezultă că pentru  $t=0$ , abscisa punctului mobil va fi egală cu  $a \sin \epsilon$ ; astfel,  $\epsilon$  determină poziția punctului în momentul  $t=0$ . Această constantă  $\epsilon$  se numește *faza inițială*. Fie  $T$  un interval de timp constant. Să considerăm momentele  $t$  și  $t+T$ ; momentului  $t$ , după formula (16.4) îi vor corespunde abscisa punctului egală cu  $a \sin(kt + \epsilon)$ , iar momentului  $t+T$  îi va corespunde după formula (16.4) abscisa punctului egală cu:

$$a \sin[k(t+T) + \epsilon] = a \sin(kt + \epsilon + kT).$$

Presupunem, că  $kT = 2\pi$ ; atunci, din cauza periodicității funcției sinus, abscisa punctului, corespunzătoare momentului  $t+T$ , va fi egală cu abscisa punctului corespunzătoare momentu-



lui  $t$  și după intervalul de timp  $T$  mișcarea punctului se repetă identic. De aceea mișcarea oscilatorie armonică este o *mișcare periodică*, iar intervalul de timp  $T$  se numește *perioadă*; din relația  $kT = 2\pi$  obținem:

$$T = \frac{2\pi}{k}; \quad (16.5)$$

$k$  se numește *pulsație*. Din formula (16.5) urmează că pulsația  $k$  este egală cu

$$k = \frac{2\pi}{T}.$$

Cu cât pulsația  $k$  va fi mai mare, cu atât perioada  $T$  va fi mai mică, adică cu atât mișcarea se va repeta mai des. Înlocuind pulsația  $k$  cu expresia ei în funcție de perioada  $T$ , putem scrie, formula (16.4) sub forma:

$$x = a \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + \varepsilon \right). \quad (16.4')$$

Observăm, că dacă  $\varepsilon = 0$  sau  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ , atunci formulele (16.4) și (16.4') vor deveni:

$$x = a \sin kt = a \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \quad (\varepsilon = 0)$$

$$x = a \cos kt = a \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \quad \left( \varepsilon = \frac{\pi}{2} \right).$$

Mișcarea oscilatorie armonică se întâlnește în natură în fenomenele cele mai variate.

În mișcarea oscilatorie armonică, traiectoria punctului este un segment de dreaptă de lungime  $2a$  cu centrul în punctul  $O$ . Să examinăm acum mișcarea punctului  $A$  în planul  $Oxy$ , dată prin ecuațiile

$$x = R \cos kt, \quad y = R \sin kt \quad (16.6)$$

Ca să eliminăm timpul, ridicăm la pătrat ambele ecuații și le adunăm vom obține:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Astfel, traiectoria punctului  $A$  este circumferința  $(C)$ , descrisă cu centrul în originea coordonatelor, cu raza egală cu  $R$  (fig. 137). Din fig. 137, rezultă că, dacă  $\angle AOx = kt$ , adică dacă unghiul  $AOx$  va crește proporțional cu timpul  $t$ , atunci vom obține formulele (16.6), adică punctele  $B$  și  $C$  vor avea mișcări oscila-



torii armonice, determinate prin formulele (16.6), respectiv de-a lungul axei  $Ox$  și de-a lungul axei  $Oy$ . Este evident, că mișcarea punctului  $A$  este periodică și perioada  $T$ , adică intervalul de timp între două treceri consecutive ale punctului  $A$  prin același punct al cercului, este egală cu

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Deoarece  $\widehat{KA} = Rkt$ , mișcarea punctului  $A$  pe circumferința  $(C)$  va fi uniformă.

Observăm că ecuațiile (16.2) și (16.3) nu ne dau numai traiectoria, ci determină și caracterul mișcării punctului de-a lungul ei. În adevăr, să examinăm două sisteme de ecuații:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos kt, \\ y &= R \sin kt; \end{aligned} \right\} \text{ (I)}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= R \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y &= R \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned} \right\} \text{ (II)}$$

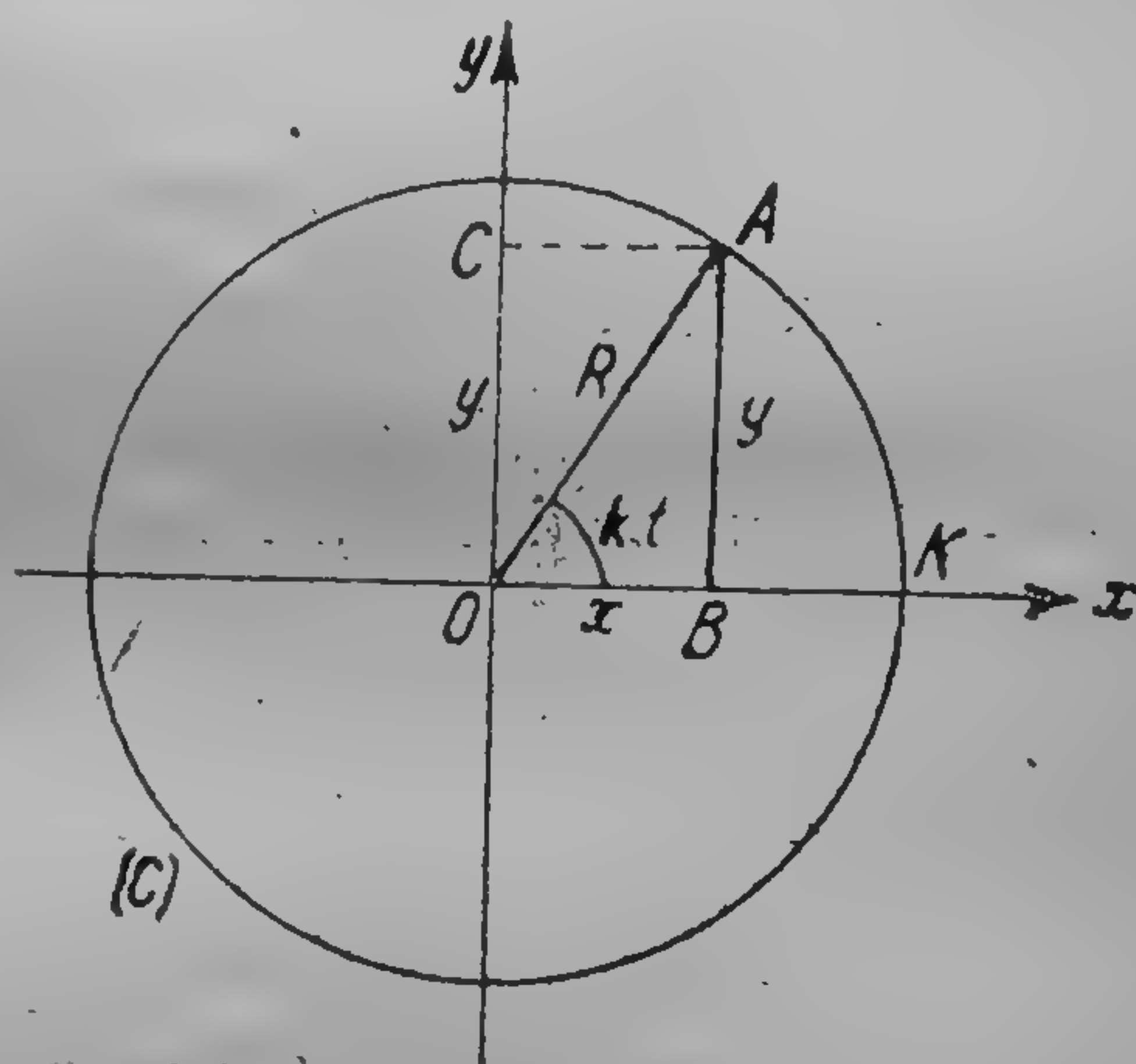


Fig. 137

Din ambele sisteme de ecuații obținem  $x^2 + y^2 = R^2$ , și pentru  $t=0$ , pentru ambele mișcări vom avea  $x=R$ ,  $y=0$ ; dar egalitățile  $x=0$  și  $y=R$  pentru primul sistem de ecuații vor avea loc când  $kt = \frac{\pi}{2}$ , iar pentru al doilea sistem, când  $t = \infty$ . Astfel, și într-un caz și într-altul, punctul se mișcă pe cercul  $x^2 + y^2 = R^2$ , dar în prima mișcare punctul parcurge un sfert de cerc, în intervalul de timp  $\frac{\pi}{2k}$ , iar în cea de-a doua mișcare, punctul va parcurge același drum, într-un interval de timp infinit de mare.

Să mai examinăm mișcarea dată prin ecuațiile:

$$x = a \cos kt, \quad y = b \sin kt. \quad (16.7)$$



Pentru a elimina timpul  $t$  vom împărți prima ecuație cu  $a$  și a doua cu  $b$ , vom ridica la pătrat și apoi adunând vom avea:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vedem că traiectoria punctului este o elipsă cu semiaxele  $a$  și  $b$ ; mișcarea este periodică cu perioada egală cu  $\frac{2\pi}{k}$ .

În sfârșit, fie mișcarea punctului în planul  $Oxy$ , dată prin ecuația vectorială:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \sin kt + \bar{C}_2 \cos kt. \quad (16.8)$$

Luăm:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y, \quad \bar{C}_1 = \bar{i}a_1 + \bar{j}b_1, \quad \bar{C}_2 = \bar{i}a_2 + \bar{j}b_2,$$

unde  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , sînt constante. De aici obținem:

$$x = a_1 \sin kt + a_2 \cos kt, \quad y = b_1 \sin kt + b_2 \cos kt.$$

Pentru eliminarea timpului  $t$ , vom rezolva aceste ecuații în raport cu  $\sin kt$  și  $\cos kt$ ; vom obține:

$$\sin kt = \frac{b_2 x - a_2 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \cos kt = \frac{b_1 x - a_1 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Ridicînd la pătrat și adunînd, vom obține:

$$(b_1 x - a_1 y)^2 + (b_2 x - a_2 y)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

Aceasta este ecuația unei curbe de gradul doi care nu are puncte la infinit, adică o elipsă. Cînd  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$  avem:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = k_1, \quad \text{adică } b_1 = k_1 a_1, \quad b_2 = k_1 a_2,$$

și vom obține:

$$y = b_1 \sin kt + b_2 \cos kt = k_1 (a_1 \sin kt + a_2 \cos kt) = k_1 x,$$

adică traiectoria punctului este dreapta  $y = k_1 x$ .

Să examinăm acum mișcarea unui punct în spațiu. Fie dată mișcarea unui punct, prin ecuația vectorială:

$$\bar{r} = \bar{k}_1 t + \bar{r}_0. \quad (16.9)$$



Introducând vectorii unitari  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , avem:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \quad \bar{k}_1 = \bar{i}l + \bar{j}m + \bar{k}n, \quad \bar{r}_0 = \bar{i}x_0 + \bar{j}y_0 + \bar{k}z_0;$$

introducând aceste expresii în formula (16.9), obținem:

$$x = lt + x_0, \quad y = mt + y_0, \quad z = nt + z_0; \quad (16.10)$$

de aici vom avea:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Vedem că traiectoria punctului este dreapta care trece prin punctul  $(x_0, y_0, z_0)$ , având coeficienții unghiulari, proporționali cu cantitățile  $(l, m, n)$ . La același rezultat putem ajunge direct, din ecuația vectorială (16.9). În adevăr, pentru  $t=0$ , avem  $\bar{r} = \bar{r}_0$ ; adăugând vectorului  $\bar{r}_0$  vectorul  $\bar{k}_1 t$  constant ca direcție dar al cărui modul variază proporțional cu timpul  $t$ , după cum se arată în fig. 138, vom obține traiectoria rectilinie a punctului A. Deoarece cantitatea  $k_1 t$  crește proporțional cu timpul  $t$ , mișcarea punctului A pe traiectoria lui va fi uniformă. Să mai examinăm și mișcarea unui punct, determinată de ecuațiile:

$$x = R \cos kt, \quad y = R \sin kt, \quad z = h \frac{kt}{2\pi}. \quad (16.11)$$

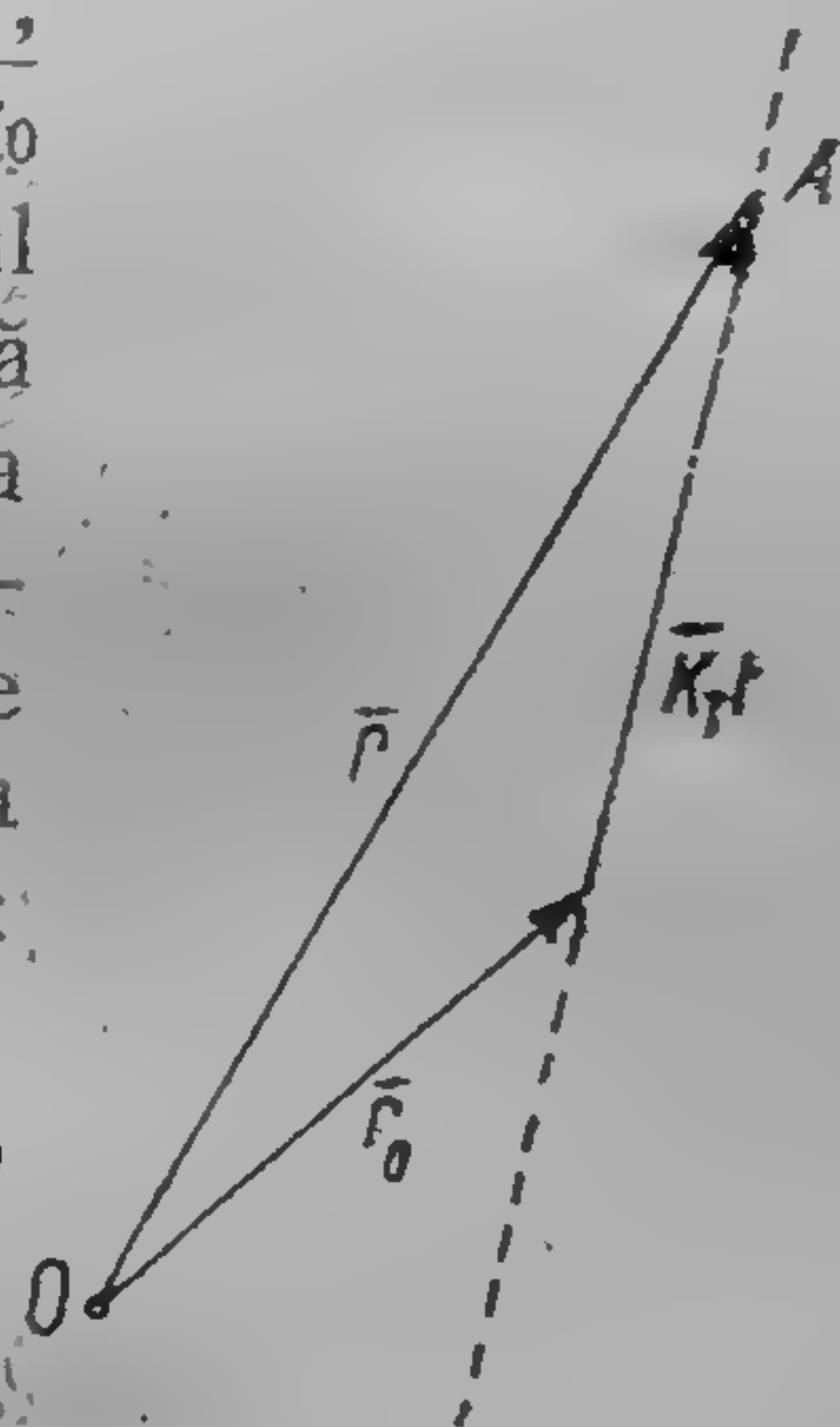


Fig. 138

Pentru a găsi traiectoria punctului, s-ar fi putut determina  $t$  din ecuația a treia, introducând valoarea lui în primele două ecuații și apoi cercetând cele două ecuații obținute; este însă mai simplu procedeul următor: se ridică primele două ecuații la pătrat și se adună rezultatele; obținem:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

De aici rezultă că punctul în mișcare va rămâne tot timpul pe un cilindru circular drept cu raza cercului de bază egală cu  $R$  și cu axa care coincide cu axa  $Oz$  (fig. 139). Pentru  $t=0$  avem  $x=R$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ , adică punctul mobil se găsește în punctul  $B_1$  în planul  $Oxy$ , în punctul în care direcția pozitivă a axei  $Ox$  intersectează cilindrul. Cu creșterea timpului  $t$  de la zero, coordonata  $x$  va



începe să scadă, iar coordonatele  $y, z$  vor începe să crească, adică punctul mobil va porni pe suprafața cilindrului așa cum se arată prin săgeata din fig. 139. Pentru valoarea  $t=T$ , iar  $kT=2\pi$ , vom obține  $x=R, y=0, z=h$ , adică punctul mobil se va găsi pe aceeași generatoare a cilindrului ca în momentul inițial, dar se va găsi la distanța  $h$  de planul  $Oxy$  ajungând în punctul  $B_2$ , unde  $B_1B_2=h$ . Vedem că punctul considerat se va mișca pe o linie

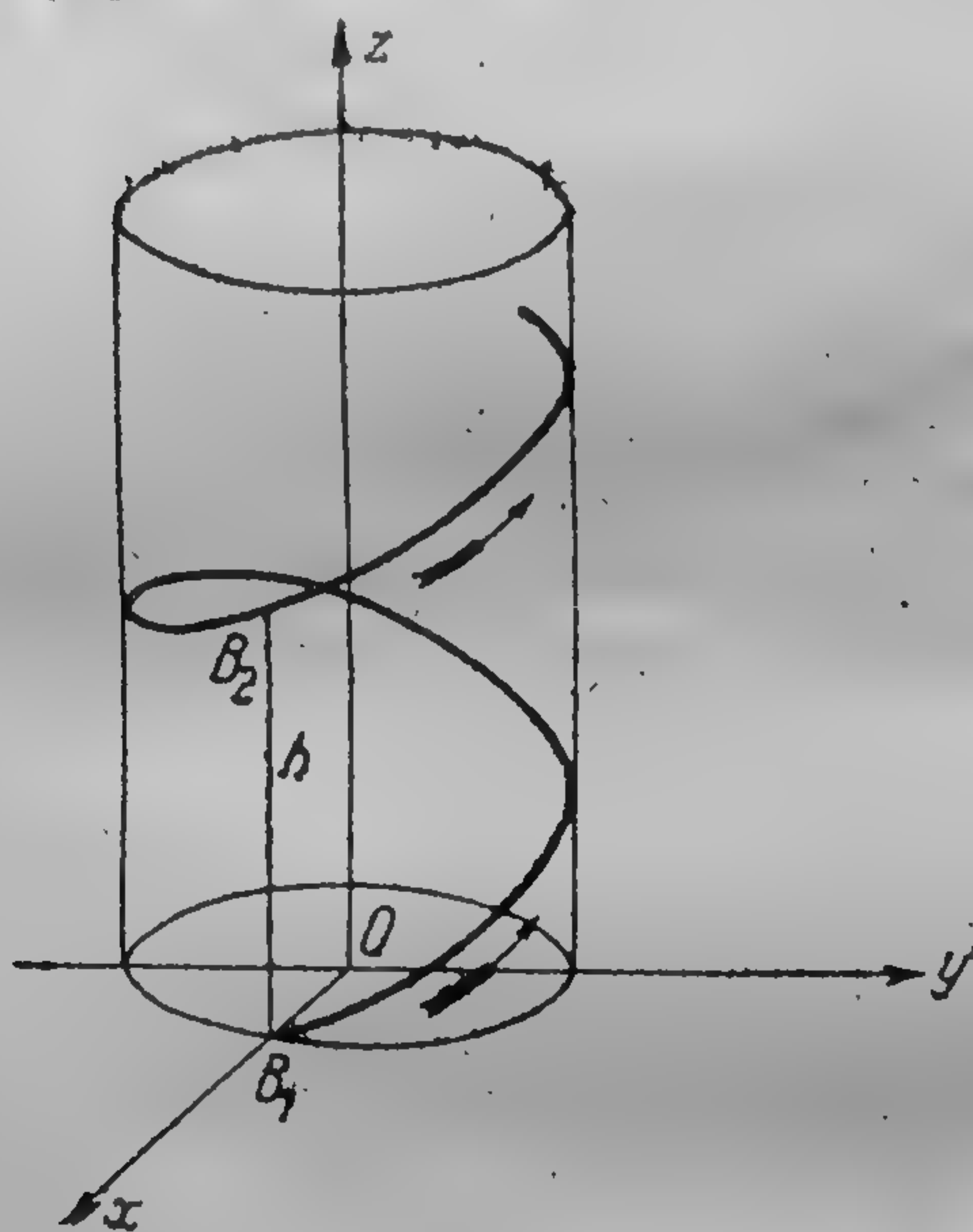


Fig. 139

elicoidală trasată pe cilindrul circular drept, iar după fiecare interval de timp  $T=2\pi$ , punctul va reveni pe generatoarea inițială, însă într-o nouă poziție, la distanță  $h$  față de vechea poziție. Astfel, traiectoria punctului este o elice circulară cu pasul  $h$ .

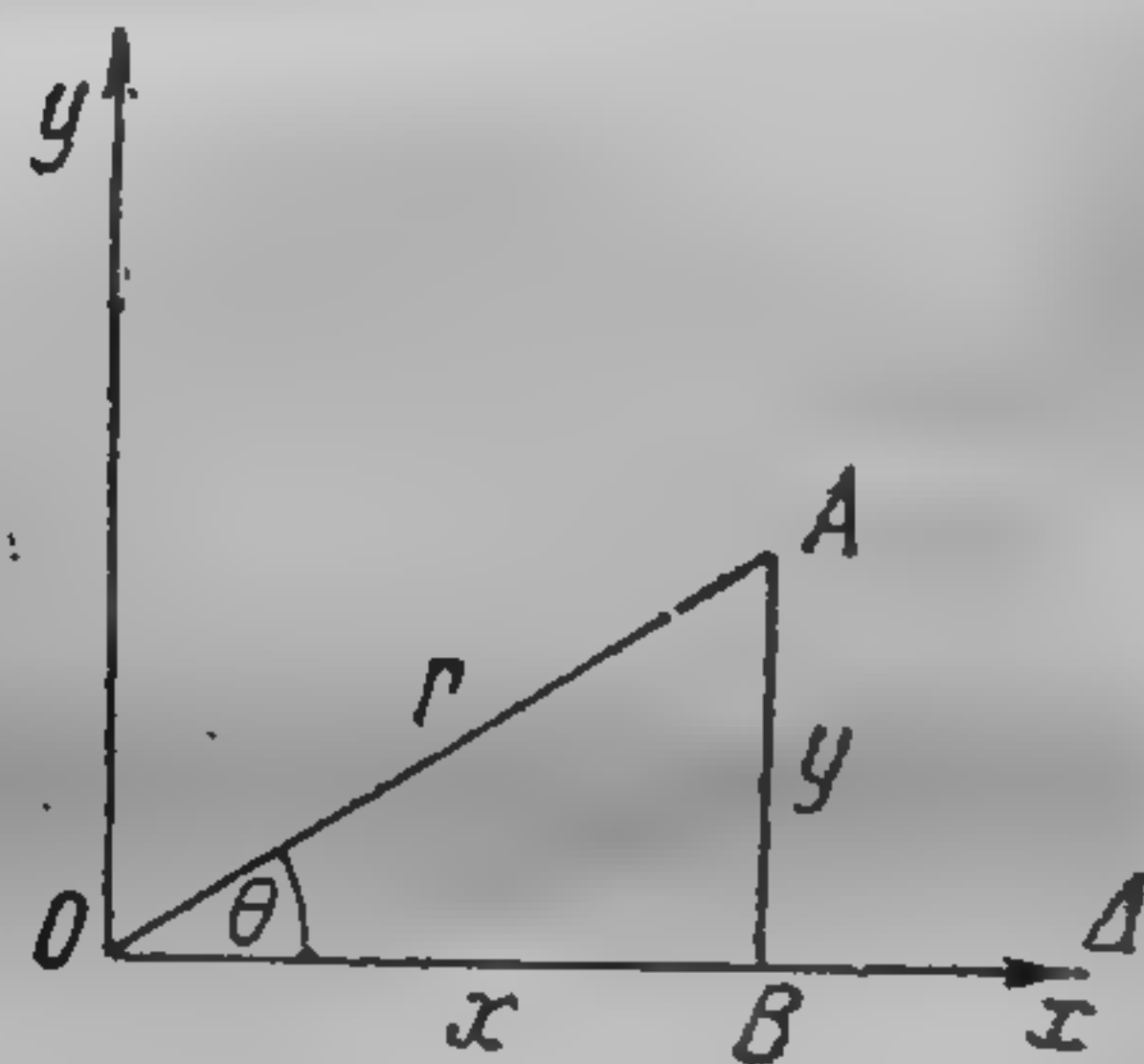


Fig. 140

Este evident că ecuațiile mișcării punctului se pot reprezenta nu numai prin coordonate ortogonale, ci și prin alte coordonate. Vom studia aici cazul coordonatelor polare în plan. Să presupunem că punctul mobil se deplasează într-un plan oarecare. Luăm în acest plan un punct fix  $O$  și ducem din el o semidreaptă fixă  $\Delta$ ; punctul  $O$  se numește *pol*. Vom determina poziția oricărui punct din acest plan prin raza vectorie  $r=OA$  și prin unghiul  $\theta$ , format de raza-vectorie  $AO$  cu dreapta  $\Delta$ ; pentru a obține toate punctele din plan, este suficient ca mărimea  $r$  să varieze de la  $0$  până la  $\infty$ , unghiul  $\theta$  de la  $0$  până la  $2\pi$ . Vom observa că raza vectorie  $r=OA$ , nu este vectorul de poziție  $\vec{r}$  ci modulul vectorului de poziție  $\vec{r}$ . Pentru a stabili legătura dintre coordonatele



polare  $(r, \theta)$  și cele ortogonale  $(x, y)$ , vom lua punctul  $O$  ca origine a sistemului ortogonal de axe coordonate  $Oxy$ , iar direcția pozitivă a axei  $Ox$  o vom suprapune peste semidreapta  $\Delta$  (fig. 140). Coborîm din punctul  $A$  o perpendiculară pe axa  $Ox$ ; din triunghiul  $OAB$  avem:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad (16.12)$$

de aici obținem ușor:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (16.13)$$

Cu ajutorul formulelor (16.12) se poate transforma orice expresie din coordonate ortogonale într-o expresie în coordonate polare iar cu ajutorul formulelor (16.13) se poate rezolva problema inversă. Să presupunem, de exemplu, că mișcarea punctului ni se dă prin ecuațiile:

$$r = at, \quad \theta = bt; \quad (16.14)$$

eliminînd timpul  $t$ , găsim:

$$r = k \theta \quad \left( k = \frac{a}{b} \right) \quad (16.15)$$

După ecuația (16.15) nu este greu de construit traiectoria punctului mobil. În adevăr, dînd unghiului  $\theta$  valorile  $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ , vom obține pentru  $r$  valorile  $0, k\alpha, 2k\alpha, 3k\alpha, \dots$ . Vedem că mișcarea punctului are loc pe o spirală care pornește din originea coordonatelor; această spirală se numește *spirală lui Arhimede*. Este ușor să ne convingem că mișcarea punctului care se determină prin ecuațiile:

$$r = r_0 e^{mt}, \quad \theta = nt, \quad (16.16)$$

unde mărimile  $r_0, m$  și  $n$  sînt constante, are loc de asemenea pe o spirală; această spirală se numește *spirală logaritmică*.

Coordonatele ortogonale nu sînt totdeauna cele mai comode pentru orice problemă. De exemplu, studiul mișcării (16.14) pe *spirală lui Arhimede* este mai simplu în coordonate polare decît în cele ortogonale, deoarece după formulele (16.13) relațiile simple (16.14) și (16.15) devin în coordonate ortogonale mai complicate:

$$x = at \cos bt, \quad y = at \sin bt, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = k \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right).$$



Pentru studiul coordonatelor polare în spațiu vom lua un sistem ortogonal de axe de coordonate  $Oxyz$ . Dintr-un punct oarecare  $A$  din spațiu vom coborî perpendiculara  $AB$  pe planul  $Oxy$ , vom duce segmentul  $OB$  și din punctul  $B$  vom coborî perpendicularele

$BC$  și  $BD$  pe axele  $Ox$  și  $Oy$  (fig. 141). Coordonatele polare ale punctului  $A$  sînt

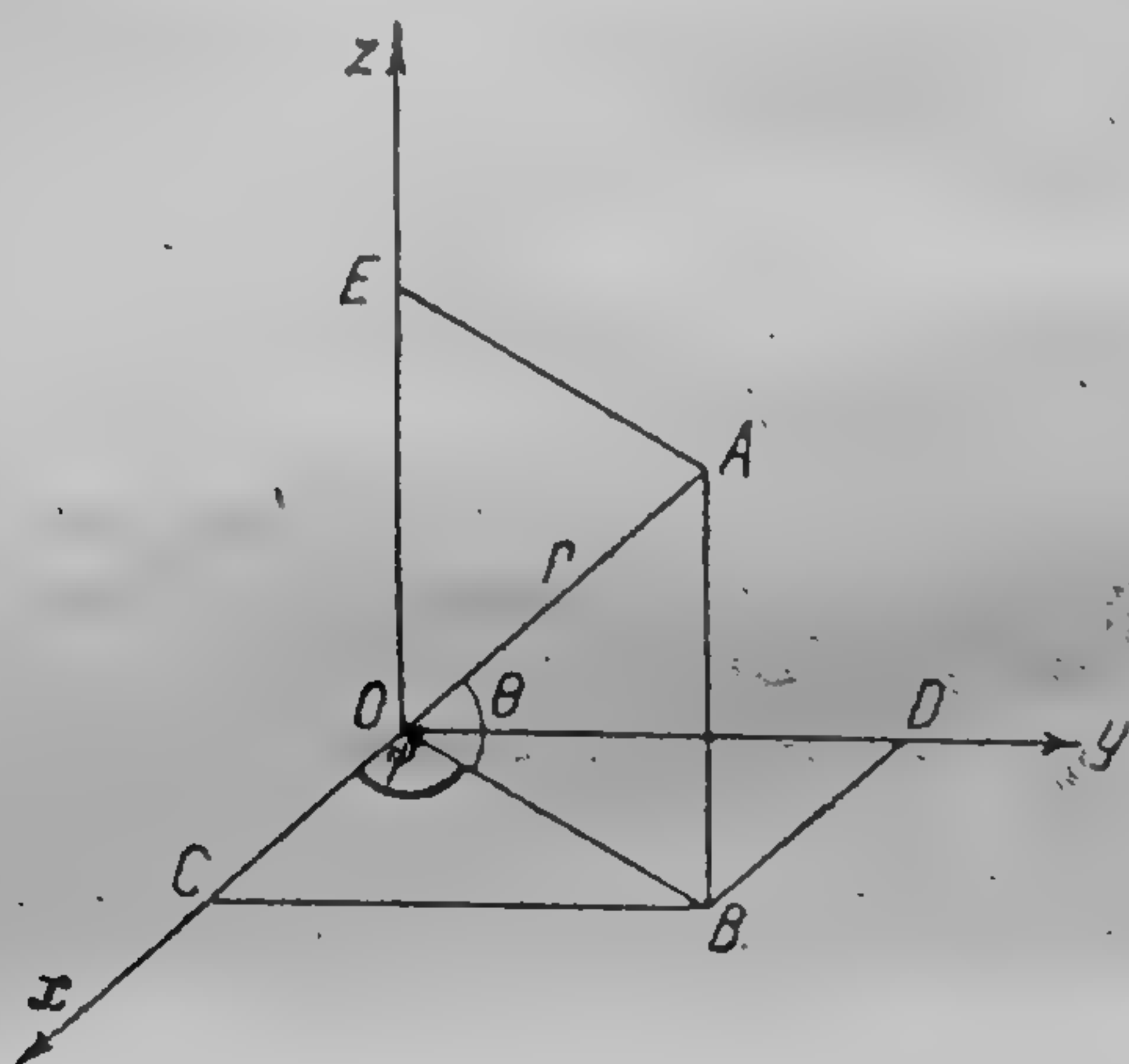


Fig. 141

$$r = OA, \quad \theta = \angle AOB,$$

$$\varphi = \angle xOB$$

Pentru a obține toate punctele din spațiu este suficient ca raza  $r$  să varieze de la 0 la  $\infty$ , unghiul  $\theta$ , de la  $-\frac{\pi}{2}$  la  $\frac{\pi}{2}$ , unghiul  $\varphi$  de la 0 la  $2\pi$ .

Unghiul  $\theta$  este analog cu latitudinea geografică, unghiul  $\varphi$  cu longitudinea geografică, iar planul  $Oxy$  este analog cu planul ecuatorial și semiplanul  $Oxz$ , unde  $x > 0$  este analog cu semiplanul primului meridian. Coordonatele ortogonale ale punctului  $A$  vor fi:

$$x = OC = DB, \quad y = OD = CB, \quad z = OE = BA.$$

Deoarece  $OB = OA \cos \theta = r \cos \theta$  obținem

$$OC = OB \cos \varphi = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$OD = OB \sin \varphi = r \cos \theta \sin \varphi,$$

adică

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta \quad (16.17)$$

Cu ajutorul formulelor (16.17) se poate transforma o relație exprimată în coordonate ortogonale  $(x, y, z)$  într-una exprimată în coordonate polare  $(r, \theta, \varphi)$ . Din formulele (16.17) avem:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{z^2}{x^2 + y^2} = \operatorname{tg}^2 \theta,$$



adică

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \\ \operatorname{tg} \Theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \Theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16.18)$$

De exemplu, din ecuațiile (16.11) obținem:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + h^2 \frac{k^2 t^2}{4\pi^2}.$$

De aceea:

$$r = \sqrt{R^2 + h^2 \frac{k^2 t^2}{4\pi^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} kt, \quad \operatorname{tg} \Theta = h \frac{kt}{2\pi R},$$

sau

$$r = \sqrt{R^2 + h^2 \frac{k^2 t^2}{4\pi^2}}, \quad \varphi = kt, \quad \operatorname{tg} \Theta = h \frac{kt}{2\pi R}.$$

Vedem că transformarea ecuațiilor de mișcare (16.11) în coordonate polare nu prezintă nici un avantaj în acest caz.

Dacă traiectoria punctului este cunoscută, vom cunoaște caracterul mișcării punctului, dacă vom cunoaște lungimea arcului de curbă parcurs de punct în funcție de timpul  $t$ . Și anume, fie  $s$  lungimea arcului parcurs de punct pe traiectoria lui, măsurată de la un punct oarecare fix al traiectoriei; este evident că putem determina mișcarea punctului pe traiectoria lui prin relația

$$s = f(t) \quad (16.19)$$

Formula (16.19) poate fi reprezentată grafic, măsurînd timpul pe axa absciselor, iar spațiul  $s$  pe axa ordonatelor sau invers. Astfel de grafice se folosesc în transporturi.

Fie punctul  $O$  un punct fix în spațiu; luăm punctul  $O$  ca origine a unui sistem de referință absolută. Fie punctul  $A$  determinat prin vectorul de poziție  $\vec{r}_A = \vec{OA}$ ; deoarece punctul  $A$  este mobil, vectorul de poziție  $\vec{r}_A$  este în funcție de timpul  $t$ .

Luăm punctul  $A$  ca originea unui al doilea sistem de referință mobil, ale cărui axe, în timpul deplasării sale, rămîn paralele cu axele sistemului fix. Să considerăm și punctul  $C$  determinat de vectorul de poziție  $\vec{r} = \vec{AC}$ , unde vectorul  $\vec{r}$  este funcție de timpul  $t$ . Notînd vectorul de poziție  $\vec{OC}$  prin  $\vec{\rho}$ , avem:

$$\vec{\rho} = \vec{r}_A + \vec{r}. \quad (16.20)$$



Deoarece axele sistemului fix și mobil sînt paralele între ele, unghiurile formate de vectorul de poziție  $\vec{r}$  cu axele mobile de coordonate vor fi respectiv egale cu unghiurile formate de vectorul  $\vec{r}$  cu axele de coordonate fixe.

Dacă, lăsînd în relația (16.20) vectorul  $\vec{r}$  constant ca modul și direcție, vom varia numai vectorul  $\rho_A$ , punctul  $C$  va avea o mișcare identică cu mișcarea punctului  $A$ , iar traiectoria punctului  $C$  se obține din traiectoria punctului  $A$ , prin deplasarea acesteia din urmă cu distanța  $\vec{r}$  ca și cum ar fi o curbă rigidă. Vedem că în acest caz mișcarea sistemului mobil de axe de coordonate

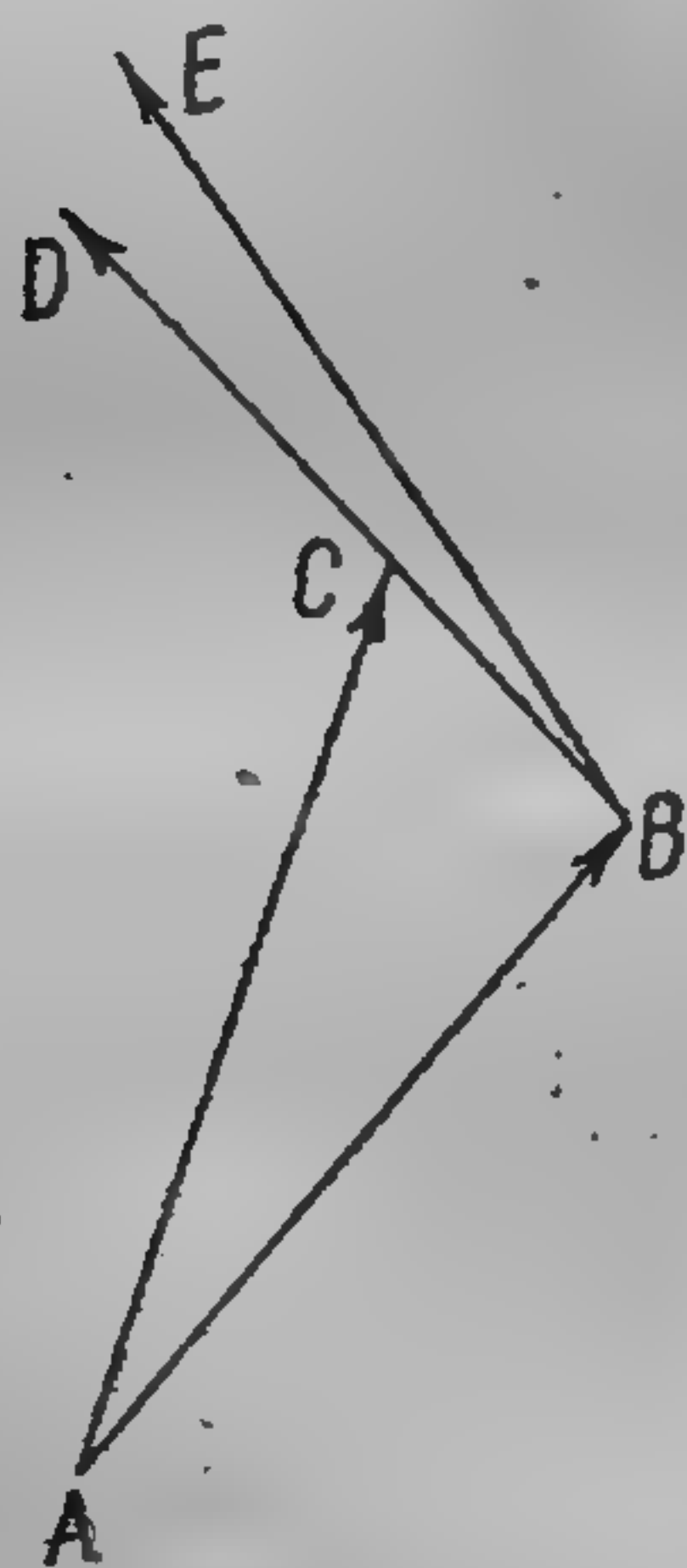


Fig. 142

care are originea în punctul  $A$ , mută sau transportă punctul  $C$  fixat de axele mobile de coordonate. Această mișcare a punctului  $C$  se numește *mișcare de transport*. Dacă însă vectorul  $\rho_A$  va fi constant și va varia vectorul  $r$ , atunci axele de coordonate mobile paralele la axele fixe cu originea în punctul  $O$ , vor deveni și ele fixe și punctul  $C$  se va mișca în raport cu aceste axe de coordonate. Această mișcare a punctului  $C$  se numește *mișcare relativă*. Dacă ambele mărimi  $\rho_A$  și  $r$  vor varia, atunci conform relației (16.20) punctul  $C$  va lua parte concomitent la ambele mișcări, cea de transport și cea relativă; mișcarea punctului  $C$  obținută prin aceasta se numește *mișcarea complexă sau compusă*. Ambele mișcări, de transport și relativă se numesc *mișcări componente*.

Operația de obținere a mișcării compuse pe baza mișcărilor componente, se numește *compunerea mișcărilor*.

§ 65. Derivata unui vector în raport cu un scalar. Fie dat vectorul  $\vec{s}$  a cărui direcție și modul depinde de un parametru scalar  $t$ ; în acest caz vectorul este funcție vectorială de variabila independentă  $t$ .

Să presupunem că pentru o valoare oarecare  $t$  a parametrului, vectorul  $\vec{s}$  capătă valoarea  $\vec{s} = \overline{AB}$  (fig. 142), iar pentru valoarea  $t = \Delta t$  a parametrului vectorul considerat își va schimba modulul și direcția sa, căpătînd valoarea  $\vec{s}_1 = \overline{AC}$ .



Deoarece avem  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ , presupunînd că  $\overline{BC} = \Delta \overline{s}$ , vom obține  $\overline{AC} = \overline{s} + \Delta \overline{s}$ ; este evident că mărimea  $\Delta \overline{s}$  este un vector. Vectorul  $\Delta \overline{s}$  se numește *creșterea* vectorului  $\overline{s}$ . Să găsim raportul dintre această creștere geometrică și creșterea variabilei independente:

$$\frac{\Delta \overline{s}}{\Delta t};$$

pentru a calcula acest raport, vom observa că avem  $\Delta \overline{s} = \overline{BC} = (\overline{BC})^0 BC$  unde  $(\overline{BC})^0$  este vectorul unitar care are direcția vectorului  $\overline{BC}$ . De aceea găsim:

$$\frac{\Delta \overline{s}}{\Delta t} = (\overline{BC})^0 \frac{BC}{\Delta t} = (\overline{BC})^0 BD = \overline{BD}.$$

Vom micșora neconținut  $\Delta t$ ; atunci și scalarul  $BC$  se va micșora neconținut, vectorul unitar  $(\overline{BC})^0$  își va modifica, în general, direcția sa în spațiu, iar raportul  $\frac{\Delta \overline{s}}{\Delta t} = \overline{BD}$  poate să tindă în acest caz către o limită. *Limita raportului  $\frac{\Delta \overline{s}}{\Delta t}$ , cînd  $\Delta s, \Delta t \rightarrow 0$ , în cazul cînd există, se numește prima derivată a vectorului  $\overline{s}$  în raport cu parametrul scalar  $t$  și se reprezintă prin simbolul  $\frac{d\overline{s}}{dt}$ .* Fie  $\frac{d\overline{s}}{dt} = \lim (\overline{BD}) = \overline{BE}$ . Chiar din definiția derivatei vectorului, se deduce ușor că dacă avem  $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$ , atunci să avem:  $\frac{d\overline{a}}{dt} + \frac{d\overline{b}}{dt} = \frac{d\overline{c}}{dt}$  etc., adică la derivatele vectoriale care au, cum s-a văzut mai înainte module și direcții, li se aplică și legile adunării vectorilor. Astfel, *derivata unui vector în raport cu un scalar este un vector*. Este evident că prima derivată a vectorului se poate deriva din nou obținînd derivata a doua a vectorului care se reprezintă prin simbolul  $\frac{d^2\overline{s}}{dt^2}$  etc.

Fie

$$\overline{a} = i a_x + j a_y + k a_z.$$

Din definiția derivatei rezultă că trebuie să avem:

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{d(i a_x)}{dt} + \frac{d(j a_y)}{dt} + \frac{d(k a_z)}{dt}.$$



Deoarece vectorii unitari situați de-a lungul axelor de coordonate fixe sînt constanți ca modul și ca direcție, obținem:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{i} \frac{da_x}{dt} + \bar{j} \frac{da_y}{dt} + \bar{k} \frac{da_z}{dt}. \quad (16.21)$$

Nu este greu de arătat, că derivata vectorială a unui produs scalar sau vectorial al vectorilor se calculează după aceeași regulă ca și derivatele obișnuite ale produselor obișnuite. În adevăr, să se determine derivata produsului scalar  $\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{b})}{dt}$ ; deoarece produsul  $\bar{a} \cdot \bar{b}$  este un scalar, și derivata lui este tot un scalar. Vom aplica același raționament ca și în calculul diferențial.

Această derivată este limita raportului

$$\frac{(\bar{a} + \Delta\bar{a}) \cdot (\bar{b} + \Delta\bar{b}) - \bar{a} \cdot \bar{b}}{\Delta t} \Big|_{\Delta a, \Delta b, \Delta t \rightarrow 0}$$

Deoarece:

$$(\bar{a} + \Delta\bar{a}) \cdot (\bar{b} + \Delta\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \Delta\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b},$$

vom obține:

$$\frac{(\bar{a} + \Delta\bar{a}) \cdot (\bar{b} + \Delta\bar{b}) - \bar{a} \cdot \bar{b}}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{\Delta\bar{b}}{\Delta t} + \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t} \cdot \Delta\bar{b}.$$

Trecînd la limită vom avea:

$$\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt} + 0,$$

sau

$$\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}.$$

Vedem că derivata produsului scalar  $\bar{a} \cdot \bar{b}$  se exprimă prin intermediul derivatelor vectoriale  $\frac{d\bar{a}}{dt}$  și  $\frac{d\bar{b}}{dt}$ .

Exact în același fel se deduce formula

$$\frac{d(\bar{a} \times \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}$$

dar, desigur, derivata aflată în partea stîngă a acestei relații este un vector, deoarece produsul  $\bar{a} \times \bar{b}$  este vector.



Să mai examinăm și vectorul  $\vec{r}$  al cărui modul  $a$  este constant și care nu poate decât să se rotească, adică să-și schimbe direcția rămânând în același plan (fig. 143).

Este evident, că extremitatea  $B$  a vectorului  $\vec{r}$  va descrie un cerc cu raza  $r$  și cu centrul în punctul  $A$ . Derivata acestui vector  $\vec{r}$  este egală cu limita raportului

$$\frac{\overline{BC}}{\Delta t} \Delta t \rightarrow 0$$

sau cu limita expresiei

$$(\overline{BC})^0 \frac{\widehat{BC}}{\widehat{BC} \Delta t}.$$

Dar limita raportului dintre coardă și arc este egală cu 1. Deoarece  $\widehat{BC} = r \Delta \theta$ , unde  $\Delta \theta$  este unghiul cu care se rotește vectorul  $\vec{r}$  când parametrul scalar variază cu  $\Delta t$ , vom avea:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BC}}{\Delta t} \right) = r \frac{d\theta}{dt}$$

Vectorul unitar  $(\overline{BC})^0$  la limită se va transforma în vectorul unitar  $\vec{n}^0$  perpendicular pe raza  $AB$  și dirijat în sensul rotirii acestei raze. Astfel, găsim:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{n}^0 r \frac{d\theta}{dt}. \quad (16.22)$$

Prin urmare, derivata vectorială în raport cu un scalar al unui vector cu modul constant, care se află tot timpul în același plan este egală ca mărime cu modulul acestui vector înmulțit cu derivata unghiului de rotație al vectorului în raport cu parametrul scalar și este dirijată perpendicular pe acest vector în sensul rotirii lui. Desigur, pentru derivata unghiului de rotație din formula (16.22) trebuie să se ia valoarea absolută, deoarece direcția derivatei geometrice considerate se determină complet prin direcția vectorului unitar  $\vec{n}^0$ .

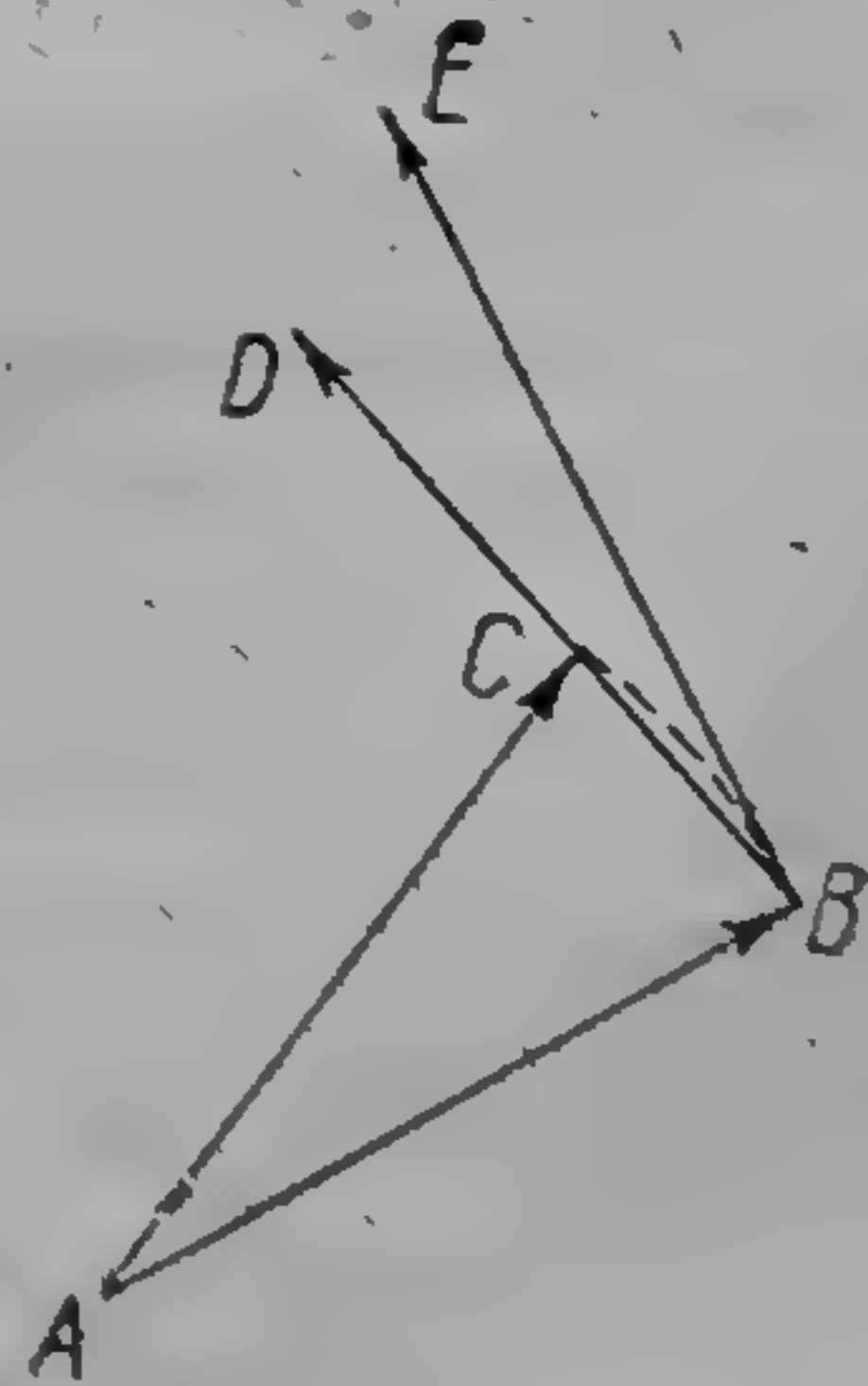


Fig. 143



§ 66. **Determinarea vitezei unui punct.** Noțiunea de viteză, în mișcarea rectilinie uniformă s-a încetățenit atât de puternic în viața de toate zilele, și este așa de elementară, încât această noțiune apare și în problemele din cursul elementar de aritmetică. Toată lumea știe că pentru obținerea acestei viteze trebuie împărțit numărul care exprimă lungimea drumului parcurs, la numărul care exprimă mărimea intervalului de timp folosit pentru a-l parcurge. De aceea viteza nu este o lungime; ea depinde nu numai de lungimea drumului ci și de timp și anume, viteza este direct proporțională cu lungimea drumului și invers proporțională cu timpul. Presupunem, de exemplu, că un punct oarecare parcurge în mișcare rectilinie uniformă, 40 m în 5 s; viteza acestui punct, va fi de 8 m/s. Se vede că la determinarea vitezei, lungimile s-au măsurat în metri, iar intervalele de timp în secunde și, pentru aflarea vitezei, numărul care exprimă lungimea s-a împărțit la numărul care exprimă intervalul de timp. De aici rezultă că lungimea și viteza sînt mărimi diferite; totuși viteza de mișcare rectilinie uniformă ca și forțele și momentele forțelor, poate fi reprezentată printr-un segment de dreaptă, adică printr-o lungime, dacă convenim a reprezenta unitatea de viteză la o scară dată printr-o unitate de lungime. Putem deci reprezenta viteza la o anumită scară, printr-un segment de dreaptă, orientat în lungul traiectoriei rectilinii a punctului în sensul de mișcare al acestui punct.

Nu este greu de extins această noțiune de viteză din mișcarea rectilinie uniformă la cazul unei mișcări oarecare a punctului, neuniformă și curbilinie. Să presupunem în acest scop, că punctul  $A$  se mișcă pe o traiectorie oarecare  $(C)$  (care poate fi și o curbă strîmbă) caracterul mișcării punctului  $A$  pe această traiectorie  $(C)$  fiind arbitrar (fig. 144). Presupunem că în momentul  $t$ , punctul care se mișcă se găsește în punctul  $B$  al traiectoriei  $(C)$ ; iar după un interval scurt de timp  $\Delta t$ , în momentul  $t + \Delta t$ , în punctul  $C$ . Să unim punctele  $B$  și  $C$  prin coarda  $BC$  și să ne imaginăm un al doilea punct care se mișcă uniform pe coarda  $BC$  astfel că în momentul  $t$  el se află în punctul  $B$ , iar în momentul  $t + \Delta t$  în punctul  $C$ . În acest fel, împreună cu punctul real  $A$ , care parcurge în intervalul de timp  $\Delta t$  arcul  $BC$  într-o mișcare oarecare — considerăm și un punct imaginar care parcurge coarda  $BC$  în mișcare uniformă, în același interval de timp; ambele puncte pleacă concomitent din punctul  $B$  și ajung conco-



nitent în punctul  $C$ . Este evident că mișcarea punctului imaginar se va apropia cu atât mai mult de mișcarea punctului real, cu cât intervalul de timp  $\Delta t$  va fi mai scurt; conform celor prece-

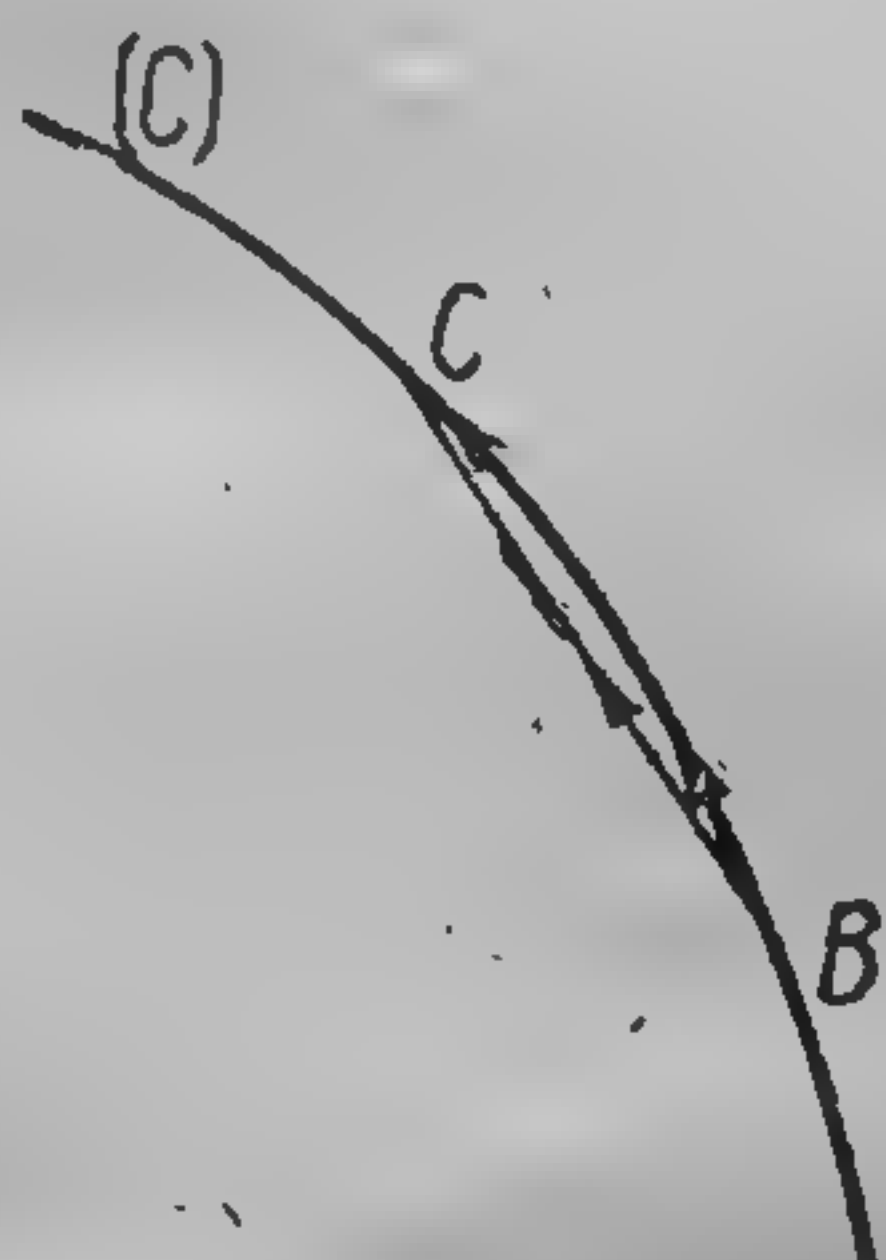


Fig. 144

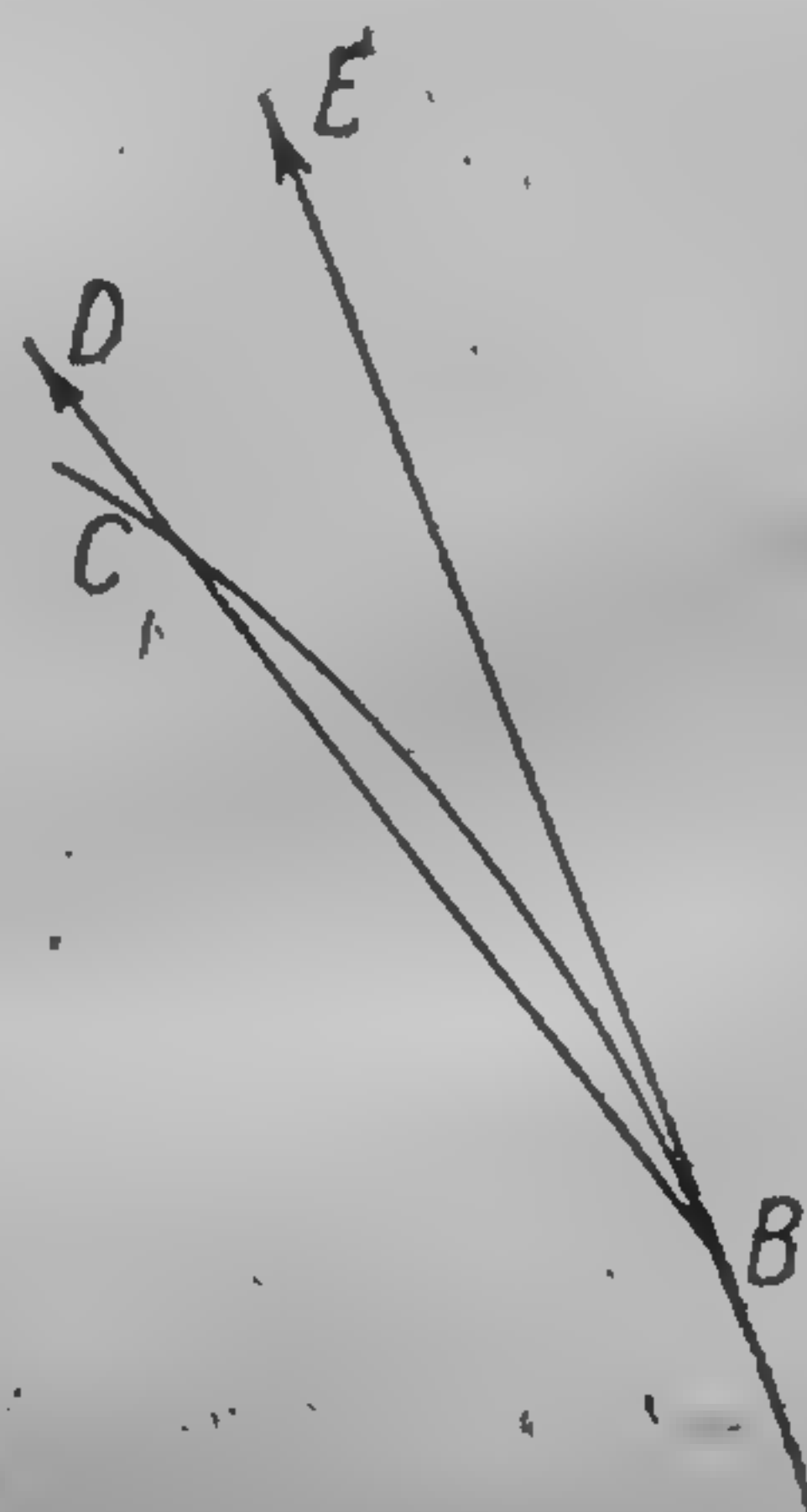


Fig. 145

dente, viteza acestui punct imaginar în mișcarea lui uniformă de-a lungul coardei  $BC$  va fi egală cu  $\frac{BC}{\Delta t}$ . După cum s-a arătat în acest paragraf, această viteză se poate reprezenta convențional prin segmentul de dreaptă  $BD$ , astfel că are loc egalitatea (fig. 145).

$$BD = \frac{BC}{\Delta t}$$

Mărimea  $BD$  se numește *viteza medie* a punctului  $A$  în intervalul de timp  $\Delta t$ . Să facem să tindă intervalul de timp  $\Delta t$  către zero; atunci punctul  $C$  se va apropia de punctul  $B$ . Deoarece secanta devine în limita tangentă, la limită vom avea:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{BC}{\Delta t} \right) = BE.$$

Segmentul  $BE$  are direcția tangentei la traiectorie în punctul  $B$  și are o lungime determinată; mărimea  $BE$  se numește *viteza instantanee* a punctului  $A$  în momentul  $t$ , sau mai simplu viteza punctului  $A$  în momentul  $t$ . Vedem că viteza instantanee se caracterizează prin mărime, direcție și sens; ca să demonstrăm că viteza instantanee este un vector, rămâne să se dovedească că



vitezele instantanee se pot aduna după regula de adunare la vectorilor. În fizica elementară se demonstrează că vitezele mișcărilor uniforme rectilinii se adună după legea paralelogramului. Nu este greu să ne convingem că această regulă privind viteza punctului se aplică la orice fel de mișcări, nu numai la mișcărilor rectilinii uniforme.

Să considerăm un interval de timp foarte mic  $\Delta t$  și să presupunem că punctul mobil  $A$  va descrie în acest interval de timp un arc de curbă foarte mic  $\widehat{BC}$ . Presupunem apoi că arcul  $\widehat{BC}$

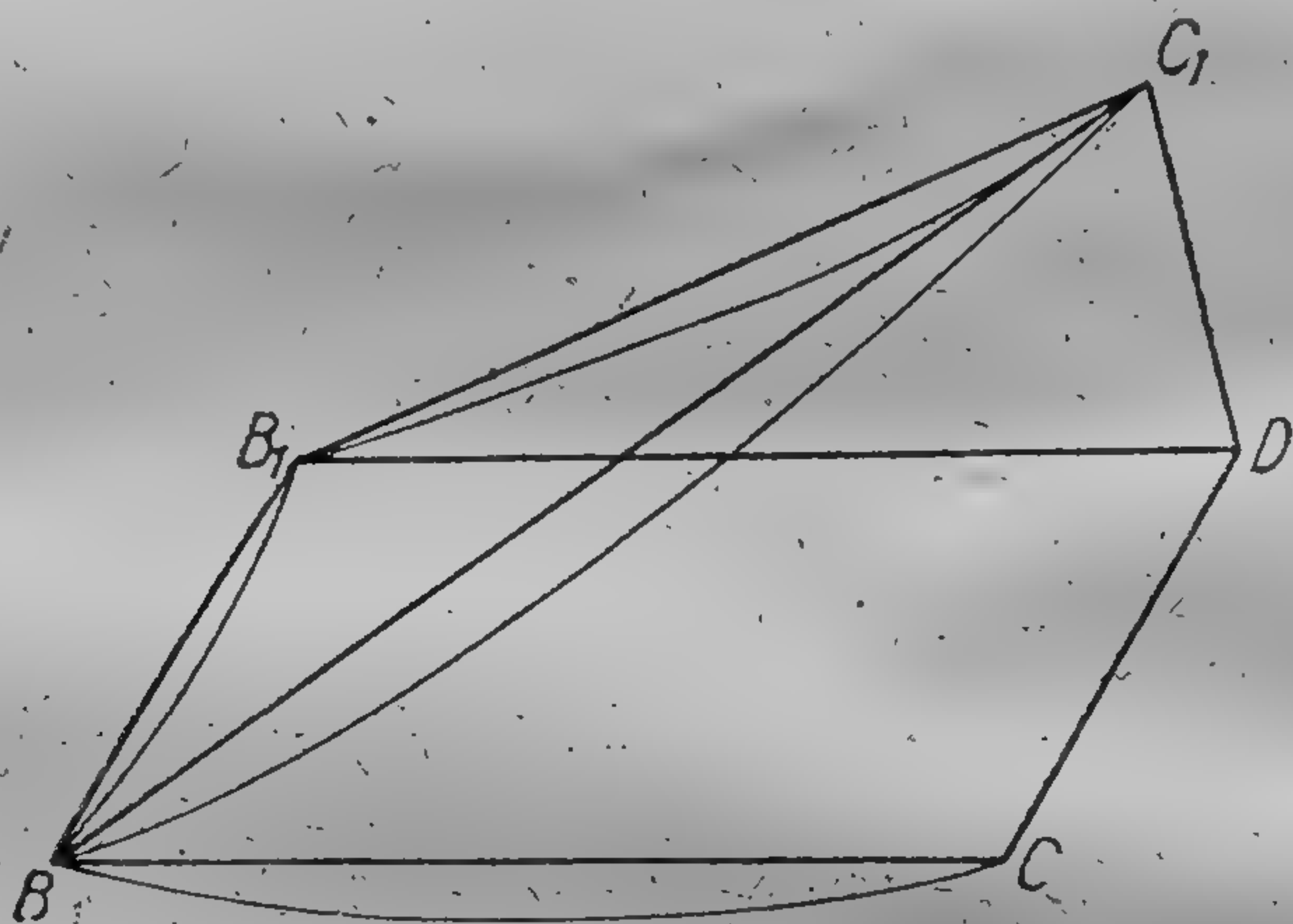


Fig. 146

nu rămîne nici el în repaus, ci în același interval de timp  $\Delta t$ , se va deplasa în poziția  $B_1C_1$  astfel încît  $\widehat{B_1C_1} = \widehat{BC}$ . Presupunem că arcul  $\widehat{BB_1}$  reprezintă drumul pe care l-ar parcurge cu punctul  $A$  dacă ar fi solidă legat în punctul  $B$  de arcul  $\widehat{BC}$ . Este evident că în mișcare compusă, punctul  $A$  va trece, în intervalul de timp  $\Delta t$  din punctul  $B$  în punctul  $C_1$ , mișcîndu-se pe un arc de curbă  $\widehat{BC_1}$  (fig. 146). Ducem coardele  $BC$ ,  $BB_1$ ,  $B_1C_1$ ; este evident că trebuie să avem  $B_1C_1 = BC$ ; vom construi apoi paralelogramul  $BCDB_1$  și vom uni punctul  $D$  cu punctul  $C_1$ . Se poate întîmpla ca planul triunghiului  $B_1DC_1$  să nu coincidă cu planul paralelogramului  $BCDB_1$ . Din fig. 146 găsim:

$$\overline{BC_1} = \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DC_1} = \overline{BC} + \overline{BB_1} + \overline{DC_1}.$$



Deoarece  $B_1D = BC$ , vom avea  $B_1D = B_1C_1$ ; segmentul  $DC_1$  care este foarte mic poate fi considerat apropiat de arcul de cerc  $DC_1$ , cu centrul în punctul  $B_1$  și cu raza egală cu  $B_1C_1$ , unde:

$$\widehat{DC_1} = B_1C_1 \cdot \angle DB_1C_1.$$

Deoarece cei doi factori din partea dreaptă a acestei egalități sînt cantități infinit mici de ordinul întâi, proporționali cu cantitatea  $\Delta t$ , arcul de curbă  $\widehat{DC_1}$  va fi un infinit mic de ordinul doi, proporțional cu cantitatea  $\Delta t^2$ . Împărțind cu  $\Delta t$  expresia lui  $\overline{BC_1}$ , vom obține:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{BC}}{\Delta t} + \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{DC_1}}{\Delta t}$$

sau:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{BC}}{\Delta t} + \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{DC_1}}{\widehat{DC_1}} \cdot \frac{\widehat{DC_1}}{\Delta t}.$$

De aici găsim:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BC_1}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BC}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{DC_1}}{\widehat{DC_1}} \right) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\widehat{DC_1}}{\Delta t} \right).$$

Este evident, că modulul factorului  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{DC_1}}{\widehat{DC_1}} \right)$  este egal cu unitatea, iar factorul  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\widehat{DC_1}}{\Delta t} \right)$  conform celor arătate este egal cu zero; astfel avem:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BC_1}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BC}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} \right).$$

Dar, este evident, că  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BC_1}}{\Delta t} \right)$  este viteza relativă a punctului  $A$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} \right)$  este viteza de transport a punctului  $A$ , iar  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{BC}}{\Delta t} \right)$  este viteza mișcării compuse a punctului  $A$ . Astfel, viteza mișcării compuse a punctului este suma geometrică a vitezelor componente a mișcărilor acestui punct. Aceasta este un adevăr matematic. La compunerea vitezelor se poate ajunge și astfel. Anume, în dinamică, vom vedea că unui punct  $i$  se poate imprima instantaneu o viteză. De aceea, să ne închipuim că la un moment dat, sub acțiunea unei cauze oarecare, punctul  $A$  trebuie să capete viteza instantanee  $\bar{v}_1$  și sub acțiunea unei alte cauze, trebuie să capete o altă viteză  $\bar{v}_2$ ; se cere să se găsească ce viteză  $\bar{v}$  va



căpăta punctul  $A$  în cazul când asupra lui vor acționa ambele cauze deodată. Această problemă fizică nu se poate rezolva prin cinematică; ea va primi rezolvarea numai în dinamică. Primul care a pus această problemă cu toată rigurozitatea a fost Newton. Aici vom arăta numai că și în acest caz viteza  $\vec{v}$  a punctului  $A$  se obține prin adunarea geometrică a vitezelor  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ . În acest fel, viteza punctului este un vector, deoarece totdeauna avem:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (16.23)$$

În statică s-a arătat că forțele, momentele forțelor și vectorii de poziție sînt vectori; vedem aici că și viteza punctului este un vector.

Afară de determinarea vectorială a vitezei punctului, dată mai înainte, viteza punctului mai poate fi determinată și analitic. În adevăr, fie punctul  $O$ , un punct fix în spațiu, fie  $\vec{r}$  vectorul de poziție în raport cu  $O$  al unui punct mobil  $A$  și fie  $(C)$  traiectoria punctului  $A$  (fig. 147); este evident că vectorul de poziție  $\vec{r}$  al punctului  $A$  este funcție de timpul  $t$ .

Presupunem că în momentul  $t$ , punctul mobil  $A$  se găsește în punctul  $B$ , iar în momentul  $t + \Delta t$ , în punctul  $C$  al traiectoriei sale. Din fig. 147 rezultă că:

$$\vec{r} = \vec{OB}, \quad \vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{OC}, \quad \Delta\vec{r} = \vec{BC};$$

după definiția dată mai înainte vitezei punctului  $A$ , reiese că această viteză va fi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Deoarece derivata unui vector este un vector, și viteza punctului este un vector, și vom avea:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (16.24)$$

În acest fel, vectorul vitezei punctului este egal cu prima derivată a vectorului de poziție al acestui punct, în raport cu

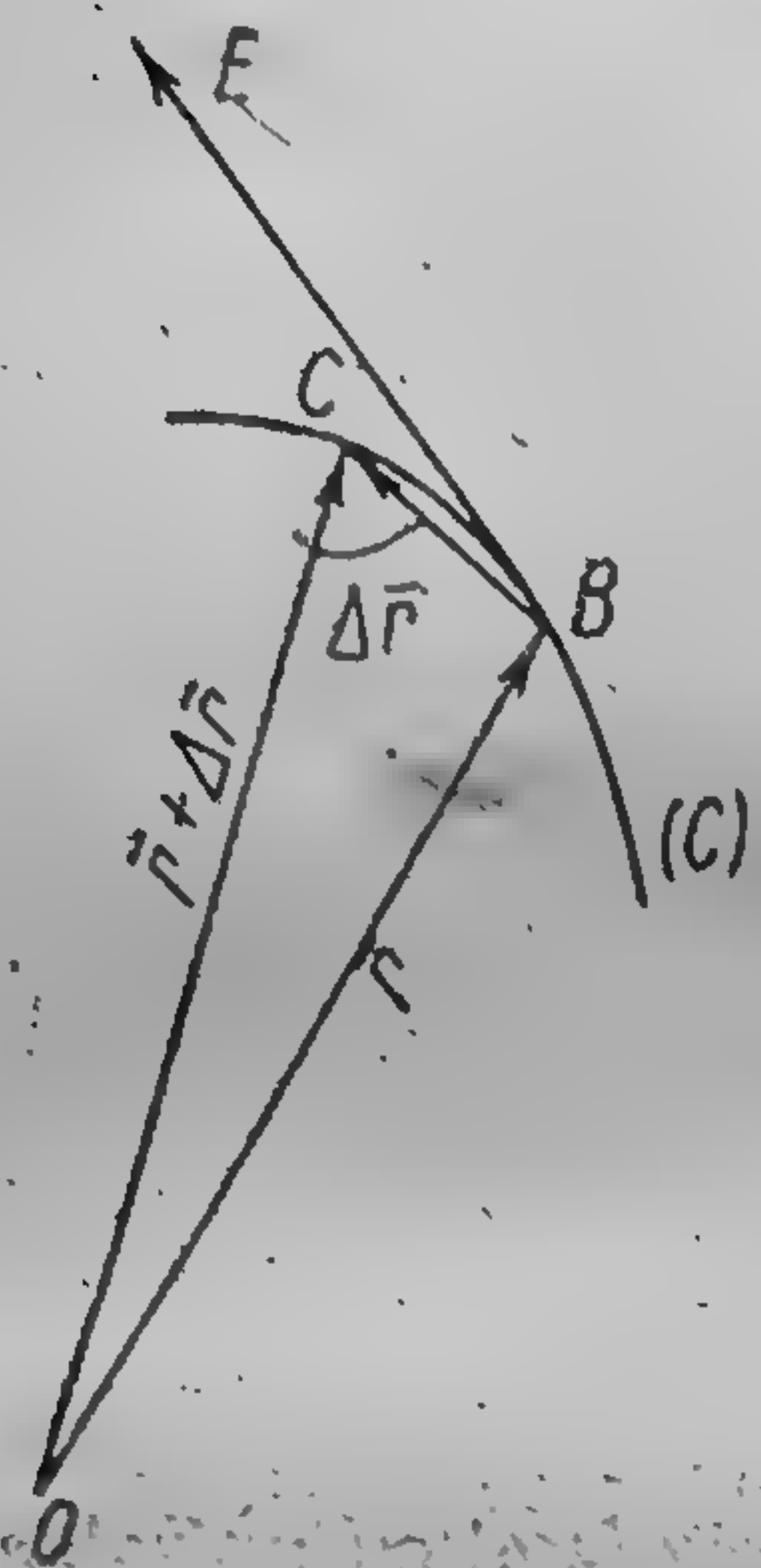


Fig. 147



timpului. Derivând în raport cu timpul ambele părți ale formulei (16.20) obținem:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt},$$

sau

$$\vec{v} = \vec{v}_2 + \vec{v}_1;$$

aceasta este o deducere analitică a legii paralelogramului vitezelor în condițiile pentru care formula (16.20) este valabilă.

Deoarece avem  $\Delta\vec{r} = (\Delta\vec{r})^0 |\Delta\vec{r}|$  unde  $(\Delta\vec{r})^0$  este versorul direcției vectorului  $\Delta\vec{r}$ , și la trecerea la limită versorul  $(\Delta\vec{r})^0$  va deveni vectorul unitar  $\vec{\tau}^0$  al tangentei la traiectoria punctului A, vector orientat în sensul mișcării, vom avea:

$$\vec{v} = \vec{\tau}^0 \lim \left( \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \right)$$

Dar avem:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

unde  $\Delta s$  este un element de arc al traiectoriei punctului A; de aceea, ținând seamă că  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} \right) = 1$ , vom obține:

$$\vec{v} = \vec{\tau}^0 \frac{ds}{dt} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (16.25)$$

În formulele (16.25) trebuie să se ia derivata  $\frac{ds}{dt}$  în valoarea ei absolută, deoarece direcția vitezei este complet determinată prin vectorul unitar  $\vec{\tau}^0$ .

§ 67. Viteza punctului în coordonate ortogonale și polare. După cum rezultă din formula (16.24) este ușor de găsit expresiile vitezei în coordonate ortogonale și polare. Introducem un sistem fix de axe de coordonate  $Oxyz$ . Deoarece avem:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

atunci după formulele (16.21) și (16.24) vom obține:

$$\vec{v} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}$$



Introducând proiecțiile  $v_x, v_y, v_z$ , ale vitezei  $\bar{v}$  pe axele de coordonate  $Ox, Oy, Oz$ , vom avea:

$$\bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}$$

adică:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (16.26)$$

În acest fel, proiecția vitezei punctului pe oricare din axele ortogonale fixe de coordonate, este egală cu derivata întâi a coordonatei corespunzătoare a punctului mobil în raport cu timpul.

Din formulele (16.26) găsim modulul  $v$  al vitezei

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (16.27)$$

unde radicalul se va lua în valoare absolută. Deoarece se știe că pătratul diferențialei arcului unei curbe este

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

din formula  $v = \frac{ds}{dt}$  obținem din nou formula (16.27). Notăm prin  $\alpha, \beta, \gamma$ , unghiurile pe care le formează vectorul viteză al punctului cu axele de coordonate  $Ox, Oy, Oz$ ; știm că trebuie să avem:

$$\frac{v_x}{v} = \frac{1}{v} \frac{dx}{dt}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{1}{v} \frac{dy}{dt}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{1}{v} \frac{dz}{dt} \quad (16.28)$$

unde  $v$  este determinat prin formula (16.27). Deoarece coordonatele  $x, y, z$  ale punctului se dau prin formulele (15.2) sau (16.3), pentru elementele  $v_x, v_y, v_z, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  ale mișcării punctului, vom obține expresii în funcție de timp. Folosindu-ne de formulele (16.2) sau (16.3) se poate elimina timpul  $t$  din aceste expresii, reprezentându-le ca funcții de coordonatele punctului. În acest fel, putem rezolva două feluri de probleme: sau să găsim elementele mișcării punctului arătate mai sus la un moment dat, sau să găsim aceste elemente pentru un punct dat al traiectoriei; deoarece viteza este dirijată de-a lungul tangentei, este clar că problema cinematică a găsirii vitezei este legată de problema geometrică a găsirii tangentei în orice punct al traiectoriei.

Să examinăm mișcarea oscilatorie armonică definită prin ecuația (16.4) sau (16.4'); pentru această mișcare vom avea:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ak \cos(kt + \varepsilon) = \frac{2\pi a}{T} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varepsilon\right).$$



În funcție de semnul cosinusului, direcția vectorului viteză va coincide cu direcția pozitivă a axei  $Ox$  sau va fi de sens contrar. Din formula (16.4) avem:

$$a \cos(kt + \varepsilon) = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

de aceea:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pm k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

În ultima formulă trebuie să se ia semnul plus în cazul când punctul se mișcă în sensul pozitiv al axei absciselor și semnul minus dacă punctul se mișcă în sens opus.

Să examinăm apoi mișcarea definită prin ecuațiile (16.6). Obținem:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -kR \sin kt,$$

$$v_y = +kR \cos kt,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = kR,$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = -\sin kt,$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v} = \cos kt.$$

Eliminînd timpul  $t$  cu ajutorul formulelor (16.6), vom găsi:

$$v_x = -ky, \quad v_y = kx \quad v = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)} = kR,$$

$$\cos \alpha = -\frac{y}{R}, \quad \cos \beta = \frac{x}{R}.$$

Ultimele formule se pot găsi ușor direct geometric din fig. 148. În adevăr, avem:

$$kt + \frac{\pi}{2} = \alpha, \quad kt = \beta,$$

adică trebuie să avem:

$$\cos \alpha = -\sin kt = -\frac{y}{R} \quad \cos \beta = \cos kt = \frac{x}{R}$$

Să examinăm, în sfîrșit, mișcarea elicoidală (16.11)

$$x = R \cos kt, \quad y = R \sin kt, \quad z = h \frac{kt}{2\pi}$$



Avem succesiv:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -kR \sin kt, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = kR \cos kt, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = h \frac{k}{2\pi}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = k \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$$

Deoarece modulul  $v$  al vitezei este constant, această mișcare elicoidală a punctului va fi uniformă. Să găsim unghiul  $\gamma$ , format de vectorul viteză cu axa  $Oz$ ; obținem:

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}$$

Vedem că în mișcarea considerată, vectorul viteză formează un unghi constant, cu axa  $Oz$ , și prin urmare, un unghi constant cu planul  $Oxy$ . În acest caz, tangenta la curba elicoidală care reprezintă traiectoria punctului, formează cu axa  $Oz$  un unghi constant. Folosindu-ne de această proprietate, se poate ușor construi curba elicoidală considerată. În adevăr vom lua triun-

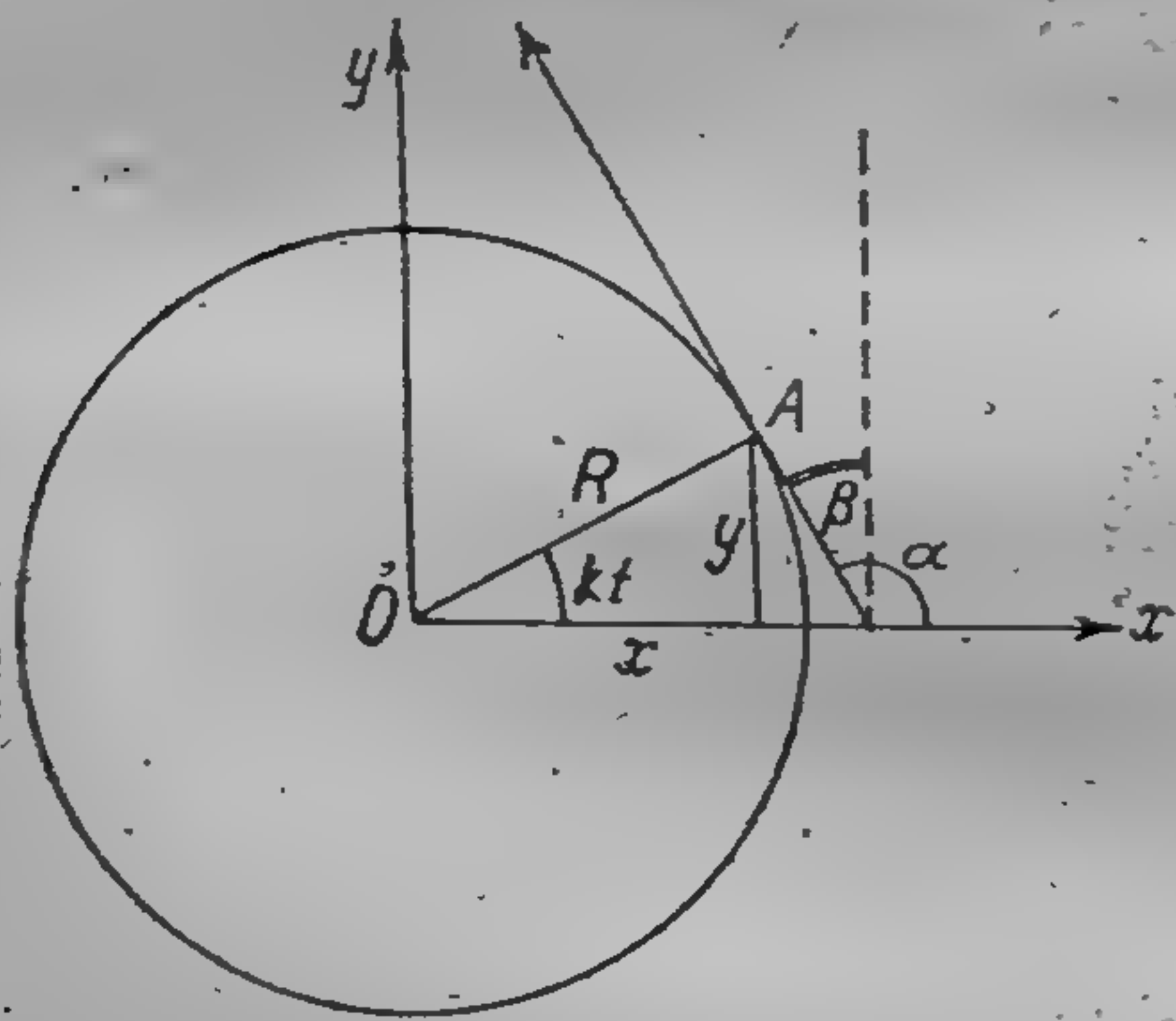


Fig. 148

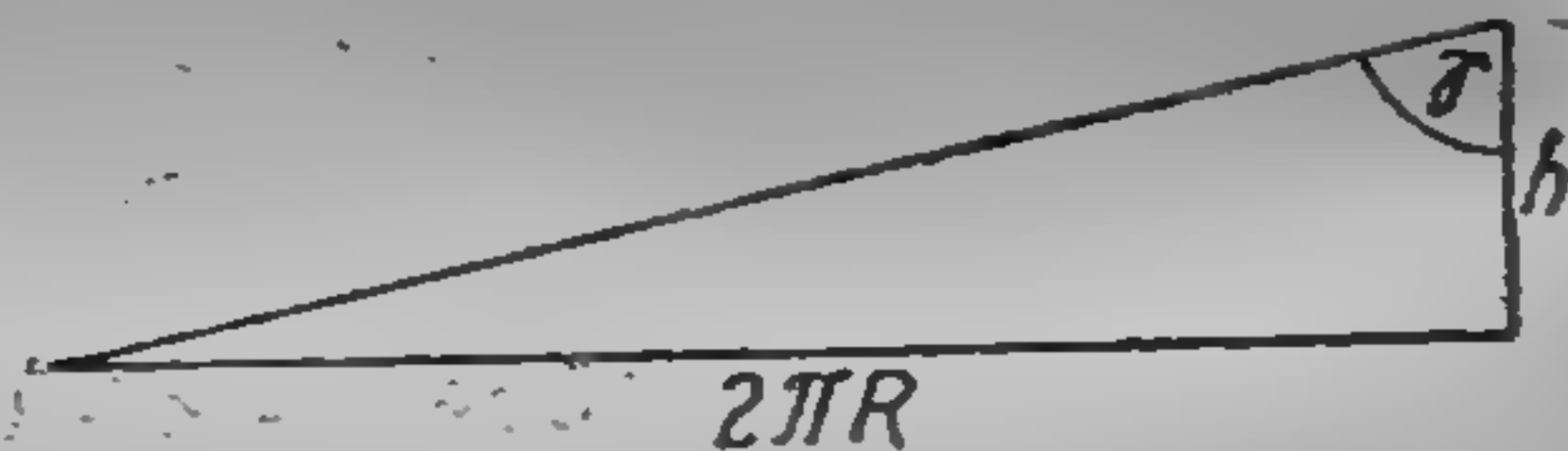


Fig. 149

ghiul dreptunghi în care una din catete va fi egală cu  $h$  — pasul elicei, iar cealaltă catetă este egală cu  $2\pi R$  — circumferința bazei cilindrului (fig. 149). Ipoteenuza acestui triunghi va fi egală cu  $\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$ , cosinusul unghiului  $\gamma$ , format de ipoteenuza cu cateta  $h$ , va fi egal cu

$$\cos \gamma = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}$$

Vedem că este suficient să înfășurăm acest triunghi pe cilindru, ca ipoteenuza lui să formeze elicea circulară considerată și anume o singură spirală a ei. Să revenim la formulele (16.28), înlocuind



în ele modulul vitezei  $v$  prin valoarea lui  $\frac{ds}{dt}$ . Reducând cu  $dt$ , obținem:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Astfel, ajungem la formulele cunoscute din geometria diferențială care determină cosinuşii directori ai tangentei la curbă.

Să dăm acum expresia vitezei în coordonate polare, în plan.

Avem:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Introducem vectorul unitar  $\vec{r}^0$ , care are direcția razei-vectoare  $\vec{r}$ . Observăm că deși  $\vec{r}^0$  nu variază ca modul, variază ca direcție și prin urmare vectorul  $\vec{r}^0$  este funcție de timp. Știm, că

$$\vec{r} = \vec{r}^0 r$$

de aceea obținem

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}^0}{dt} r + \vec{r}^0 \frac{dr}{dt}.$$

Aplicând derivatei  $\frac{d\vec{r}^0}{dt}$  formula (16.22), vom avea:

$$\frac{d\vec{r}^0}{dt} = n \frac{d\theta}{dt} \vec{n}^0$$

unde  $\theta$  este unghiul dintre vectorul  $\vec{r}$  și o direcție oarecare invariabilă  $\Delta$  aleasă în plan. În acest fel

$$\vec{v} = \vec{r}^0 \frac{dr}{dt} + n^0 r \frac{d\theta}{dt} \quad (16.29)$$

Vedem că vectorul  $\vec{v}$  este sumă a doi vectori: unul  $\vec{r}^0 \frac{dr}{dt}$  este dirijat de-a lungul vectorului  $\vec{r}$ , iar celălalt  $n^0 r \frac{d\theta}{dt}$  perpendicular pe vectorul  $\vec{r}$ . Fie  $(C)$  traiectoria punctului, care se găsește în momentul  $t$  în punctul  $B$  (v. fig. 150). Să ducem din punctul fix  $O$ , vectorul de poziție  $\vec{r}$  al punctului  $B$  și să presupunem că el va forma cu direcția invariabilă  $\Delta$ , unghiul  $\theta$ .

Construim în punctul  $B$  un sistem de coordonate ortogonale în felul următor: una din axe  $(r)$  o vom dirija după vectorul de



poziție  $\vec{r}$ , iar cealaltă axă  $(\theta)$  vom considera perpendiculară în punctul  $B$  pe vectorul  $\vec{r}$ , orientată în sensul creșterii unghiului  $\theta$ . Vom nota proiecțiile vitezei pe axele  $(r)$  și  $(\theta)$  respectiv prin  $v_r$  și  $v_\theta$ . Din formula (16.29) vom avea:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}. \quad (16.30)$$

Aici întâlnim pentru prima dată *axele mobile de coordonate*. În adevăr axele  $(r)$  și  $(\theta)$  au origine mobilă, care coincide cu poziția instantanee  $B$  a punctului mobil pe traiectoria lui, și au o

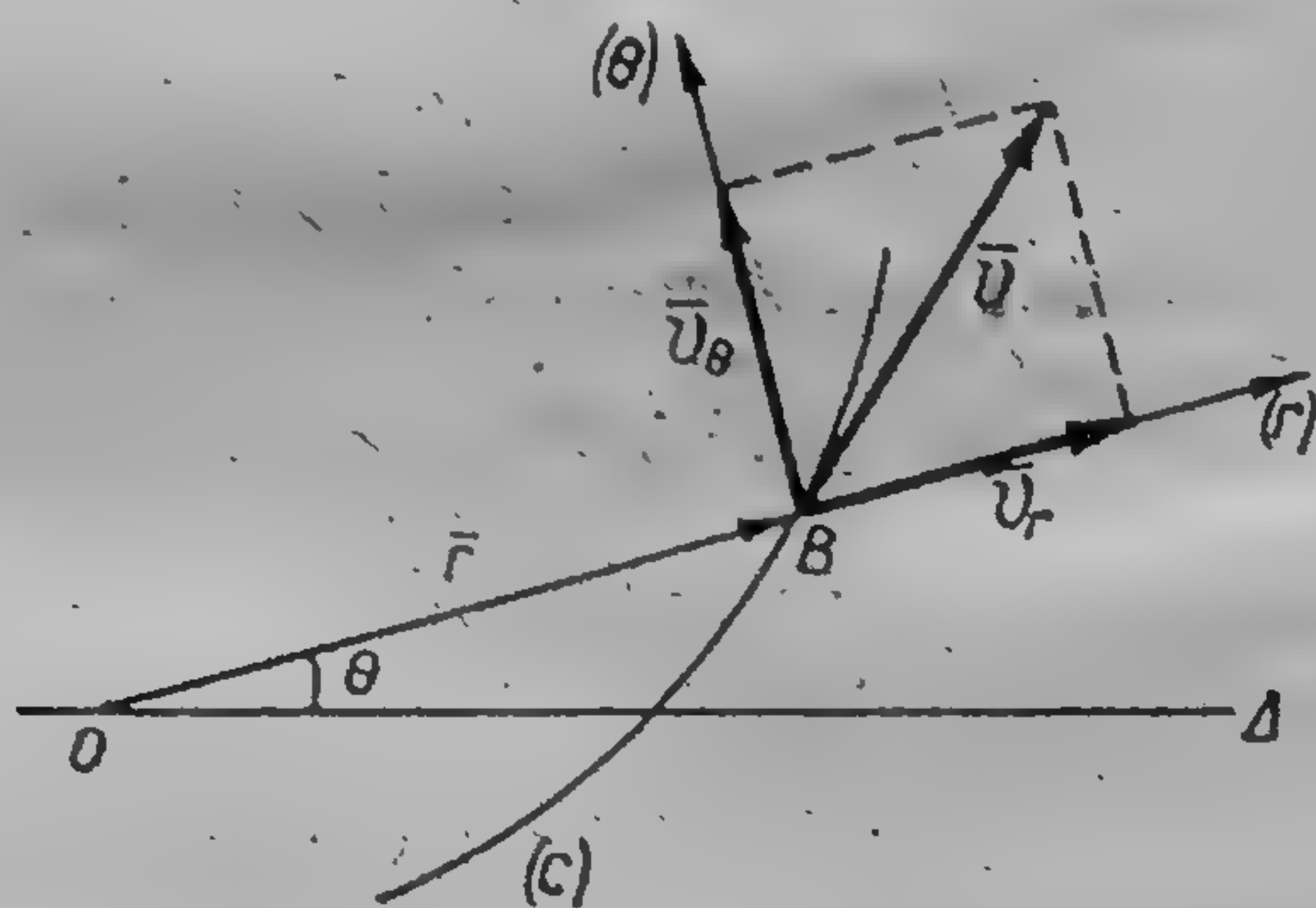


Fig. 150

direcție variabilă deoarece direcția vectorului de poziție  $\vec{r}$  variază în funcție de timp. Observăm că, de multe ori în mecanică, sîntem nevoiți să ne servim de axe mobile de coordonate.

Vom obține modulul vitezei după formula:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}, \quad (16.31)$$

unde radicalul se ia în valoare absolută. Nu este greu să se obțină această formulă imediat, prin trecerea de la coordonatele ortogonale la cele polare. În adevăr, avem:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Diferențind ultimele două formule, vom găsi:

$$dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta, \quad dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta;$$



ridicînd la pătrat și adunînd, vom avea pătratul elementului liniar în coordonate polare în plan:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

De aici găsim:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

adică revenim la formula (16.31).

Să aplicăm formula (16.31) la mișcarea punctului pe o circumferință cu raza egală cu  $R$ . Deoarece în acest caz avem  $r=R=\text{const}$ , atunci  $v_r=0$ , și viteza  $\bar{v}$  va fi dirijată după perpendiculara pe rază, adică de-a lungul tangentei la circumferință, după cum și trebuie să fie. Prin urmare, pentru modulul  $v$  al vitezei, obținem:

$$v = R \left| \frac{d\theta}{dt} \right|,$$

unde trebuie să se ia valoarea absolută a derivatei  $\frac{d\theta}{dt}$ , deoarece formula (16.31) dă modulul vitezei. Introducem notația:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (16.32)$$

unde  $\omega$  se numește *viteză unghiulară*. Prin urmare, vom avea:

$$v = R |\omega|, \quad (16.33)$$

adică în mișcarea unui punct pe un cerc, modulul vitezei liniare este egal cu raza înmulțită cu modulul vitezei unghiulare.

Să găsim și viteza în mișcarea unui punct pe spirala lui Arhimede, definită prin ecuațiile (16.14). Avem:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = a, \quad v_\theta = \frac{d\theta}{dt} = abt = br;$$

de aceea vom avea:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = a \sqrt{1 + b^2 t^2} = \sqrt{a^2 + b^2 r^2}$$

Din fig. 150 vom găsi:

$$\lg(\bar{v}, \bar{v}_r) = \frac{v_\theta}{v_r} = bt = \frac{b}{a} r.$$



Pentru a avea modulul  $v$  al vitezei în coordonate polare în spațiu, vom porni de la formulele

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

și formulele (16.17); diferențiind ultimele formule, obținem:

$$dx = dr \cos \Theta \cos \varphi - r \sin \Theta \cos \varphi d\Theta - r \cos \Theta \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = dr \cos \Theta \sin \varphi + r \sin \Theta \sin \varphi d\Theta + r \cos \Theta \cos \varphi d\varphi,$$

$$dz = dr \sin \Theta + r \cos \Theta d\Theta.$$

Ridicând la pătrat ultimele trei formule și adunând rezultatele, vom găsi pătratul elementului liniar în coordonate polare în spațiu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \cos^2 \Theta d\varphi^2.$$

De aici vom avea:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + r^2 \cos^2 \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (16.34)$$

Să observăm că procedeul utilizat aici al determinării pătratului vitezei prin găsirea pătratului elementului liniar, este un procedeu care se utilizează des în mecanică.

§ 68. Viteză areolară. Să trecem acum la noțiunea de viteză areolară, limitându-ne la cazul mișcării plane a punctului. Să

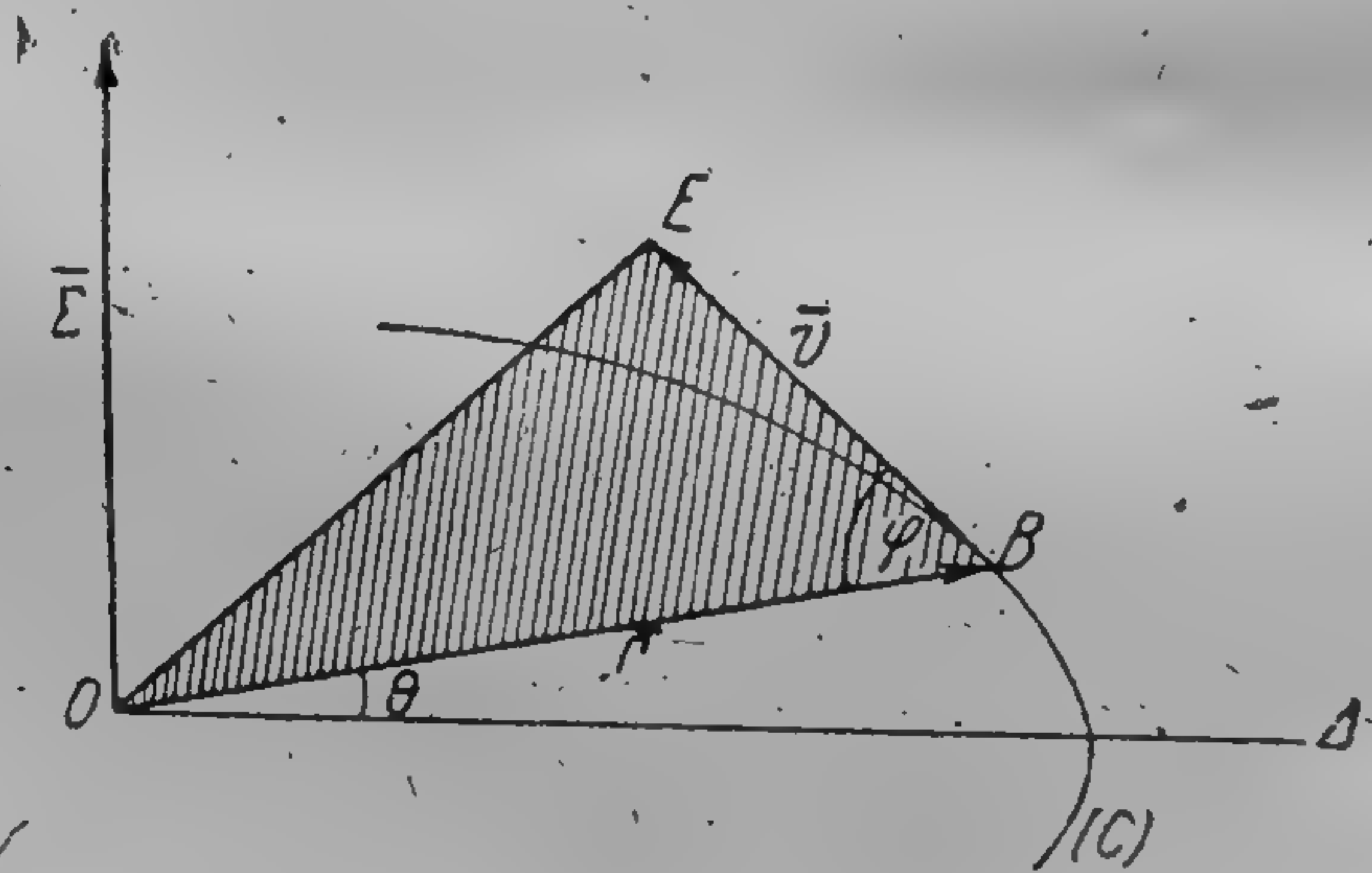


Fig. 151

examinăm mișcarea punctului  $A$ , pe o traiectorie oarecare plană  $(C)$ . Să presupunem, că la un moment oarecare  $t$ , punctul mobil se găsește în punctul  $B$  al traiectoriei sale și are viteza  $\vec{v} = \vec{BE}$ . Unim un punct fix  $O$  al planului în care se mișcă punctul consi-



derat cu punctul  $B$ , prin vectorul de poziție  $\vec{r} = \vec{OB}$  (fig. 151). Se numește viteză areolară a punctului mobil  $B$  în raport cu punctul fix  $O$ , produsul vectorial  $\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$ .

Să notăm vectorul  $\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$  prin  $\vec{\Sigma}$ . Știm (Cap. II, § 11), că:

$$\vec{\Sigma} = \frac{1}{2} r v \sin \varphi.$$

Să dăm acum alte expresii ale vitezei areolare, atât în coordonate polare cât și în coordonate ortogonale, expresii de care în general ne folosim mereu ca fiind mai comode. Pentru a obține expresia vitezei areolare în coordonate polare, să înlocuim în expresia  $\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$ , vectorul de poziție  $\vec{r}$  prin valoarea lui  $\vec{r} = \vec{r}^0 r$ , și vectorul viteză  $\vec{v}$  prin valoarea din formula (16.29); vom obține:

$$\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{r}^0 r \times \left( \vec{r}^0 \frac{dr}{dt} + \vec{n}^0 r \frac{d\theta}{dt} \right)$$

sau

$$\vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{r}^0 \times \vec{r}^0) \frac{r}{2} \frac{dr}{dt} + (\vec{r}^0 \times \vec{n}^0) \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt}.$$

În § 12 al cap. II am văzut că trebuie să avem:

$$\vec{r}^0 \times \vec{r}^0 = 0, \quad \vec{r}^0 \times \vec{n}^0 = k,$$

unde vectorul unitar  $k$  este perpendicular pe planul triunghiului  $OBE$  (fig. 151) și dirijat pe fața lui pozitivă, adică la fel cu vectorul  $\vec{\Sigma}$ . În acest fel, vom obține:

$$\vec{\Sigma} = k \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt}, \quad \Sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (16.35)$$

Să arătăm deci mărimea  $\Sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$  este denumită viteză areolară. Să examinăm punctul  $A$  care se mișcă pe traiectoria  $(C)$ . Presupunem că în momentele  $t$  și  $t + \Delta t$ , punctul mobil se găsea în punctele  $B$  respectiv  $C$  ale traiectoriei sale (fig. 152). Ducem vectorii de poziție  $\vec{OB}$  și  $\vec{OC}$  și vom introduce notațiile:

$$\begin{aligned} OB &= r, & OC &= r + \Delta r, \\ OB_1 &= OB, & OC_1 &= OC, \\ B_1C &= BC_1 = \Delta r. \end{aligned}$$



Dacă în momentul  $t$ , vectorul  $OB$  formează cu o direcție invariabilă  $\Delta$  un unghi oarecare  $\theta$ , atunci vom avea  $\angle COB = \Delta\theta$ . Să

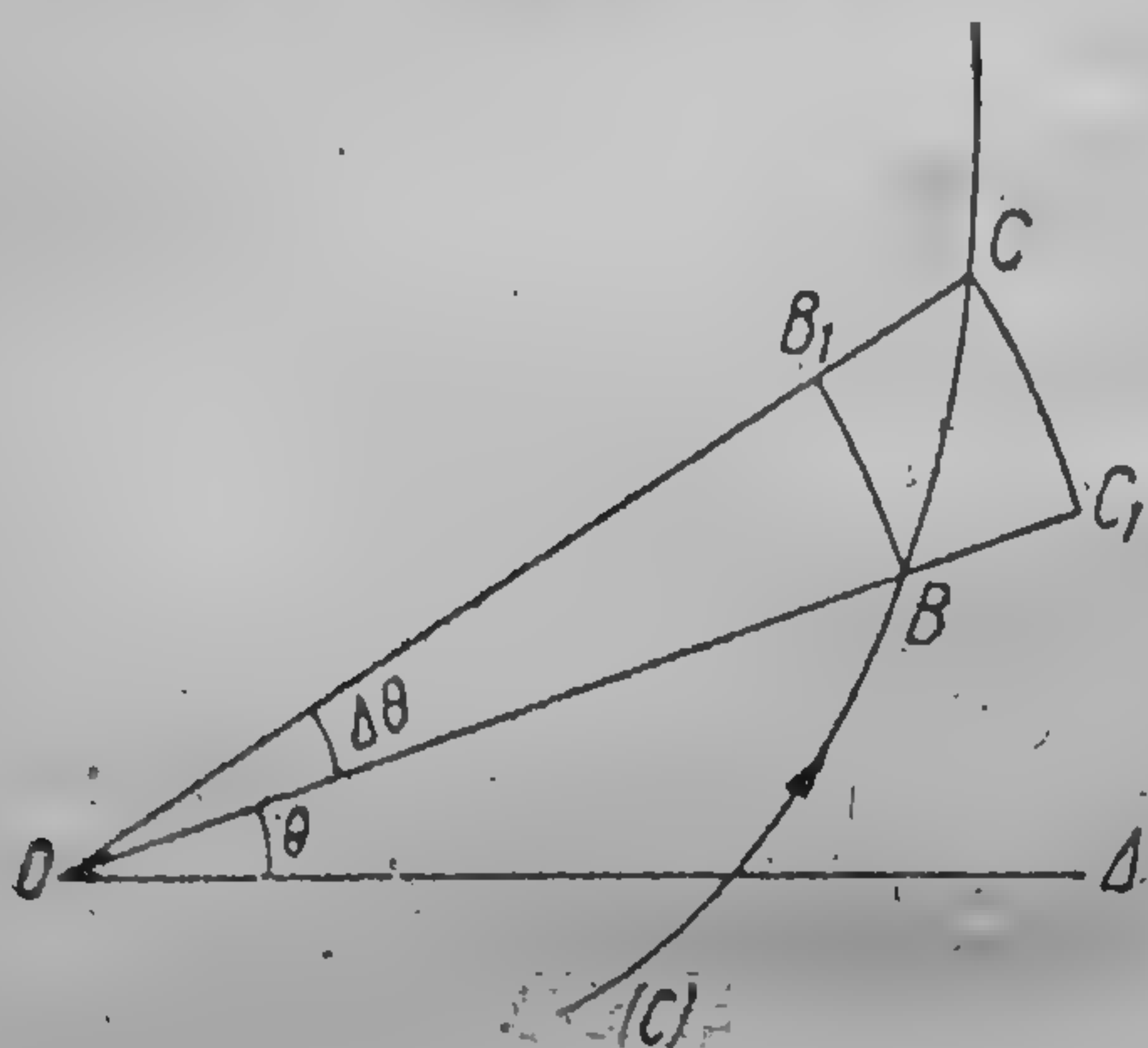


Fig. 152

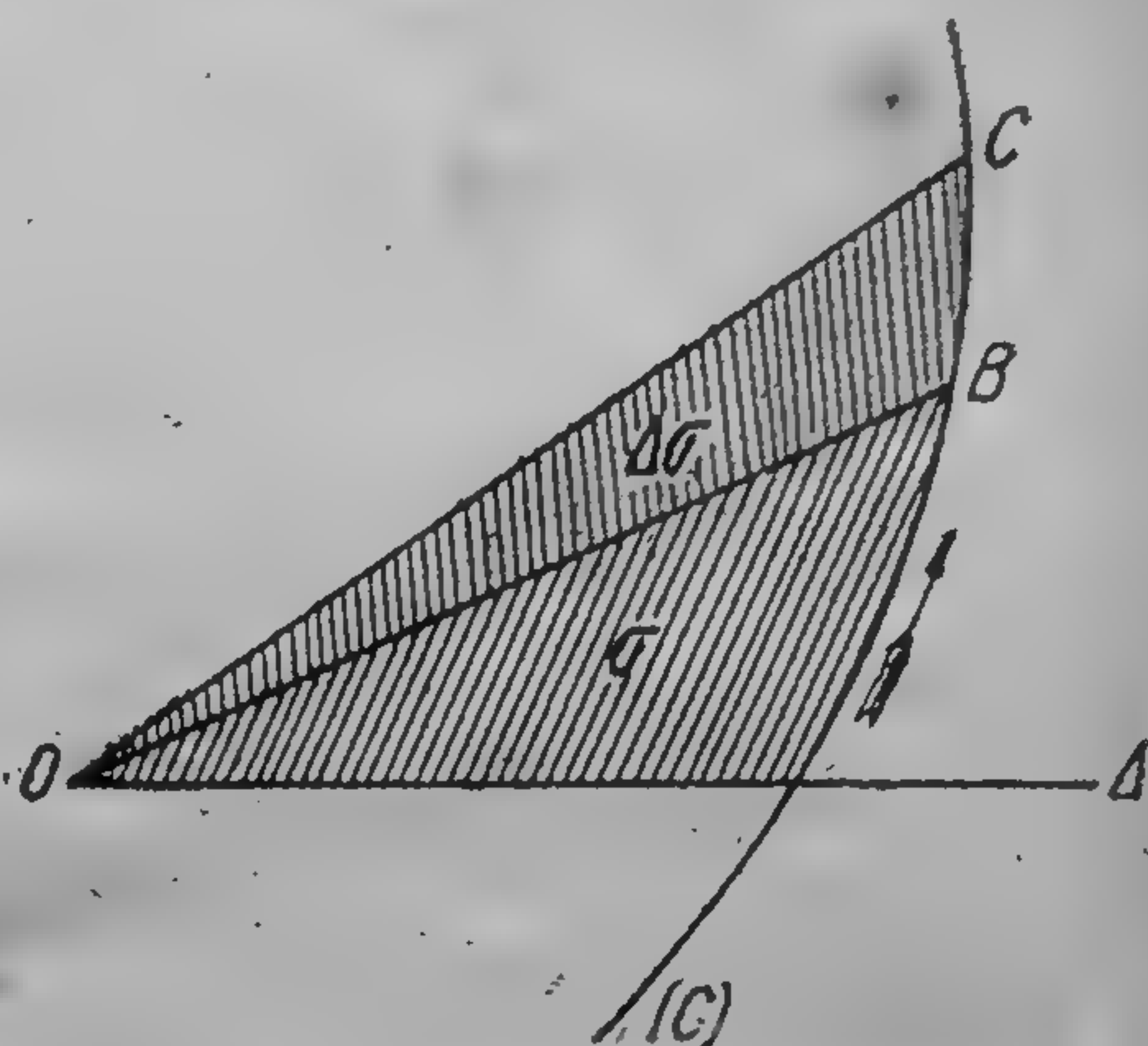


Fig. 153

determinăm aria  $\Delta\sigma$  a sectorului  $OBC$ , limitat de arcul  $\widehat{BC}$  al traiectoriei punctului  $A$  și de razele  $OB$  și  $OC$  și ariile sectoarelor de cerc  $OBB_1$  și  $OC_1C$ . Din fig. 152 se vede că avem:

$$\text{aria } OC_1C > \Delta\sigma > \text{aria } OBB_1.$$

Deoarece aria sectorului de cerc este egală cu jumătatea razei cercului înmulțită cu lungimea arcului, găsim:

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)(R+\Delta r)\Delta\theta > \Delta\sigma > \frac{1}{2}rr\Delta\theta,$$

sau

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta > \Delta\sigma > \frac{1}{2}r^2\Delta\theta.$$

Impărțind ambele părți ale acestei inegalități cu  $\Delta t$ , vom obține:

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} > \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} > \frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t};$$

de aici, trecînd la limită, vom avea:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}. \quad (16.36)$$

Cînd punctul  $B$  se mișcă pe traiectoria sa  $(C)$ , vectorul său de poziție  $\vec{r}$ , descrie o serie oarecare  $\sigma$  (fig. 153); este evident că acea-



stă arie  $\sigma$  este funcție de timpul  $t$ . Din formula (16.36) rezultă că derivata în raport cu timpul a ariei sectorului descris de vectorul  $\bar{r}$  este egală cu  $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ , adică este egală cu modulul vitezei areolare. De aici tragem concluzia că:

$$\Sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt},$$

adică *modulul vitezei areolare este egal cu derivata în raport cu timpul a suprafeței descrise de vectorul de poziție al punctului*. Astfel, se înțelege de ce produsului vectorial  $\bar{\Sigma} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v}$  i s-a dat denumirea de viteză areolară.

Să dăm acum expresia vitezei areolare în coordonate ortogonale, a căror origine se va lua în punctul  $O$ ; partea pozitivă a axei  $Ox$  o vom dirija în lungul semidreptei  $\Delta$ , iar axa  $Oy$ , perpendicular pe semidreapta  $\Delta$ , în planul traiectoriei ( $C$ ).

Conform § 1.1 din capitolul II avem:

$$\frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix}.$$

Deoarece mișcarea punctului are loc în planul  $Oxy$ , atunci  $z = \frac{dz}{dt} = 0$ , și obținem:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & 0 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând acest determinant după regula arătată în § 1.1, vom avea:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \bar{k}, \quad \Sigma = \frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \quad (16.37)$$



Formulele (16.37) sînt echivalente cu formulele (16.35). Pentru a ne convinge de aceasta, ne folosim de formulele (16.22); din ele găsim:

$$x = r \cos \Theta \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \Theta - r \sin \Theta \frac{d\Theta}{dt};$$

$$y = r \sin \Theta \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \Theta + r \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt}$$

De aici vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{r \cos \Theta}{2} \left( \frac{dr}{dt} \sin \Theta + r \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt} \right) - \\ &- \frac{r \sin \Theta}{2} \left( \frac{dr}{dt} \cos \Theta - r \sin \Theta \frac{d\Theta}{dt} \right) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\Theta}{dt} \end{aligned}$$

Noțiunea de viteză areolară, a fost introdusă pentru prima dată de Kepler (1571—1630) în legea a doua despre mișcarea planetelor în jurul soarelui:

*Razele vectoare ale planetelor descriu arii egale în timpuri egale.*

Din această lege rezultă că viteza areolară a unei planete trebuie să fie constantă. În adevăr, din legea lui Kepler rezultă că suprafața  $\sigma$  a sectorului crește proporțional cu timpul, adică

$$\sigma = \text{const} \cdot t;$$

de aici găsim că:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$$

Ca urmare a legii constanței vitezei areolare a unei planete, planeta trebuie să se miște mai repede în periheliu, — partea elipsei mai apropiată de focarul în

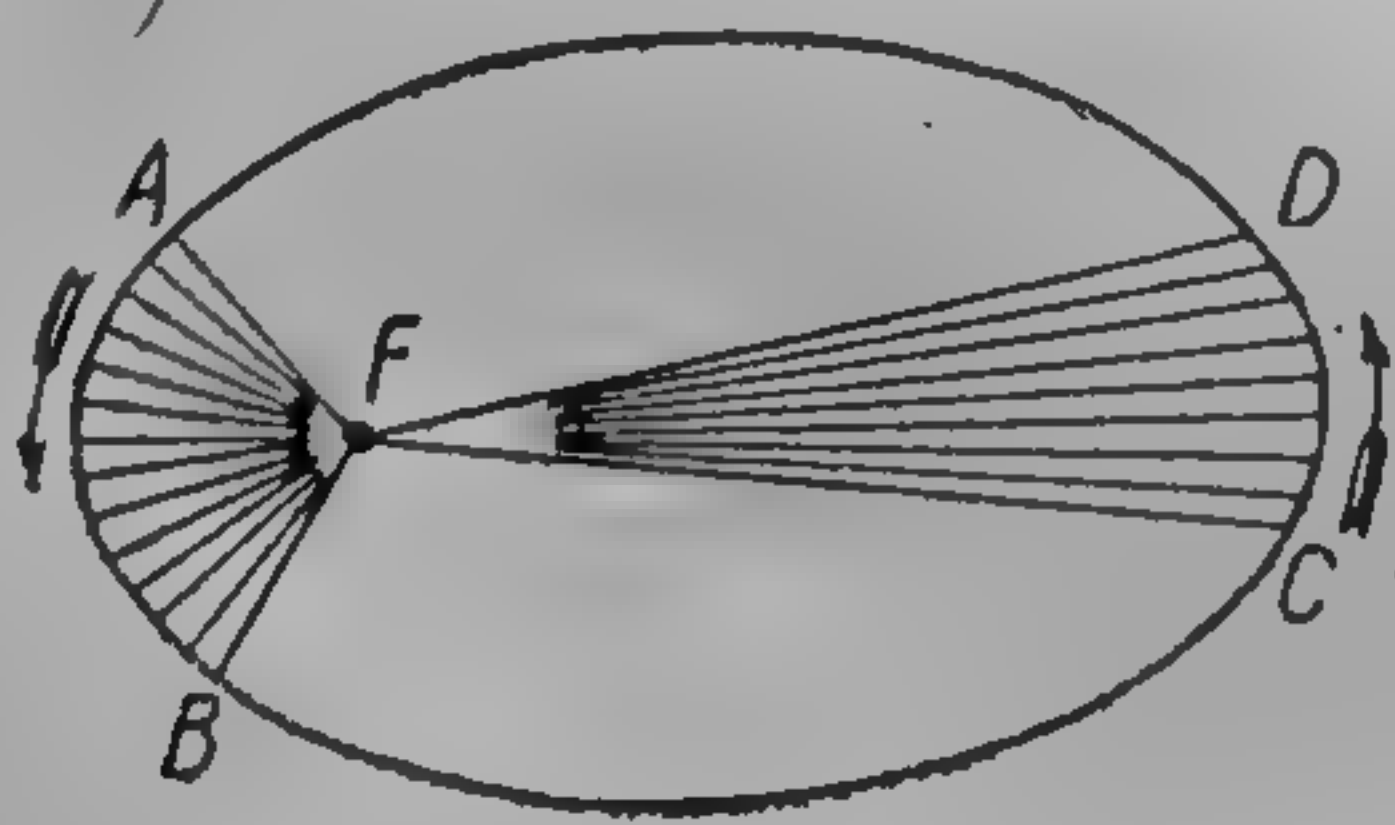


Fig. 154

care se găsește soarele decât în afeliu, — partea elipsei mai îndepărtată de soare. În fig. 154 se presupune că soarele se găsește în focarul  $F$ ; pentru ca suprafețele sectoarelor  $AFB$  și  $CFD$  să fie egale între ele, este necesar ca arcul  $AB$  să fie mai mare decât arcul  $CD$ , adică planeta în periheliu trebuie să parcurgă, în același timp, un drum mai lung decât în afeliu. Pământul nostru se găsește în periheliu, iarna, în jurul lui 1 ianuarie; prin urmare iarna, pământul se învîrtește în



jurul soarelui ceva mai repede decît vara, dar diferența de viteze este neînsemnată din cauza excentricității mici a orbitei pămîntului.

§ 69. Exemple. 42. Să se construiască, folosind formula (16.19) graficul mișcării unui tren și să se găsească viteza trenului exprimată în km/h. Să presupunem că la construcția graficului formulei  $S=f(t)$ , vom măsura pe axa absciselor timpul  $t$  în ore, iar pe axa ordonatelor, drumul  $S$  în kilometri, reprezentînd atît ora cît și kilometrul prin aceeași unitate de lungime; cum într-o oră trenul parcurge circa 50 km, am obține un grafic prea îngust și prea înalt. Pentru ca lățimea și înălțimea graficului să fie apropiate una de alta, vom reprezenta prin aceeași unitate de lungime pe axa absciselor o oră, iar pe axa ordonatelor 50 km; prin aceasta formăm un nou grafic  $S'=f_1(t)$ , unde  $S=50 \cdot S'$ . Deoarece viteza

este egală cu derivata  $\frac{dS}{dt}$ , atunci  $\frac{dS}{dt} = 50 \frac{dS'}{dt}$ . Fie punctul  $O$  care corespunde cu amiaza și cu prima stație. Din graficul de pe fig. 155 se vede că trenul a părăsit prima stație în momentul  $t_1$ ; în momentul  $t_2$ , el a ajuns într-o stație care se găsește la distanța  $S_2=50 \cdot S'_2$  km de prima stație, și a stat în acea stație pînă în momentul  $t_3$ ; în momentul  $t_3$ , el a plecat din acea stație și în momentul  $t_4$  a ajuns în stația următoare careia îi corespunde  $S_4=50 \cdot S'_4$  etc. Deoarece viteza este egală cu derivata  $\frac{dS}{dt}$  și cum din grafic rezultă  $\frac{dS'}{dt} = \operatorname{tg} \alpha'_1$  pentru  $t=t_1$  și  $\frac{dS'}{dt} = \operatorname{tg} \alpha'_3$  pentru  $t=t_3$ , atunci, în sectorul  $(O, S_2)$  trenul a mers cu viteza de  $50 \operatorname{tg} \alpha'_1$  km/h, iar în sectorul  $(S_2, S_4)$  trenul a mers cu viteza de  $50 \operatorname{tg} \alpha'_3$  km/h, mai mare decît viteza precedentă, deoarece  $\alpha'_3 > \alpha'_1$ . Fără a măsura unghiurile  $\alpha'_1$  și  $\alpha'_3$  putem calcula  $\operatorname{tg} \alpha'_1$  și  $\operatorname{tg} \alpha'_3$  direct din grafic. Vom avea:

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = \frac{S'_2}{t_2 - t_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha'_3 = \frac{S'_4 - S'_2}{t_4 - t_3} \text{ etc.}$$

Cu ajutorul graficului se poate determina poziția trenului într-un moment oarecare, rezolvîndu-se problema inversă; astfel, de exemplu, vedem că momentului  $t_6$  îi corespunde drumul parcurs  $S=50 \cdot S'_6$  km.

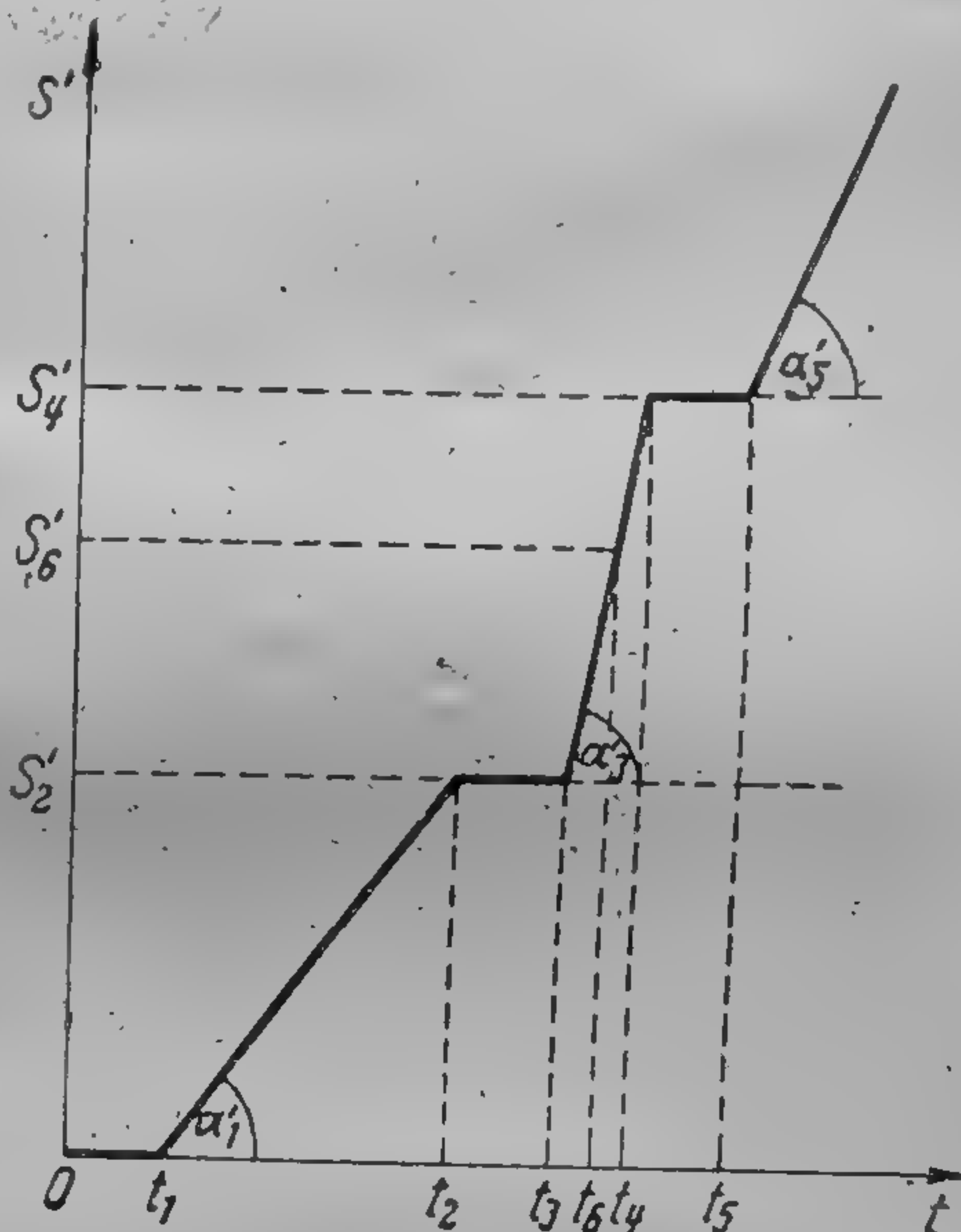


Fig. 155



43. Să se determine viteza unui punct a cărui mișcare este dată prin ecuațiile:

$$x = R(kt - \sin kt),$$

$$y = R(1 - \cos kt)$$

Avem

$$\frac{dx}{dt} = kR(1 - \cos kt) = ky$$

$$\frac{dy}{dt} = kR \sin kt = k \sqrt{R^2 - (R - y)^2}$$

De aici vom obține:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2kR \frac{kt}{2} = k \sqrt{2Ry}.$$

Prin urmare, vom avea:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{kt}{2}\right) = \sqrt{\frac{y}{2R}}, \quad \cos \beta = \cos\left(\frac{kt}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{y}{2R}}.$$

Traectoria punctului examinat se numește *cicloidă*; dacă rotim un cerc cu raza  $R$  pe axa  $Ox$ , fiecare punct de pe circumferință va descrie o cicloidă.

44. Știind că suma distanțelor între un punct oarecare al unei elipse și cele două focare ale ei este egală cu axa mare, să se deducă cinematic construcția tangentei la elipsă. Fie  $F_1$  și  $F_2$  focarele elipsei (fig. 156). Unind un punct oarecare  $A$  al elipsei prin vectorii  $r_1$  și  $r_2$  cu originile în focarele  $F_1$  și  $F_2$ , avem:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

De aici găsim:

$$\frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt} = 0$$

adică după formulele (16.30) vom avea:

$$v_{r_1} + v_{r_2} = 0.$$

Din această formulă rezultă că proiecțiile vitezei punctului, în timpul mișcării lui pe elipsă, pe vectorii  $r_1$  și  $r_2$ , sînt egale între ele ca mărime, dar opuse ca semn. Astfel, dacă proiecția  $v_{r_1}$  a vitezei va fi pozitivă, adică dirijată dinspre focar, proiecția  $v_{r_2}$  va fi negativă, adică dirijată înspre focar, iar ca mărime, aceste două proiecții trebuie să fie egale între ele (fig. 156).

Pentru a găsi viteza  $\bar{v}$ , trebuie să se construiască două triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza comună; la fiecare din aceste triunghiuri, una dintre catete este egală cu valoarea absolută a proiecției considerate a vitezei, după cum se arată în fig. 156. Atunci viteza va fi reprezentată prin această ipotenuză comună și ca urmare a egalității acestor triunghiuri dreptunghice construite, această viteză va împărți unghiul din  $A$  în două unghiuri egale. De aici rezultă că tangenta într-un punct la elipsă este bisectoarea exterioară a unghiului format de dreptele ce unesc acel punct cu focarele elipsei.



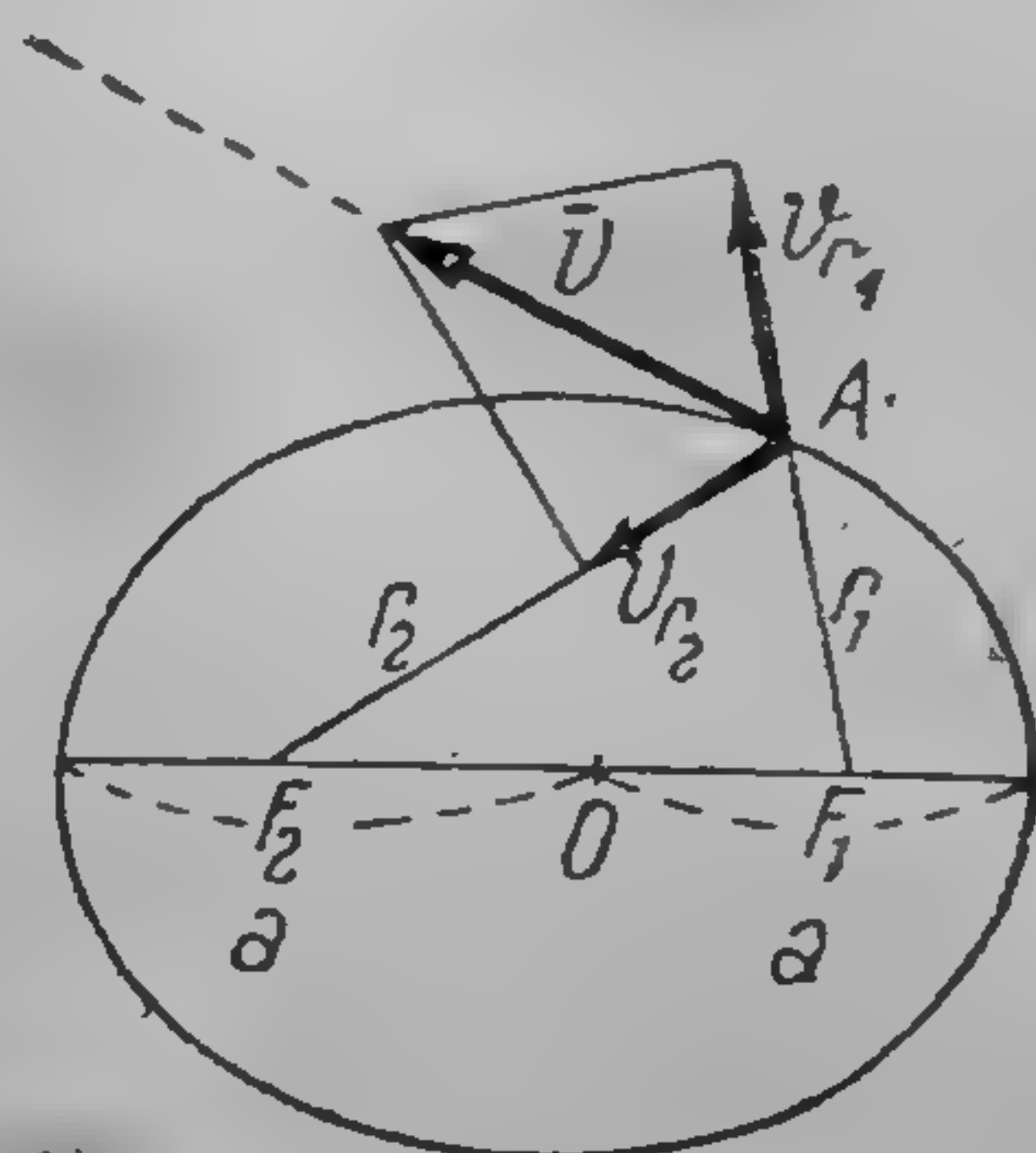


Fig. 156

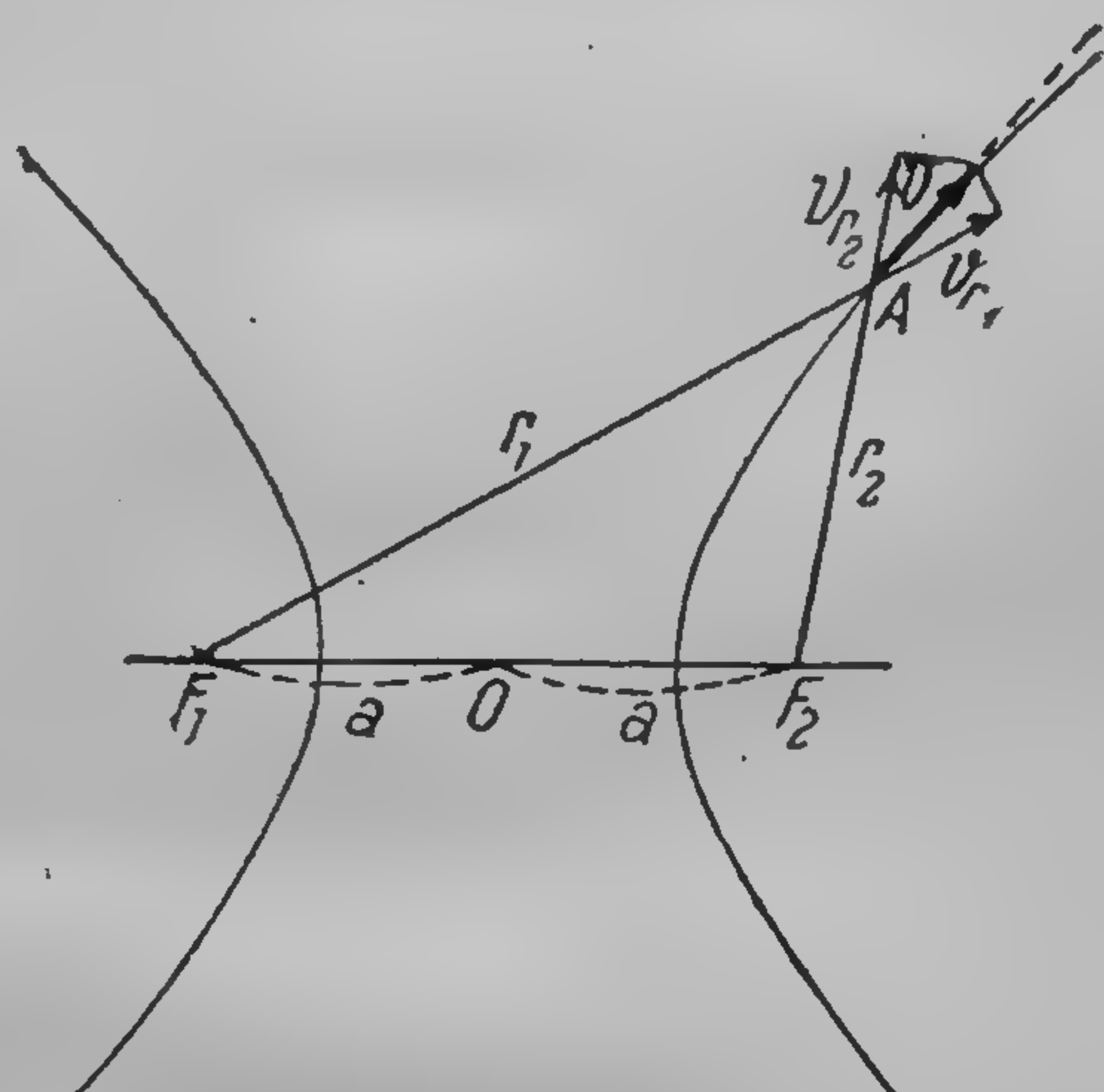


Fig. 157

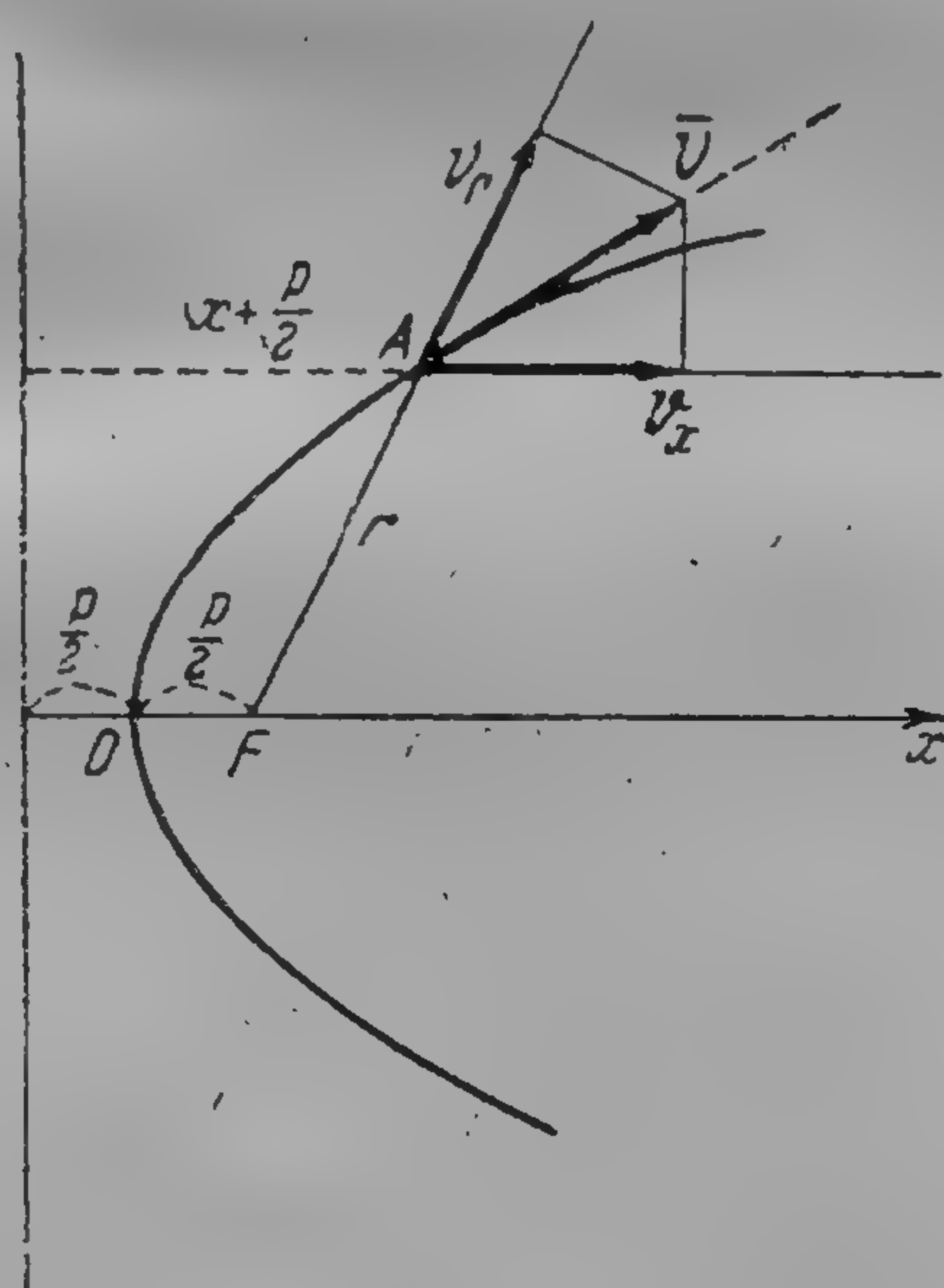


Fig. 158



45. Știind că diferența dintre distanțele de la un punct oarecare al unei hiperbole la cele două focare ale ei este egală cu lungimea axei ei reale, să se deducă cinematic, construcția tangentei la hiperbolă. Fie  $F_1$  și  $F_2$  focarele hiperbolei (fig. 157). Unind un punct oarecare  $A$  al hiperbolei prin vectorii  $\vec{r}_1$  și  $\vec{r}_2$  cu originile în focarele  $F_1$  și  $F_2$ , avem:

$$r_1 - r_2 = 2a$$

De aici găsim:

$$\frac{dr_1}{dt} - \frac{dr_2}{dt} = 0$$

adică după formulele (16.30) vom avea:

$$v_{r_1} = v_{r_2}.$$

Din ultima relație, rezultă că la mișcarea punctului pe hiperbolă, proiecțiile vitezei lui pe vectorii  $\vec{r}_1$  și  $\vec{r}_2$  sînt egale între ele ca mărime și ca semn. Pentru a găsi viteza  $\vec{v}$ , trebuie să se construiască două triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza comună, avînd fiecare dintre ele una din catete egală cu proiecția vitezei considerate, după cum se arată în fig. 157. Viteza va fi reprezentată atunci prin ipotenuza comună și ca urmare a egalității triunghiurilor dreptunghice obținute, această viteză va împărți unghiul din  $A$  în două unghiuri egale. De aici rezultă că tangenta într-un punct la hiperbolă este bisectoarea unghiului format de dreptele ce unesc acel punct cu focarele hiperbolei.

46. Știind că distanțele de la un punct oarecare al unei parabole, pînă la directoare și pînă la focar sînt egale, să se deducă în mod cinematic, construcția tangentei la parabolă. Dacă  $p$  este parametrul parabolei, atunci focarul se află pe axa ei la distanța  $\frac{p}{2}$  de vîrf, iar directoarea parabolei este o dreaptă perpendiculară pe axă și situată la distanța  $\frac{p}{2}$  de vîrf parabolei, directoarea fiind plasată în raport cu vîrf parabolei în partea opusă focarului. Alegînd originea coordonatelor  $O$  în vîrf parabolei și axa  $Ox$  în lungul axei parabolei (fig. 158) pentru orice punct al parabolei vom avea:  $x + \frac{p}{2} = r$ , unde  $r$  este distanța pînă la focar. Derivînd în raport cu timpul ambele părți ale acestei relații, vom obține:  $\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}$  sau  $v_x = v_r$ . Prin urmare, proiecția vitezei pe axa  $Ox$  este egală cu proiecția vitezei pe raza vectoare  $FA$ . Să examinăm un punct oarecare  $A$  al parabolei; ducem prin acest punct prelungirea razei vectoare și dreaptă paralelă la axa absciselor. Măsurînd pe aceste drepte duse, respectiv, proiecțiile  $v_r$  și  $v_x$  și construind pentru determinarea vitezei  $\vec{v}$ , triunghiurile dreptunghice cu ipotenuza comună și catetele  $v_r$  și  $v_x$ , ca și în cazul elipsei și al hiperbolei, vom găsi că viteza va împărți unghiul din punctul  $A$  în două unghiuri egale. De aici rezultă că tangenta la parabolă este bisectoarea unghiului format de prelungirea razei vectoare și a dreptei duse prin punctul dat paralel la axa parabolei.



47. Să se găsească viteza pentru mișcarea (16.16) pe o spirală logaritmică. Utilizând formulele (16.30), obținem:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = r_0 m e^{mt} = mr, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = nr_0 e^{mt} = nr.$$

De aici vom avea:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = r_0 e^{mt} \sqrt{m^2 + n^2} = r \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Din aceste formule vom găsi:

$$\operatorname{tg} \left( \widehat{v v_r} \right) = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{n}{m},$$

adică viteza este înclinată față de raza-vectoare sub un unghi constant.

48. Să se găsească viteza pentru mișcarea determinată prin formulele:

$$x = a \sin kt, \quad y = b \cos kt, \quad z = h \frac{kt}{2\pi}.$$

Procedînd ca în § 64, tragem concluzia că mișcarea se efectuează după o elice care înfășoară un cilindru eliptic, deoarece:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Avem:

$$\frac{dx}{dt} = ka \cos kt = k \frac{a}{b} \cos kt = k \frac{a}{b} y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -kb \sin kt = -k \frac{b}{a} a \sin kt = -k \frac{b}{a} x,$$

$$\frac{dz}{dt} = h \frac{k}{2\pi}.$$

De aici găsim:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = k \sqrt{a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

și

$$\cos \alpha = \frac{a \cos kt}{\sqrt{a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt + \frac{h^2}{4\pi^2}}}$$

$$\cos \beta = \frac{b \sin kt}{\sqrt{a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt + \frac{h^2}{4\pi^2}}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt + \frac{h^2}{4\pi^2}}}$$



Eliminând timpul  $t$ , vom obține:

$$v = k \sqrt{a^2 \frac{y^2}{b^2} + b^2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

Deoarece  $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ , această formulă se mai poate scrie:

$$v = k \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} - x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

Din geometria analitică se știe că  $a^2 - b^2 = c^2$ , unde  $c$  este distanța de la centrul elipsei până la focarul ei și că  $\frac{c}{a} = e$ , unde  $e$  este excentricitatea elipsei. De aceea vom obține:

$$v = k \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} - e^2 x^2}$$

De aici vom avea:

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} - e^2 x^2}}$$

Pentru  $e=0$ , cilindrul eliptic va deveni circular și vom obține rezultatele găsite la § 67.

49. Se presupune că un punct se mișcă într-un plan cu viteza areolară constantă în raport cu polul  $O$  — un punct oarecare fix al aceluși plan — și că pătratul vitezei punctului este egal cu  $\frac{n^2}{r^2}$  unde  $n$  este o constantă oarecare, iar  $r$  este raza-vectoare dusă în punctul mobil din polul  $O$ . Să se determine raza vectoare  $r$  în funcție de timpul  $t$ , dacă se știe că pentru  $t=0$  avem  $r=0$ . Deoarece viteza areolară este constantă, trebuie să avem:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

unde  $C$  este constantă. Din formula (16.31) avem:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

dar, deoarece

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

vom obține:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}.$$



Deoarece după condițiile problemei trebuie să avem  $v^2 = \frac{n^2}{r^2}$ , găsim:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{n^2}{r^2},$$

de unde rezultă că trebuie să avem  $n^2 > C^2$ .

De aici deducem:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{n^2 - C^2}{r^2} = \frac{k^2}{r^2}.$$

Extrăgând rădăcina pătrată, vom avea:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{k}{r},$$

sau

$$rdr = \pm kdt,$$

adică

$$d\left(\frac{r^2}{2}\right) = d(\pm kt).$$

Dacă diferențialele sînt egale între ele, atunci funcțiile trebuie să difere cu o constantă, și anume:

$$\frac{r^2}{2} = \pm kt + \text{const.}$$

Deoarece pentru  $t=0$  trebuie să avem  $r=0$ , tragem concluzia că  $\text{const}=0$  și dintre cele două semne trebuie luat semnul plus. În acest fel, vom obține:

$$\frac{r^2}{2} = kt,$$

sau

$$r = \sqrt{2kt}.$$



## CAPITOLUL XVII

### ACCELERAȚIA UNUI PUNCT

§ 70. Determinarea accelerației unui punct. Dacă un punct material are o mișcare rectilinie și uniformă, atunci în toate punctele traiectoriei lui caracterul mișcării va fi același, direcția și sensul de mișcare și viteza rămân constante; prin urmare, la acest fel de mișcare nu poate exista nici un fel de variație a mișcării. Pentru ca mișcarea să varieze, viteza punctului trebuie să se modifice în decursul timpului. Variația vectorului viteză se poate produce astfel încât direcția și sensul vitezei să rămână invariabile dar să se modifice numai modulul vectorului viteză, modulul vectorului viteză să rămână invariabil dar să se schimbe numai direcția vitezei sau, în sfârșit, în așa fel încât să varieze deodată și modulul și direcția vectorului viteză. Pentru a se reprezenta variația vectorului viteză al punctului, se folosește următoarea construcție. Fie  $(C)$  traiectoria punctului  $A$ ; construim în toate punctele acestei traiectorii, vectorii viteză  $\vec{v}$  ai punctului  $A$ . Luăm un punct oarecare  $O$  arbitrar în spațiu și mutăm în el, paralel cu ei însuși, toți vectorii vitezei  $\vec{v}$  ai punctului  $A$ ; locul geometric al extremităților vectorilor  $\vec{v}$ , va fi o curbă, care se numește *hodograful* vitezelor. Deoarece conform construcției, vectorii de poziție ai punctelor hodografului sînt vectorii viteză ai punctului  $A$ , urmează că, pe hodograf nu numai că se poate vedea, dar se pot măsura variația direcției și modulului vectorului viteză al punctului  $A$ . Să raportăm mișcarea punctului  $A$  la sistemul ortogonal de axe de coordonate  $Oxyz$ ; fie

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t)$$

ecuațiile traiectoriei punctului  $A$  în coordonate parametrice. Să examinăm sistemul ortogonal de axe de coordonate  $O'XYZ$ , paralele cu axele  $Oxyz$ . Nu este greu de dovedit cum se pot alcătui ecuațiile hodografului în raport cu axele  $O'XYZ$ . Deoarece axele  $O'XYZ$  sînt paralele la axele  $Oxyz$  și vectorii de poziție ai punctelor hodografului sînt vectorii viteză ai punctului  $A$ , atunci coor-



donatele  $(X, Y, Z)$  ale punctelor hodografului, trebuie să fie egale cu proiecțiile  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $v_z = \frac{dz}{dt}$ , ale vitezei  $\vec{v}$  pe axele  $Oxyz$ , adică vom avea:

$$X = f'_1(t), \quad Y = f'_2(t), \quad Z = f'_3(t). \quad (17.1)$$

Ca să obținem de aici ecuația hodografului în formă analitică, este suficient să eliminăm timpul din ecuațiile (17.1). De exemplu, dacă mișcarea punctului ni se dă prin ecuațiile

$$x = a \sin kt, \quad y = b \cos kt,$$

vom obține:

$$X = +ka \cos kt, \quad Y = -kb \sin kt.$$

De aici vom avea:

$$\frac{X}{ka} = \cos kt, \quad \frac{Y}{kb} = -\sin kt,$$

sau

$$\frac{X^2}{k^2 a^2} + \frac{Y^2}{k^2 b^2} = 1.$$

Vedem că hodograful este o elipsă asemenea elipsei pe care se mișcă punctul  $A$ , iar raportul dintre semiaxele hodografului și semiaxele traiectoriei punctului  $A$  este egal cu  $k$ . Este evident că pentru mișcarea rectilinie uniformă, hodograful se reduce la un punct, iar pentru mișcarea rectilinie neuniformă, hodograful va fi un segment de dreaptă.

Fie  $(\Gamma)$  hodograful vitezei punctului  $A$  (fig. 159); presupunem că momentului  $t$  îi corespunde vectorul  $\vec{OM}$  care reprezintă vectorul viteză  $\vec{v}$  al punctului  $A$ , iar la momentul  $t + \Delta t$  îi corespunde vectorul  $\vec{ON}$ , care reprezintă vectorul viteză  $\vec{v} + \Delta \vec{v}$ . Atunci  $\Delta \vec{v} = \vec{MN}$ , și raportul  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  va reprezenta viteza medie a punctului pe hodograf, care se numește *accelerație medie* a punctului  $A$ .

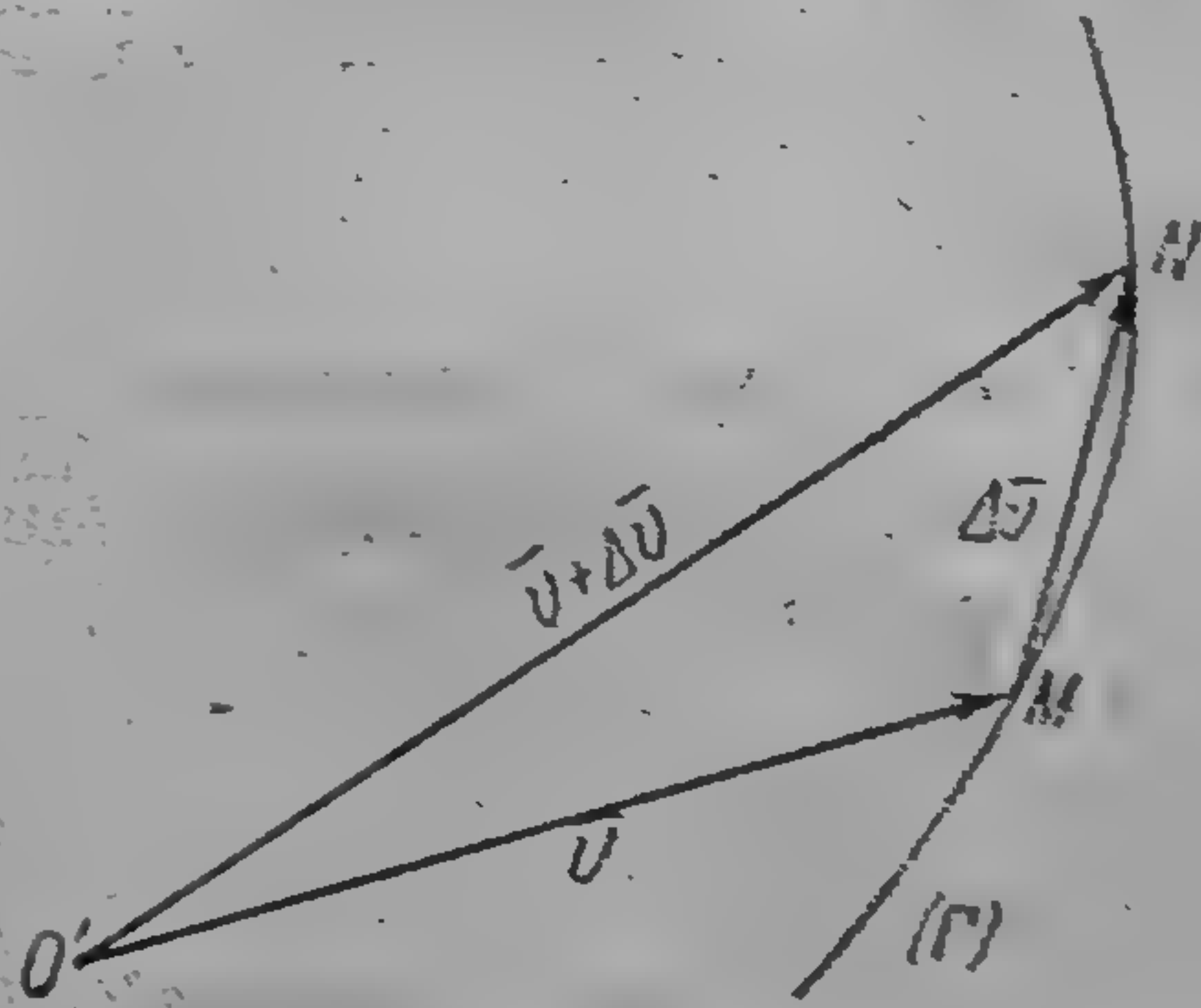


Fig. 159



Trecînd la limită, vom obține viteza punctului pe hodograf în momentul  $t$ , care măsoară modul cum variază vectorul viteză al punctului  $A$  și este egală cu prima derivată vectorială  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  a vectorului viteză al punctului  $A$  în raport cu timpul. Viteza în momentul  $t$  a unui punct de pe hodograful vitezelor se numește accelerația punctului  $A$  în momentul  $t$ . Deoarece accelerația este prima derivată vectorială a vectorului viteză  $\vec{v}$ , rezultă în baza § 65, că accelerația este un vector; acest ultim rezultat trebuie verificat. În primul rînd în § 66 a fost dedusă formula (16.23), și anume,  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , care arată că viteza mișcării compuse este suma vectorială a vitezelor mișcărilor componente. Derivînd geometric ambele părți ale acestei egalități, în raport cu timpul vom obține:  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{d\vec{v}_2}{dt}$ . În această egalitate  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  este accelerația în mișcarea compusă. În ce privește derivatele  $\frac{d\vec{v}_1}{dt}$  și  $\frac{d\vec{v}_2}{dt}$ , ele reprezintă accelerația în prima mișcare componentă și accelerația în a doua mișcare componentă, dar aceste din urmă accelerații depind în general nu numai de proprietățile primei mișcări în ipoteza că numai ea ar avea loc sau numai de proprietățile mișcării a doua, ci de faptul că în general viteza celei de-a doua mișcări influențează variația vitezei primei mișcări, și că viteza primei mișcări influențează variația vitezei celei de-a doua mișcări; această problemă se va studia mai amănunțit în capitolul XXIII. Deoarece derivatele  $\frac{d\vec{v}_1}{dt}$  și  $\frac{d\vec{v}_2}{dt}$  au module, direcție și sens și li se aplică regula de adunare vectorială, rezultă că accelerațiile  $\frac{d\vec{v}_1}{dt}$  și  $\frac{d\vec{v}_2}{dt}$  sînt vectori. În al doilea rînd, problema referitoare la adunarea accelerațiilor se mai poate pune și altfel, din punct de vedere fizic, așa cum am procedat și în cazul vitezei. În vol. II al cursului de față vom vedea că interacțiunea mecanică dintre corpurile și punctele materiale libere se reduce la faptul că aceste corpuri și puncte materiale imprimă unul altuia o accelerație. Fie punctul material liber  $A$ ; sub acțiunea punctului material  $B$ , punctul  $A$  capătă o accelerație oarecare. Vom presupune apoi că punctul  $B$  nu ar acționa asupra punctului  $A$ , asupra căruia ar acționa însă un alt punct material  $C$  care îi imprimă o altă accelerație oarecare. Se poate pune întrebarea, ce accelerație va avea punctul  $A$ , dacă cele două puncte  $B$  și  $C$  acționează concomitent. Această problemă nu poate fi rezolvată matematic,



dar pe calea studierii fenomenelor naturale s-a găsit că prin acțiunea concomitentă a punctelor materiale  $B$  și  $C$ , punctul material  $A$  va căpăta o accelerație egală cu suma vectorială a accelerațiilor imprimare de celelalte puncte. Astfel, examinând problema din punct de vedere matematic și fizic, găsim că accelerațiile punctului se adună vectorial și în același timp ele au module, direcții și sensuri. Prin urmare, accelerația punctului este un vector. Vectorul accelerației al punctului este aplicat acestui punct. Notînd vectorul accelerației al punctului prin  $\vec{a}$  avem:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (17.2)$$

În cuvinte, formula (17.2) se poate exprima astfel:

*Vectorul accelerație al unui punct este prima derivată vectorială în raport cu timpul, a vectorului viteză al acestui punct.*

La fel ca viteza, și vectorul accelerație se poate reprezenta convențional printr-un segment de dreaptă orientat, care are o lungime egală cu modulul accelerației, unitatea de accelerație fiind exprimată la o scară oarecare, printr-o anumită unitate de lungime.

Folosind formula (16.24) obținem din formula (17.2):

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (17.3)$$

Această formulă se poate exprima în felul următor:

*Vectorul accelerație al unui punct este egal cu derivata de ordinul doi în raport cu timpul, a vectorului de poziție al acestui punct.*

Folosind raționamente similare, s-ar putea obține accelerații de ordin superior, exprimate prin derivatele  $\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$ ,  $\frac{d^4\vec{r}}{dt^4}$ , ... În cursul de mecanică al acad. O. I. Somov (1815—1876) sînt expuse cercetările acestuia asupra accelerațiilor de diferite ordine, iar în „Notele Academiei de Științe” din anul 1865 se găsește articolul său „Despre accelerația de diferite ordine în mișcarea relativă”. Toate aceste studii au importanță în cinematica mecanismelor.

Legile naturii sînt însă astfel, încît este de prisos să ne ocupăm în cursul general de mecanică teoretică cu accelerațiile de ordine superioare accelerației  $\vec{a}$ , deoarece acțiunea reciprocă a



corpurilor materiale, adică forțele, dau naștere accelerației  $\bar{a}$ , și invers, cunoscând accelerațiile  $\bar{a}$ , se pot găsi forțele ce provoacă aceste accelerații. Aplicând formula de dezvoltare în serie a lui Taylor, vom avea:

$$\bar{r}(t+\Delta t) = \bar{r}(t) + \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \Delta t + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} \Delta t^2 + \dots;$$

de aici, ținând seamă de formulele (16.24) și (17.3), obținem:

$$\bar{r}(t+\Delta t) = \bar{r}(t) + \bar{v}(t) \Delta t + \frac{1}{1 \cdot 2} \bar{a}(t) \Delta t^2 + \dots$$

Din această formulă, cunoscând valoarea vectorilor  $\bar{r}$ ,  $\bar{v}$ , și  $\bar{a}$  pentru momentul  $t$ , se poate găsi cu precizie pînă la infiniți mici de ordinul doi inclusiv, valoarea vectorului de poziție  $r$  pentru momentul  $t + \Delta t$ .

§ 71. Accelerația unui punct în coordonate ortogonale și în coordonate polare în plan. Pornind de la formula (17.3), nu este greu să se obțină proiecțiile accelerației  $a$  pe axele fixe ale unui sistem ortogonal de axe de coordonate. Deoarece

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z,$$

din formulele (16.21), și (17.3) vom obține:

$$\bar{a} = \bar{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k} \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Introducînd proiecțiile  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  ale accelerației  $\bar{a}$  pe axele de coordonate  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , vom avea:

$$\bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z = \bar{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k} \frac{d^2z}{dt^2},$$

adică:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (17.4)$$

Astfel, proiecția accelerației pe oricare din axele de coordonate ortogonale fixe, este egală cu derivata a doua, în raport cu timpul, a coordonatei corespunzătoare a punctului mobil.

Din formulele (17.4) rezultă că modulul  $a$  al accelerației, este

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad (17.5)$$



unde radicalul va fi luat în valoare absolută. Vom nota prin  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  unghiurile formate de vectorul accelerației al punctului cu axele de coordonate  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ; știm că trebuie să avem:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{a_x}{a} = \frac{1}{a} \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ \cos \beta' &= \frac{a_y}{a} = \frac{1}{a} \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \cos \gamma' &= \frac{a_z}{a} = \frac{1}{a} \frac{d^2 z}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

unde mărimea  $a$  este determinată prin formula (17.5). Deoarece coordonatele  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ale punctului sînt date prin formulele (16.2) sau (16.3), atunci pentru mărimile  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $\cos \alpha'$ ,  $\cos \beta'$ ,  $\cos \gamma'$  obținem expresiile (17.4) și (17.6) în funcție de timpul  $t$ . Folosindu-ne de formulele (16.2) sau (16.3), se poate elimina timpul  $t$  din aceste expresii, reprezentîndu-le ca funcții de coordonatele punctului. Astfel, putem rezolva problemele în două feluri: sau să găsim mărimile  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $\cos \alpha'$ ,  $\cos \beta'$ ,  $\cos \gamma'$ , pentru un moment dat, sau să le găsim pentru un punct dat al traiectoriei. Să examinăm, de exemplu, o mișcare uniform accelerată care se produce sub acțiunea gravitației după legea  $x = \frac{gt^2}{2}$ , unde  $g$  este accelerația gravitației la căderea liberă; vom obține pentru proiecțiile accelerației pe axa  $Ox$  valoarea:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = g,$$

adică ajungem la confirmarea faptului că în formula  $x = \frac{gt^2}{2}$  mărimea  $g$  este în adevăr o accelerație. Este evident că în acest caz accelerația coincide cu proiecția sa. Pentru mișcarea pe circumferința unui cerc determinată prin ecuațiile

$$x = R \cos kt, \quad y = R \sin kt,$$

vom avea succesiv:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 R \cos kt = -k^2 x,$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 R \sin kt = -k^2 y,$$

$$a = \sqrt{k^4 R^2 \cos^2 kt + k^4 R^2 \sin^2 kt} = \sqrt{k^4 x^2 + k^4 y^2} = k^2 R$$

$$\cos \alpha' = -\cos kt = -\frac{x}{R}, \quad \cos \beta' = -\sin kt = -\frac{y}{R}.$$



Vedem că în mișcarea circulară, modulul accelerației este constant, și vectorul accelerație este dirijat de-a lungul razei de la circumferință spre centrul ei.

Să găsim acum expresia accelerației în coordonate polare, pentru cazul mișcării punctului într-un plan. În acest scop, vom pleca de la formulele (17.2). Folosindu-ne de formulele (16.29), vom obține:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} \left( \bar{r}^0 \frac{dr}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left( \bar{n}^0 r \frac{d\theta}{dt} \right),$$

sau

$$a = \frac{dr^0}{dt} \frac{dr}{dt} + \bar{r}^0 \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{d\bar{n}^0}{dt} r \frac{d\theta}{dt} + \bar{n}^0 \frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} \right).$$

Folosind la determinarea derivatelor  $\frac{d\bar{r}^0}{dt}$  și  $\frac{d\bar{n}^0}{dt}$  formula (16.22), și observînd că rotirea cu un unghi drept a vectorului  $\bar{n}^0$ , în sensul rotirii vectorului de poziție al punctului, îl va face anti-paralel cu vectorul  $\bar{r}^0$ , vom avea:

$$\frac{d\bar{r}^0}{dt} + \bar{n}^0 \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\bar{n}^0}{dt} = -\bar{r}^0 \frac{d\theta}{dt}.$$

În acest fel, vom obține:

$$\bar{a} = \bar{n}^0 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \bar{r}^0 \frac{d^2 r}{dt^2} - \bar{r}^0 r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \bar{n}^0 \frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} \right).$$

Notînd prin  $a_r, a_\theta$  proiecțiile accelerației pe axele mobile de coordonate, reprezentate în fig. 150, și observînd că:

$$\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} \right) = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

vom găsi

$$\bar{r}^0 a_r + \bar{n}^0 a_\theta = \bar{r}^0 \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \bar{n}^0 \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right].$$

În acest fel, ajungem la următoarele formule:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (17.7)$$

Să presupunem că mișcarea punctului este astfel, încît viteza areolară a punctului, determinată prin formula (16.35), va fi constantă, adică vom avea:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$



unde  $C$  este constant. Din a doua din formula (17.7) vedem că în acest caz trebuie să avem  $a_\theta = 0$ , adică accelerația este dirijată de-a lungul vectorului de poziție. Deoarece avem:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

în acest caz vom obține:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3}; \quad (17.8)$$

prin urmare, pentru mișcarea la care viteza areolară este constantă, accelerația este dirijată pe direcția vectorului de poziție al punctului și depinde de modulul ei și de a doua derivată a ei în raport cu timpul.

§ 72. Proiecțiile accelerației unui punct pe triedrul fundamental. Lectura acestui paragraf impune cunoașterea unor noțiuni de geometrie; cititorul care nu le posedă, va găsi indicațiile respective în aplicațiile de la sfârșitul cinematicii.

Să examinăm traiectoria  $(C)$  a punctului  $A$  și să presupunem că punctul mobil  $A$ , se găsește în momentul  $t$  în punctul  $B$  al traiectoriei sale (fig. 160), iar mișcarea punctului  $A$  se produce în sensul indicat în fig. 160 prin săgeți. Să ducem în punctul  $B$  tangenta  $B\tau$  la traiectoria  $(C)$  în sensul mișcării punctului  $A$ , și să construim în punctul  $B$  două normale pe curba  $(C)$  normala principală dirijînd-o în sensul concavității curbei  $(C)$ , binormala  $Bb$ , dirijînd-o astfel încît triedrul  $B\tau nb$  obținut prin aceasta, să fie un triedru drept la fel ca și triedrul  $Oxyz$ , adică suprapunînd aceste triedre, tangenta  $B\tau$  să coincidă cu axa  $Ox$ , normala  $Bn$  cu axa  $Oy$  și binormala  $Bb$  cu axa  $Oz$ . Triedrul drept obținut  $B\tau nb$  numit *triedru fundamental* îl vom considera ca sistem de coordonate pe ale cărui axe vom proiecta vectorul accelerație  $\vec{a}$  al punctului  $A$ . Acest nou sistem de axe de coordonate ortogonale,

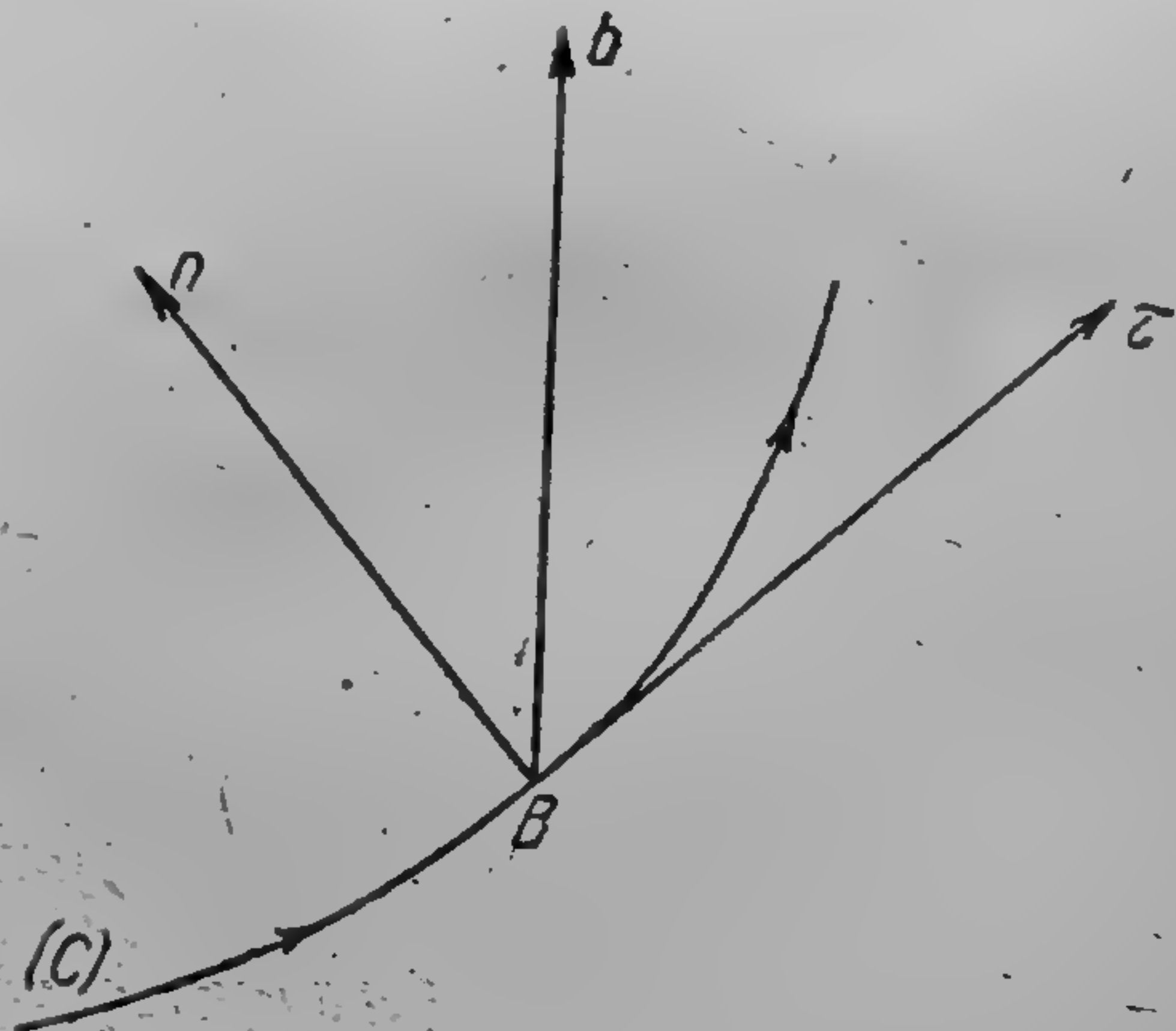


Fig. 160







Din această concluzie rezultă în primul rând că:

*Proiecția accelerației unui punct de binormală este egală cu zero.*

Astfel, notînd proiecțiile accelerației  $\bar{a}$  pe axele  $B\tau$ ,  $Bn$ ,  $Bb$  respectiv prin  $a_\tau$ ,  $a_n$ ,  $a_b$ , avem:  $a_b = 0$ . Deci, rămîn de găsit numai proiecțiile  $a_\tau$  și  $a_n$  (fig. 162). Pentru determinarea acestor două proiecții utilizăm un raționament analog cu cel folosit la deducția formulei (16.29) pentru exprimarea vitezei în coordonate polare. Notăm vectorul unitar al tangentei  $B\tau$  în sensul mișcării punctului  $A$ , prin  $\bar{\tau}^0$ ; atunci vom avea:

$$\bar{v} = \bar{\tau}^0 v, \quad (17.9)$$

unde ambii factori din partea dreaptă depind, în general, de timp. Factorul  $v$  depinde de timp, deoarece modulul vectorului viteză este variabil în timp, vectorul  $\bar{\tau}^0$  depinde de timp deoa-

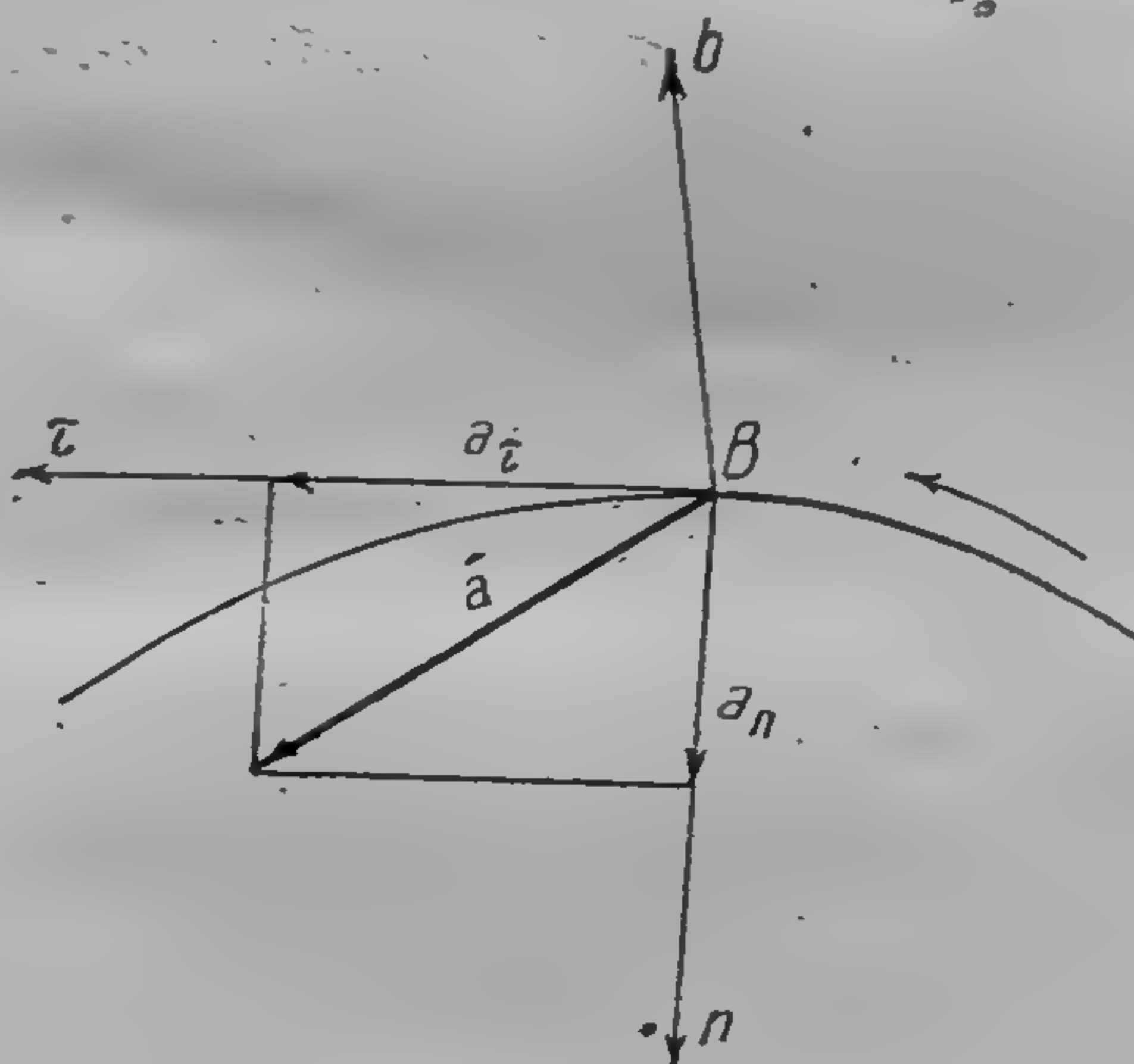


Fig. 162

rece, cu excepția mișcării rectilinii, tangenta  $B\tau$  își schimbă direcția. Deoarece vectorul accelerație este egal cu derivata întâi a vectorului viteză în raport cu timpul, avem:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\tau}^0 \frac{dv}{dt} + \frac{d\bar{\tau}^0}{dt} v.$$

Aplicînd derivatei  $\frac{d\bar{\tau}^0}{dt}$  formula (16.22), care a fost dedusă în § 65 pentru un factor cu modul constant care se rotește într-un



plan fix și care, după cum se vede ușor, se poate extinde și asupra vectorului  $\bar{\tau}^0$ , vom obține:

$$\frac{d\bar{\tau}^0}{dt} = \bar{n}^0 \left| \frac{dz}{dt} \right|$$

unde  $\left| \frac{dz}{dt} \right|$  este valoarea absolută a vitezei unghiulare a rotirii vectorului  $\bar{v}$  în planul osculator, iar  $\bar{n}^0$  este vectorul unitar dus în planul osculator perpendicular la vectorul  $\bar{\tau}^0$ , în sensul rotirii lui, adică dus în direcția normalei principale, în sensul concavității traiectoriei. Din fig. 161, vedem că derivata  $\frac{dz}{dt}$  este limita raportului dintre unghiul a două tangente vecine  $\Delta\alpha$  și intervalul de timp  $\Delta t$ , când  $\Delta t$  tinde către zero. În acest fel, obținem:

$$\bar{a} = \bar{\tau}^0 \frac{dv}{dt} + \bar{n}^0 v \left| \frac{dz}{dt} \right|.$$

Vedem că vectorul  $\bar{a}$  se compune din doi vectori: unul care este dirijat după tangentă, avînd proiecția pe sensul pozitiv al tangentei egală cu  $\frac{dv}{dt}$ , și celălalt, dirijat după normala principală în sensul concavității traiectoriei, a cărei proiecție pe această normală principală este egală cu  $v \left| \frac{dz}{dt} \right|$ . Pentru a găsi expresia derivatei  $\left| \frac{dz}{dt} \right|$  o vom reprezenta în felul următor

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| = \left| \frac{dz}{ds} \right| \left| \frac{ds}{dt} \right| = v \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$

dar  $\left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$  este curbura traiectoriei, egală cu  $\frac{1}{\rho}$ , unde  $\rho$  este raza de curbură; de aceea

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| = \frac{v}{\rho}.$$

Introducînd această valoare a derivatei  $\left| \frac{dz}{dt} \right|$  în expresia precedentă a vectorului  $\bar{a}$ , obținem:

$$\bar{a} = \bar{\tau}^0 \frac{dv}{dt} + \bar{n}^0 \frac{v^2}{\rho}. \quad (17.10)$$



De aici găsim următoarele formule pentru proiecțiile  $a_\tau$ ,  $a_n$ ,  $a_b$  ale vectorului accelerației  $\bar{a}$  pe tangentă, normală principală și binormală:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \quad (17.11)$$

Din aceste formule, tragem în primul rînd concluzia că proiecția accelerației pe normala principală poate să fie tot timpul egală cu zero, numai în cazul cînd în toate punctele traiectoriei  $\rho = \infty$ , adică dacă traiectoria punctului este o linie dreaptă; în cazul acesta, accelerația totală coincide cu proiecția  $a_\tau$ . În ce privește proiecția accelerației pe tangentă, ea este egală cu zero, dacă modulul vitezei este constant. Dacă modulul vitezei crește în decursul timpului, atunci  $a_\tau > 0$ , adică accelerația  $\bar{a}$  este dirijată în sensul mișcării punctului, cum se arată în fig. 162; dacă însă modulul vitezei scade în decursul timpului, atunci  $a_\tau < 0$ , și accelerația  $\bar{a}$  este dirijată în sens contrar mișcării, adică în fig. 162 vectorul  $\bar{a}$  trebuie să fie situat în partea dreaptă a normalei principale  $Bn$ . Din formula (17.10) expresia modulului  $a$  al accelerației este

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \quad (17.12)$$

unde radicalul este luat în valoare absolută. Cosinuşii unghiurilor vectorului accelerație  $\bar{a}$ , formați cu tangenta și normala principală, vor fi egali respectiv cu  $\frac{a_\tau}{a}$  și  $\frac{a_n}{a}$ . Vectorul  $\bar{a}_\tau = \bar{a}^0 \frac{dv}{dt}$  se numește uneori și accelerație tangențială, iar vectorul  $\bar{a}_n = \bar{a}^0 \frac{v^2}{\rho}$  accelerație normală.

**§ 73. Accelerația punctului în mișcare circulară.** Să aplicăm formulele precedente la studiul accelerației în mișcarea circulară. Presupunînd că punctul se mișcă pe un cerc cu raza  $R$ , vom nota prin  $\omega$  viteza unghiulară a punctului mobil, unde  $\omega$  în cazul general va fi funcție de timp. Atunci, conform formulei (16.33), modulul  $v$  al vitezei  $\bar{v}$  a punctului va fi egal cu  $v = R |\omega|$ . Deoarece raza de curbura  $\rho$  a cercului este egală cu raza lui  $R$ , atunci din formulele (17.10) obținem:

$$\left. \begin{aligned} a_\tau &= \frac{d(R|\omega|)}{dt} = R \frac{d|\omega|}{dt} \\ a_n &= \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$



Dacă viteza unghiulară  $\omega$  depinde de timp, atunci ambele proiecții  $a_\tau$  și  $a_n$ , trebuie să fie diferite de zero. Să presupunem că valoarea absolută  $|\omega|$  a vitezei unghiulare, scade în decursul timpului; atunci mărimea  $\frac{d|\omega|}{dt}$  va fi negativă, și proiecția  $a_\tau$  va fi dirijată în sens opus mișcării punctului pe circumferință, deoarece sensul pozitiv al tangentei se consideră de obicei în sensul

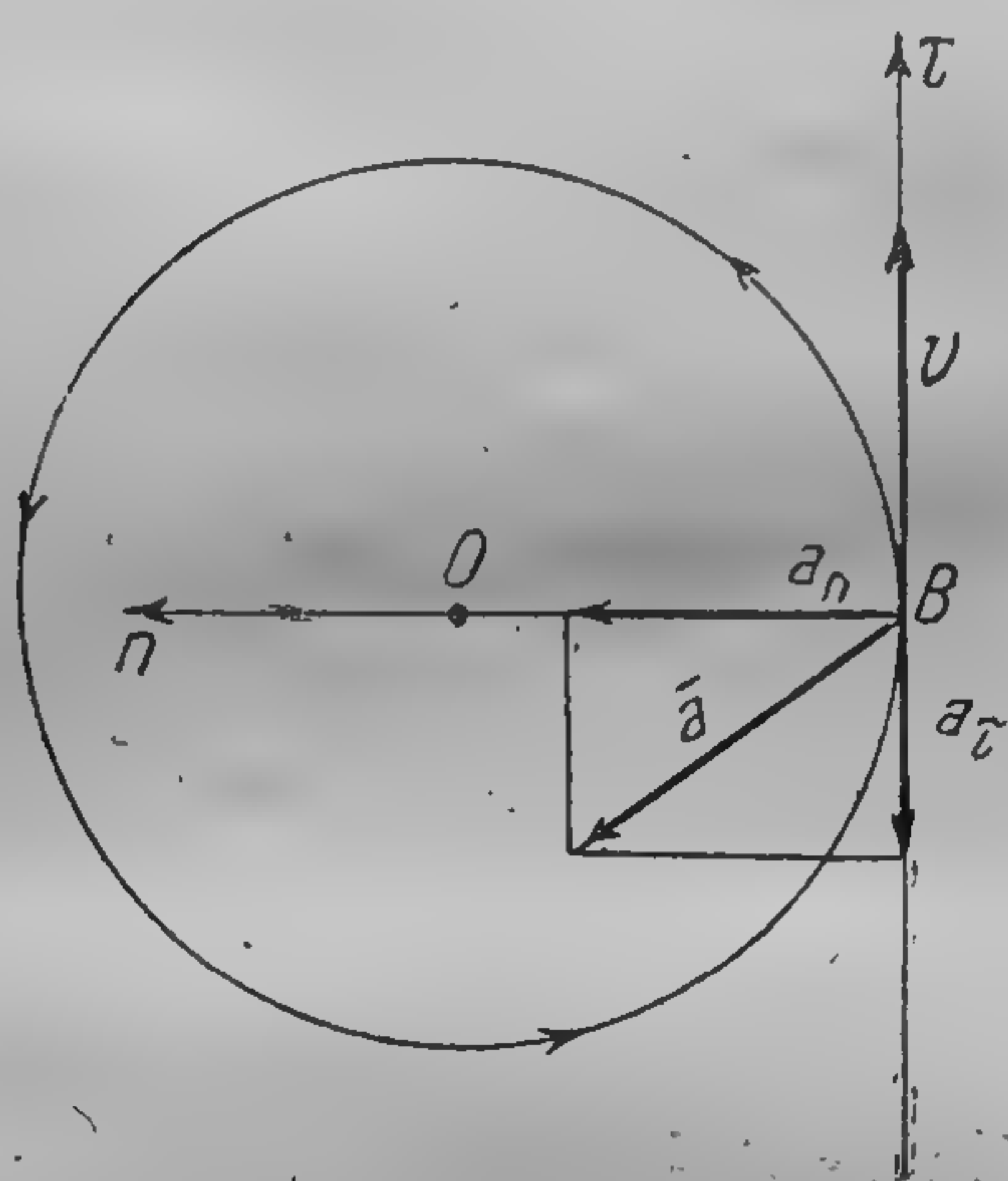


Fig. 163

mișcării punctului A. Acest caz este reprezentat în fig. 163. Însă accelerația  $a_n$  este dirijată totdeauna înspre interiorul cercului, pe direcția normalei principale, adică după raza cercului spre centrul lui. Dacă valoarea absolută  $|\omega|$  a vitezei unghiulare crește în decursul timpului, atunci proiecția  $a_\tau$  este de sens opus celui arătat în fig. 163. Dacă viteza unghiulară  $\omega$  este constantă, adică punctul se găsește în mișcare uniformă pe cerc, vom avea  $a_\tau = 0$ , și accelerația punctului va fi dirijată după rază spre centrul cercului. Prin urmare:

*În mișcarea uniformă a unui punct pe o circumferință, accelerația este dirijată totdeauna spre centrul cercului, este constantă ca mărime și egală cu  $\frac{v^2}{R} = R\omega^2$  și se numește accelerație centripetă.*

În cazul general de mișcare a punctului pe un cerc, modulul accelerației  $\bar{a}$ , conform formulelor (17.12) și (17.13) va fi

$$\bar{a} = R \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}, \quad (17.14)$$

iar tangenta unghiului format de accelerația totală cu raza cercului va fi egală cu  $\frac{a_\tau}{a_n} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d|\omega|}{dt}$ .

**§ 74. Dimensiunile mărimilor mecanice.** Dacă valoarea numerică a unei mărimi, depinde de unitățile de măsură adoptate, atunci această mărime se numește mărime cu dimensiuni. Dacă însă valoarea numerică a unei mărimi nu depinde de unitățile de măsură adoptate, atunci această mărime se numește mărime



fără dimensiuni. Astfel, de exemplu, o arie a cărei valoare numerică depinde de unitatea de lungime adoptată, se exprimă printr-un număr cu dimensiuni, iar numărul  $\pi$ , egal cu raportul dintre lungimea circumferinței și diametru sau numărul  $e$  sînt numere fără dimensiuni. Dacă unele din mărimile cu dimensiuni din mecanică, le vom considera fundamentale și vom stabili pentru ele unități de măsură, atunci celelalte mărimi mecanice vor fi *derivate*: unitățile de măsură ale acestor mărimi derivate se vor exprima prin unitățile de măsură ale mărimilor fundamentale. *Expresia unității de măsură a unei mărimi mecanice oarecare derivate prin unitățile de măsură ale mărimilor mecanice fundamentale se numește dimensiunea acestei mărimi mecanice derivate.* Dimensiunile mărimilor mecanice derivate se obțin direct din înseși definițiile acestor mărimi derivate. Pentru stabilirea dimensiunilor, sînt folosite în mecanică sisteme de unități tehnice și fizice. În sistemul tehnic de unități se aleg trei mărimi fundamentale: forța, lungimea și timpul; ca unitate de forță se ia kilogramul-forță, ca unitate de lungime — metrul, ca unitate de timp — secunda. Pentru aceste mărimi fundamentale vom introduce următoarele notații: forța  $F$ , lungimea  $L$ , timpul  $T$ . În sistemul fizic de unități se aleg ca mărimi fundamentale masa, lungimea și timpul; ca unitate de masă se ia kilogramul-masă, ca unitate de lungime — metrul, ca unitate de timp — secunda. Pentru aceste unități fundamentale vom introduce următoarele notații: masa  $M$ , lungimea  $L$  și timpul  $T$ . Adoptînd în sistemul teoretic de unități ca unitate de masă — gramul-masă, ca unitate de lungime — metrul și ca unitate de timp — secunda, vom obține cunoscutul sistem CGS de unități. Pentru metrul lungime și kilogramul-masă, se consideră lungimea și masa etaloanelor păstrate în palatul de măsuri și greutăți care se află la Paris; secunda este  $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$  din ziua solară medie; pentru un kilogram greutate se ia greutatea masei etalon, la nivelul mării și la latitudinea de  $45^\circ$ . Este evident că în cinematică vom avea de-a face numai cu lungimea  $L$  și timpul  $T$ , deoarece nici masa nici forța nu intervin în cinematică.

Să găsim dimensiunile vitezei liniare, vitezei unghiulare și accelerației. Deoarece  $\bar{v} = \frac{dr}{dt}$ , adică viteza este egală ca mărime cu un raport între lungime și timp, atunci:

$$\text{dimensiunea vitezei liniare} = \frac{L}{T}. \quad (17.15)$$



Viteza unghiulară  $\omega$  se determină prin formula  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ . Deoarece unghiul este o mărime fără dimensiune, atunci

$$\text{dimensiunea vitezei unghiulare} = \frac{1}{T}. \quad (17.16)$$

Deoarece  $\bar{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}$ , adică accelerația este egală ca mărime cu lungimea împărțită la pătratul timpului, atunci

$$\text{dimensiunea accelerației} = \frac{L}{T^2}. \quad (17.17)$$

Nu este greu să ne convingem că toate expresiile găsite pentru viteză și accelerație, precum și cele ale proiecțiilor lor arătate mai sus, satisfac aceste ecuații dimensionale. De exemplu, pentru accelerația  $\bar{a}$  am avut expresia  $\frac{dv}{dt}$ ; folosind egalitatea (17.15) găsim că dimensiunea derivatei  $\frac{dv}{dt}$  va fi:  $\frac{L}{T} : T = \frac{L}{T^2}$ , adică obținem în adevăr dimensiunea accelerației (17.17). Pentru modulul vitezei în mișcarea circulară, noi am găsit expresia  $v = R\omega$ ; folosind egalitatea (17.16) găsim că dimensiunile produsului  $R\omega$  va fi:  $L \cdot \frac{1}{T} = \frac{L}{T}$ , adică obținem în adevăr dimensiunea vitezei (17.15). Pentru proiecția vitezei pe normala principală, am avut expresia  $\frac{v^2}{\rho}$ ; folosind egalitatea (17.15) găsim că dimensiunea fracției  $\frac{v^2}{\rho}$  va fi  $\frac{L^2}{T^2} : L = \frac{L}{T^2}$ , adică vom obține în adevăr dimensiunea accelerației (17.17). Ca și în fizică, în general, în formulele mecanicii, dimensiunile părților din dreapta și stînga ale fiecărei ecuații, trebuie să fie egale între ele. Cu ajutorul acestei observații, putem verifica formulele mecanicii și uneori chiar să le determinăm, abstracție făcînd de niște coeficienți fără dimensiuni. De exemplu, este evident că perioada de oscilație a pendulului matematic, adică a unui punct greu suspendat de un fir fără greutate, a trebuit să depindă de lungimea  $l$  a firului și accelerația  $g$  a gravitației, deoarece în problemă intervin efectiv numai aceste două mărimi. Știm că dimensiunile lui  $l$  și  $g$  vor fi:  $L$



și  $\frac{L}{T^2}$ ; de aceea produsul  $l^m g^n$  va avea dimensiunea  $L^{m+n} T^{-2n}$ . Pentru ca acest produs să aibă dimensiunea  $T$  trebuie să avem:

$$m+n=0, \quad -2n=1,$$

adică

$$n=-\frac{1}{2}, \quad m=+\frac{1}{2}.$$

În acest fel, singură expresie care are dimensiunea timpului este

$$l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}};$$

prin urmare formula perioadei de oscilație a pendulului matematic trebuie să aibă forma

$$t = C \sqrt{\frac{l}{g}},$$

unde  $C$  este un coeficient fără dimensiuni care nu poate fi determinat din aceste considerente. În dinamică vom vedea cum se poate găsi coeficientul  $C$ , iar pentru oscilații mici coeficientul  $C$  este egal cu raportul dintre circumferință și rază, adică  $C=2\pi$ . Vom observa, că o formulă neomogenă din punct de vedere al dimensiunilor, ne dă indicații sigure asupra inexactității formulei, dar invers, omogenitatea dimensiunilor nu ne dă încă un răspuns pozitiv despre exactitatea formulei. Astfel, de exemplu, în formula  $t = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{l}{g}}$ , dimensiunile părții din dreapta și stînga coincid între ele. Totuși, știm că această formulă nu va fi adevărată, iar adevărata formulă are forma  $t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . De aceea, la verificarea formulei pe calea cercetării dimensiunilor, în cazul cînd în partea dreaptă și partea stîngă avem mărimi cu aceleași dimensiuni, încă nu putem trage concluzia că rezultatul obținut este just, dar atunci cînd dimensiunile nu coincid, totdeauna se poate afirma că rezultatul este greșit.

Este necesar să se mai indice că, în cazul cînd unele dintre mărimile care intervin în formule se dau prin valori numerice, atunci dimensiunile formulelor se schimbă în aparență. De exemplu, să presupunem că un punct mișcîndu-se uniform pe o dreaptă a parcurs în  $t$  s, 5 m; atunci viteza punctului va fi egală cu  $\frac{5}{t}$ . Dacă vom uita că 5 este un număr cu dimensiune atunci s-ar



părea că dimensiunile fracției  $\frac{5}{t}$  va fi  $T^{-1}$ , adică fracția  $\frac{5}{t}$  nu reprezintă viteza liniară ci pe cea unghiulară. Pentru a restabili dimensiunile, este suficient să înlocuim valoarea numerică cu o notație literală nominală, de exemplu, în loc de 5 m să punem  $s$  m; atunci din formula  $\frac{s}{t}$  se poate vedea direct dimensiunile expresiei considerate. În cazul unei formule complicate, sîntem nevoiți uneori să facem această înlocuire chiar de la început.

Ecuatia  $y=f(x)$  a unei curbe oarecare  $(C)$  reprezintă curba  $(C)$  în adevăratele ei proporții, numai atunci cînd abscisele și ordonatele se măsoară la aceeași scară. În mecanică, la construirea graficelor distanțelor, a vitezelor și accelerațiilor, sîntem nevoiți să lucrăm cu mărimi de diferite dimensiuni. De exemplu, la construcția graficului distanțelor după formula  $s=f(t)$ , pe una din axe trebuie să se măsoare lungimea, iar pe cealaltă, timpul, iar timpul se poate reprezenta printr-o lungime numai în mod simbolic; la construcția graficului vitezelor după formula  $v=f(t)$  pe una din axe trebuie să se măsoare viteza iar pe cealaltă timpul, dar și viteza și timpul se pot reprezenta prin lungimi numai simbolic. Pentru ca din măsurarea directă pe desen să putem obține un rezultat just, trebuie să măsurăm mărimile reprezentate la o singură scară, adică de exemplu unitatea de spațiu și unitatea de timp să le reprezentăm prin segmente de aceeași lungime, unitatea de viteză și unitatea de timp tot prin segmente de aceeași lungime etc. Dar, în practică, de multe ori trebuie să se renunțe la aceasta: astfel, în § 69 la exemplul 42, am fost nevoiți să folosim diferite scări. Dacă la construcția unui grafic se folosesc diferite scări, atunci pentru obținerea rezultatelor exacte, fiecare măsurătoare pe grafic trebuie să fie corectă. Pentru a exemplifica cele expuse, să examinăm mișcarea rectilinie uniformă a unui punct și să presupunem că în 12 secunde punctul a parcurs un drum de 60 m. Dacă noi vom lua scări egale, adică, de exemplu, vom reprezenta grafic 1 secundă printr-un segment lung de 1 cm și o lungime de 1 m tot printr-un segment de 1 cm, atunci din desen vom avea:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{12} = 5$ , adică direct din desen vom obține viteza reală în metri pe secundă. Dacă însă vom lua diferite scări, de exemplu, vom admite că segmentul de 1 cm, reprezintă o lungime de 6 m și un timp de 2 s, atunci pentru  $\operatorname{tg} \alpha'$  din noul desen vom obține expresia:  $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ , adică nu vom avea valoarea reală a vitezei în metri



pe secundă. Deoarece în aceste scări diferite am micșorat de șase ori segmentele care reprezintă distanțele, și de două ori segmentele care reprezintă timpul, atunci pentru determinarea valorii reale a vitezei  $v = \frac{s}{t}$  m/s, mai trebuie să înmulțim expresia pentru viteza obținută cu  $\frac{6}{2} = 3$ , ceea ce ne va conduce la adevărata valoare de 5 m/s. În general, să presupunem că la construcția graficului  $s = f(t)$  reprezentăm printr-un segment de o lungime anumită —  $m$  unități de drum și  $n$  unități de timp; trecând la aceste scări, în locul graficului ecuației  $s = f(t)$ , vom avea graficul ecuației  $s' = f_1(t')$ , unde vom avea  $s = ms'$  și  $t = nt'$ . Din ecuația  $s' = f_1(t')$ , vom folosi la determinarea vitezei și accelerației tangențiale expresiile  $\frac{ds'}{dt'}$  și  $\frac{d^2s'}{dt'^2}$ , unde derivata  $\frac{ds'}{dt'}$  reprezintă tangenta trigonometrică a unghiului tangentei la graficul ecuației  $s' = f_1(t')$ . Deoarece

$$ds = mds', \quad dt = ndt',$$

vom obține

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{m}{n} \cdot \frac{ds'}{dt'}, \quad a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{m}{n^2} \cdot \frac{d^2s'}{dt'^2}.$$

De aici vedem, că pentru a obține expresiile vitezei și accelerației tangențiale din graficul  $s' = f_1(t')$ , trebuie să înmulțim cele două derivate respectiv cu  $\frac{m}{n}$  și  $\frac{m}{n^2}$ . De aceea la folosirea graficelor trebuie să fim prudenți și totdeauna să observăm cu atenție scările, când efectuăm măsurători pe grafice.

§ 75. Exemple. 50. Să se găsească hodograful vitezei pentru mișcarea elicoidală definită prin formulele (16.11). În § 67, am văzut că pentru această mișcare avem:

$$v_x = -kR \sin kt, \quad v_y = +kR \cos kt, \quad v_z = h \frac{k}{2\pi},$$

$$v = \frac{k}{2\pi} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

De aceea ecuațiile hodografului vor fi:

$$X = -kR \sin kt, \quad Y = +kR \cos kt, \quad Z = h \frac{k}{2\pi}.$$

Din primele două ecuații găsim:

$$X^2 + Y^2 = k^2 R^2.$$

Prin urmare, ecuațiile hodografului vor fi:

$$X^2 + Y^2 = k^2 R^2, \quad Z = h \frac{k}{2\pi}.$$



Hodograful este un cerc situat într-un plan paralel cu planul  $OXY$  la distanța  $h \frac{k}{2\pi}$ . Acest rezultat poate fi obținut direct, deoarece după cum am văzut în § 67, modulul  $v$  al vitezei punctului este constant în această mișcare și egal cu  $\frac{k}{2\pi} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$  și viteza este înclinată față de verticală sub un unghi constant pentru care

$$\cos \gamma = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}.$$

Deoarece  $v \cos \gamma = h \frac{k}{2\pi}$  tragem de aici concluzia că locul geometric al extremității vectorului  $\vec{v}$  este un cerc paralel cu planul  $OXY$  situat la distanța de  $h \frac{k}{2\pi}$  de acest plan, adică ajungem la rezultatul precedent.

51. Să se găsească accelerația unui punct avînd legea de mișcare

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Avem:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

adică accelerația este dirijată după axa  $Ox$  în sens negativ. Viteza  $v$  în această mișcare este egală cu  $v = v_0 - gt$ . Viteza se va anula pentru  $v_0 - gt = 0$ , adică pentru  $t = \frac{v_0}{g}$ ; în acest caz abscisa  $x$  a punctului atinge valoarea ei maximă:

$$x = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g},$$

și punctul își va continua mișcarea în sens invers.

Astfel, viteza punctului își schimbă sensul trecînd prin valoarea zero, iar accelerația punctului este constantă și dirijată totdeauna în sens opus axei  $Ox$ . Acesta este cazul mișcării unui punct material aruncat vertical în sus, cu viteza inițială  $v_0$ .

52. Să se găsească accelerația în mișcarea oscilatorie armonică:

$$x = a \sin(kt + \varepsilon).$$

Avem:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 a \sin(kt + \varepsilon) = -k^2 x.$$

Vedem că accelerația în mișcarea oscilatorie armonică este proporțională cu abscisa punctului și dirijată înspre originea absciselor.



53. Să se găsească accelerația în mișcarea elicoidală examinată în exemplul 50 al prezentului capitol. Avem:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2R \cos kt = -k^2x,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2R \sin kt = -k^2y,$$

$$a_z = 0.$$

$$a = \sqrt{k^4R^2 \cos^2 kt + k^4R^2 \sin^2 kt} = k^2R.$$

Unghiurile  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , formate de accelerație cu axele de coordonate se determină prin formulele:

$$\cos \alpha' = \frac{a_x}{a} = -\frac{x}{R}, \quad \cos \beta' = \frac{a_y}{a} = -\frac{y}{R}, \quad \cos \gamma' = 0.$$

Astfel, accelerația  $\bar{a}$  este dirijată perpendicular pe axa cilindrului pe care este înfășurată elicea circulară și întretaie această axă, adică accelerația  $\bar{a}$  este dirijată după raza secțiunii transversale a cilindrului. Deoarece viteza și accelerația sînt totdeauna situate în planul osculator, atunci pentru elicea considerată, planul osculator se determină prin direcția tangentei și razei secțiunii transversale construite pentru punctul respectiv.

54. Pornind de la formulele (17.7) și (17.12), să se determine raza de curbura  $\rho$  pentru fiecare punct al spiralei logaritmice, date prin ecuațiile (16.16), și anume:

$$r = r_0 e^{mt}, \quad \theta = nt,$$

unde  $r_0$ ,  $m$  și  $n$  sînt constante. Vom determina în primul rînd dimensiunile acestor constante; deoarece produsele  $mt$  și  $nt$  trebuie să fie numere cu dimensiune nulă, tragem concluzia că dimensiunile  $m$ ,  $n$  și  $r_0$  vor fi respectiv  $T^{-1}$ ,  $T^{-1}$  și  $L$ . Din formulele (17.7) și (17.12) avem:

$$a^2 = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right]^2,$$

$$a_2 = \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}.$$

De aici obținem:

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right]^2,$$

sau

$$\frac{v^4}{\rho^2} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right]^2 - \left( \frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Din ecuația mișcării obținem:

$$\frac{dr}{dt} = m r_0 e^{mt} = mr, \quad \frac{d\theta}{dt} = n, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = m \frac{dr}{dt} = m^2 r.$$



Mai departe vom avea:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = m^2 r^2 + n^2 r^2 = (m^2 + n^2) r^2,$$

sau

$$v = \sqrt{m^2 + n^2} r.$$

De aici obținem:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{m^2 + n^2} \frac{dr}{dt} = m \sqrt{m^2 + n^2} r.$$

Prin urmare, vom avea:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = m^2 r - n^2 r = (m^2 - n^2) r,$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (nr^2) = \frac{1}{r} 2nr \frac{dr}{dt} = 2n \frac{dr}{dt} = 2mnr.$$

În acest fel, obținem:

$$\frac{(m^2 + n^2)^2 r^4}{\rho^2} = (m^2 - n^2)^2 r^2 + 4 m^2 n^2 r^2 - m^2 (m^2 + n^2) r^2,$$

sau după reducerea cu  $r^2$

$$\frac{(m^2 + n^2)^2 r^2}{\rho^2} = m^4 - 2m^2 n^2 + n^4 + 4m^2 n^2 + m^2 (m^2 + n^2) = (m^2 + n^2)^2 - m^2 (m^2 + n^2).$$

Simplificând cu  $m^2 + n^2$ , vom găsi:

$$\frac{(m^2 + n^2) r^2}{\rho^2} = m^2 + n^2 - m^2 = n^2.$$

De aici vom avea:

$$\rho^2 = \frac{m^2 + n^2}{n^2} r^2 = \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right) r^2,$$

adică:

$$\rho = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}} r.$$

Nu este greu de observat că în această formulă dimensiunile sînt respectate. Introducînd notația  $k = \frac{m}{n}$ , unde  $k$  este o mărime fără dimensiune, vom obține:

$$r = r_0 e^{k\theta}, \quad \rho = \sqrt{1 + k^2} r.$$

Aceasta va fi ecuația spiralei logaritmice în coordonate polare și expresia razei ei de curbură.



## CAPITOLUL XVIII

### MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE A UNUI SOLID ȘI MIȘCAREA LUI DE ROTAȚIE ÎN JURUL UNEI AXE FIXE

§ 76. Mișcarea de translație a solidului. Pentru a simplifica expunerea studiului mișcării solidului în cazul general, și pentru a-i imprima un caracter mai sugestiv vom studia cinematica solidului, începînd cu mișcările simple, mișcarea de translație și mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Mișcarea solidului în care orice segment de dreaptă al solidului se deplasează paralel cu el însuși se numește translație.

Să examinăm mișcarea unui solid, din poziția  $I$  în poziția  $II$ -a, într-un interval oarecare de timp. Împărțim acest interval de timp în intervale de timp infinit mici; să presupunem că în fiecare element infinit mic de timp, solidul suferă o translație; o astfel de mișcare a corpului se numește mișcare de translație. În acest fel:

*Dacă mișcarea solidului rigid este astfel încît în fiecare moment deplasarea solidului este de translație, atunci mișcarea solidului se numește mișcare de translație.*

Să examinăm la un moment dat  $t$ , două puncte  $A$  și  $B$  ale solidului care se află în mișcare de translație; presupunem că în momentul  $t + \Delta t$ , unde  $\Delta t$  este foarte mic, aceste puncte vor ocupa pozițiile  $A'$  și  $B'$ . Atunci, pe baza definiției mișcării de translație, vom avea  $A'B' \parallel AB$ . Prin urmare, trebuie să avem  $AA' \parallel BB'$  adică elementele drumurilor descrise de punctele  $A$  și  $B$  în același interval de timp infinit mic, vor fi egale și paralele între ele. În acest fel, în timpul mișcării de translație, în același interval de timp toate punctele solidului descriu arce de curbă egale pe care le putem face să coincidă între ele.

Este evident că în fiecare moment, vectorii vitează ai tuturor punctelor solidului care se găsește în mișcare de translație, vor fi egali; același lucru se întîmplă și cu vectorii accelerație. De aceea, pentru ca să cunoaștem mișcarea de translație a solidului, este suficient să cunoaștem mișcarea unui punct oarecare din



acest solid, adică ajungem la problemele studiate în cele două capitole precedente ale cinematicii. Deosebirea față de cele precedente va consta numai din faptul că la examinarea mișcării numai a unui singur punct, viteza și accelerația au fost vectori legați

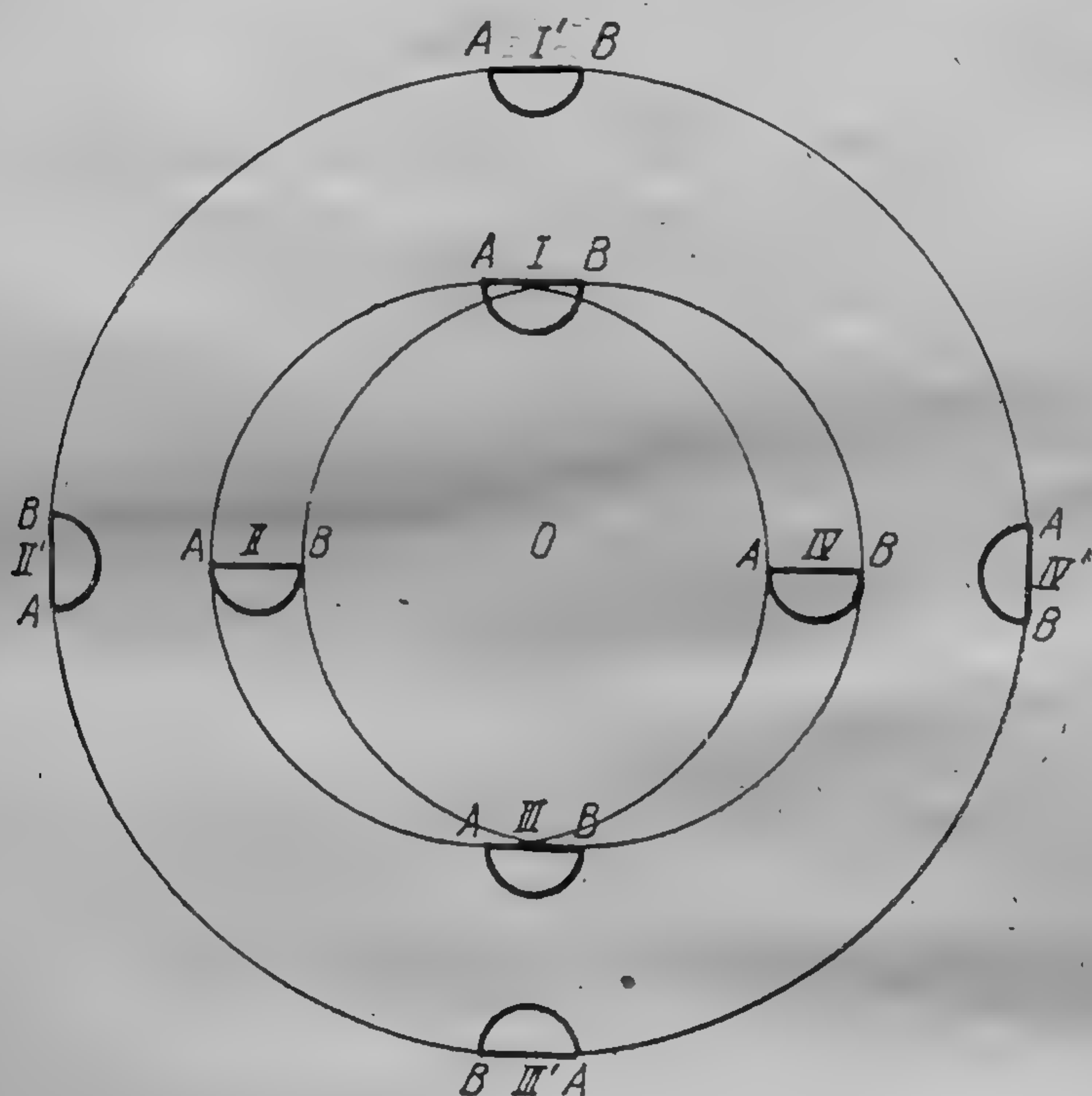


Fig. 164

de punct, iar la cercetarea mișcării solidului, acești vectori vor fi liberi, deoarece ei pot fi aplicați în orice punct al solidului.

Trebuie subliniat că în mișcarea de translație, punctele solidului pot descrie de asemenea și curbe închise.

Pentru a lămuri acest lucru, vom apela la fig. 164, în care este reprezentat un segment de cerc care se mișcă în jurul punctului O. Să examinăm mai întâi pozițiile I, II, III, IV și I' ale segmentului. Prin această mișcare, segmentul AB se va deplasa, rămânând paralel cu el însuși, și, evident că această mișcare a segmentului va fi o mișcare de translație. Să examinăm apoi pozițiile I', II', III', IV' și I' ale segmentului. Vedem că prin



această mișcare, în afară de translația în jurul punctului  $O$ , segmentul se și rotește, adică mișcarea segmentului nu va fi numai de translație ci și de rotație, durata rotirii sale fiind egală cu durata revoluției în jurul punctului  $O$ . În timpul acestei mișcări, segmentul este totdeauna dirijat cu partea lui convexă spre punctul  $O$ . Astfel este și cazul lunii, care totdeauna este îndreptată spre pământ cu aceeași emisferă, deoarece atât timpul de revoluție a lunii în jurul pământului cât și timpul de rotație a lunii în jurul axei sale, sînt egale cu circa  $27 \frac{1}{3}$  zile.

Dacă pentru o mișcare arbitrară a solidului, la un moment oarecare vitezele tuturor punctelor solidului vor fi egale ca vectori, se spune în acest caz, că solidul se găsește în stare de *mișcare instantanee de translație*.

§ 77. Vitezele unghiulare și liniare ale punctelor unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe. Să ne imaginăm un corp

solid care se rotește în jurul unei axe fixe oarecare  $\Delta$  (fig. 165). Să examinăm un punct oarecare  $A$  al corpului care se află la distanța  $R$  de axa  $\Delta$ . Prin rotirea solidului, punctul  $A$  va descrie o circumferință cu raza egală cu  $R$ , situată în planul  $\pi$  perpendicular pe axa  $\Delta$  și care trece prin punctul corespunzător poziției inițiale a punctului  $A$ . Presupunem că într-un interval elementar de timp  $\Delta t$  raza dusă în punctul  $A$  s-a rotit cu un unghi oarecare  $\Delta\theta$ .

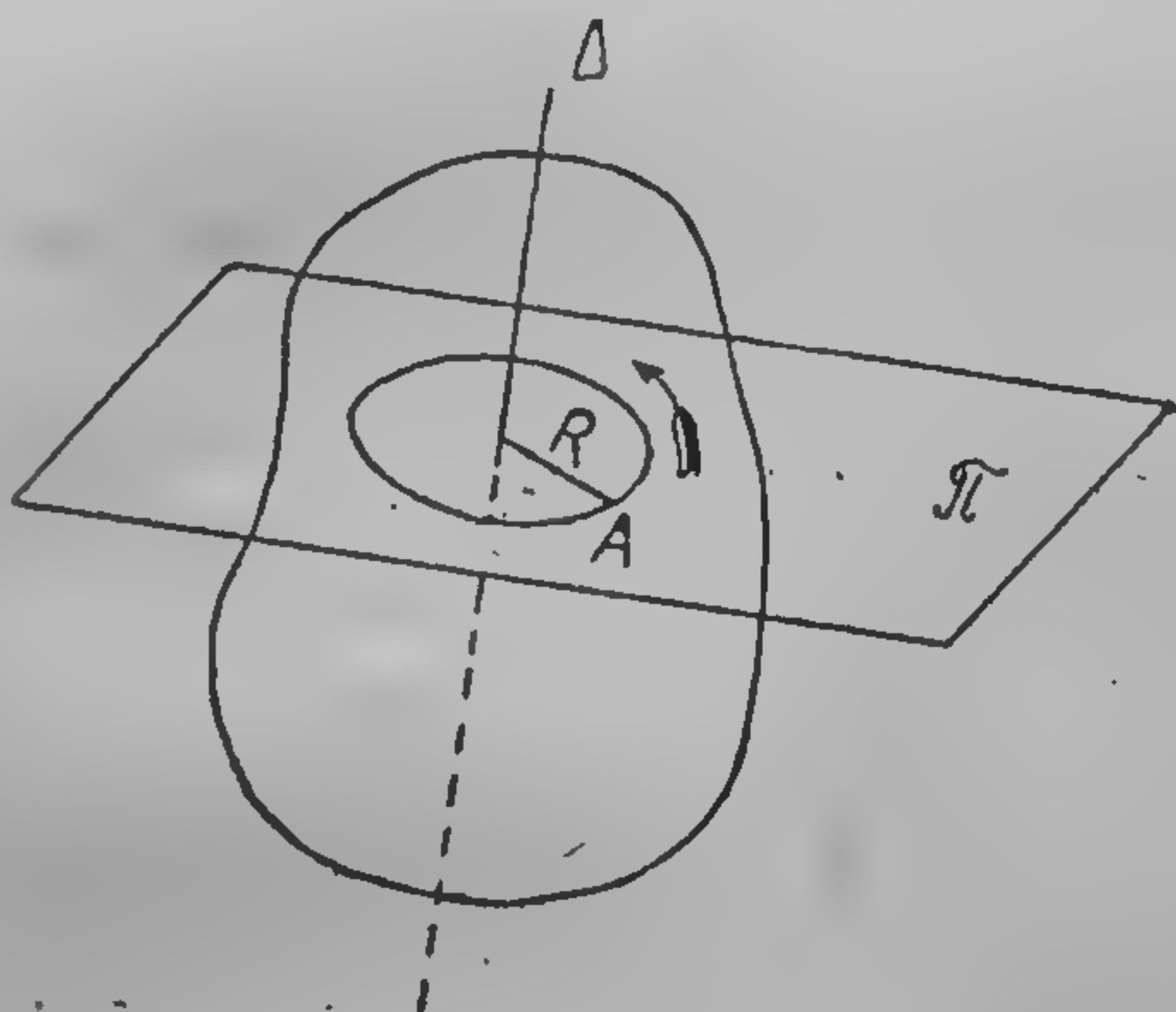


Fig. 165

Este evident că în același interval elementar de timp  $\Delta t$ , tuturor celorlalte puncte ale solidului le va corespunde același unghi de rotație  $\Delta\theta$ ; astfel, unghiul  $\Delta\theta$  poate fi luat ca măsură a unghiului de rotație a întregului solid. Limita raportului dintre unghiul de rotație  $\Delta\theta$  al solidului și intervalul de timp  $\Delta t$ , se numește viteza unghiulară  $\omega$  de rotație a solidului.

Unghiul de rotație  $\theta$  se dă în general în funcție de timpul  $t$  și avem:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (18.1)$$



Astfel, viteza unghiulară de rotație a unui solid, este prima derivată a unghiului de rotație, în raport cu timpul.

La calculul derivatei  $\frac{d\theta}{dt}$  putem obține două semne: plus sau minus în funcție de creșterea sau descreșterea unghiului  $\theta$  în raport cu timpul. De aceea, din formula (18.1) obținem valoarea algebrică a vitezei unghiulare  $\omega$ . Viteza liniară a punctului  $A$ , conform formulei (16.31) va fi egală în modul cu

$$v = R|\omega|. \quad (18.2)$$

Modulul  $a$  al accelerației punctului  $A$ , conform formulei (17.14) va fi:

$$a = R\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}. \quad (18.3)$$

Introducând un nou vector, se poate realiza un astfel de mod de reprezentare a vectorilor viteză  $\vec{v}$ , ai punctelor solidului care se rotește în jurul unei axe, încît să se obțină foarte simplu proiecțiile acestor vectori viteză  $\vec{v}$ , pe axe de coordonate, oricare ar fi poziția axei de rotație în raport cu axe de coordonate.

În acest scop, să examinăm axa de rotație  $\Delta$  a solidului și fie  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  viteza unghiulară de rotație a solidului în jurul acestei axe  $\Delta$ . Vom reprezenta mărimea  $|\omega|$  prin segmentul de dreaptă

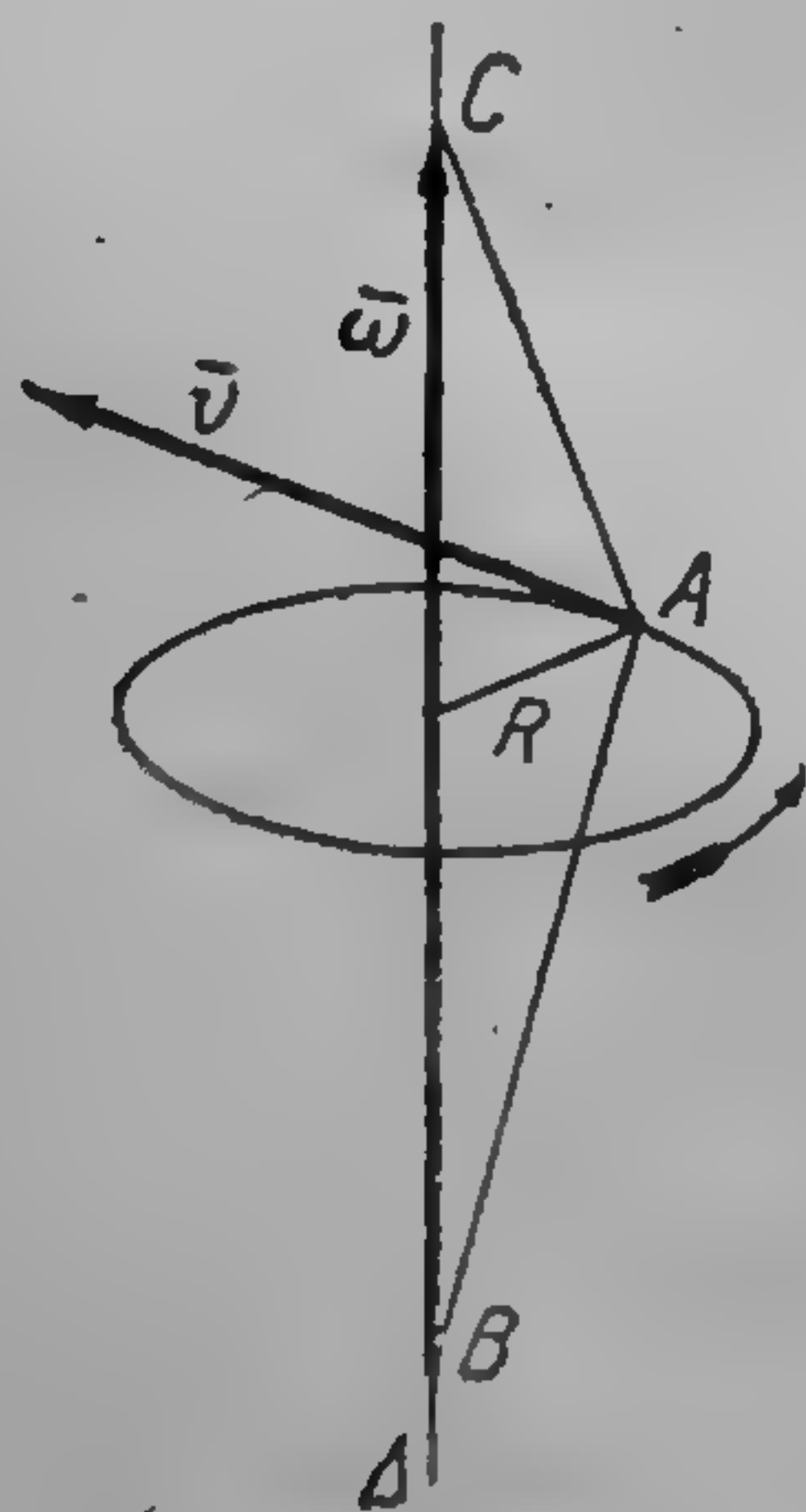


Fig. 166

$BC$ , luat oriunde pe axa de rotație  $\Delta$ , convenind în acest scop să adoptăm o scară la care vom reprezenta mărimea  $|\omega|$  prin lungimea  $BC$ . Deoarece dimensiunea vitezei unghiulare este  $T^{-1}$ , este evident că reprezentarea mărimii  $|\omega|$  prin mărimea  $BC$  poate fi numai convențională; cu astfel de reprezentări convenționale ne-am mai întâlnit la studiul forțelor, momentelor etc. Am atribuit astfel segmentului  $BC$  o mărime și o direcție, să-i atribuim și un anumit sens, și anume, acel sens, încît observatorul așezat de-a lungul lui  $BC$  cu capul în  $C$  și picioarele în  $B$ , să vadă rotirea punctului  $A$  și deci și a întregului solid, efectuându-se în sens pozitiv, adică în sens contrar acelor unui ceasornic (fig. 166). Unind punctul  $A$  cu originea  $B$  și cu extremitatea  $C$  a segmentului  $BC$ ,

vedem că modulul  $v$  al vitezei  $\vec{v}$  va fi egal cu 2 aria  $\triangle ABC$ , deoarece el este egal cu produsul înălțimii  $R$  al acestui triunghi,



cu baza lui  $BC = |\omega|$ ; vectorul  $\vec{v}$  va fi dirijat perpendicular pe planul triunghiului  $ABC$ . Este evident că acest procedeu de a găsi viteza  $\vec{v}$  a punctului, se aplică nu numai în cazul când axa de rotație este fixă, ci și atunci când va avea în momentul  $t$  numai poziția instantanee  $\Delta$ ; acest caz se va expune mai departe la § 86 și 87. Prin procedeu considerat de a reprezenta viteza unghiulară printr-un segment situat pe axa de rotație, viteza unghiulară se va caracteriza prin mărime, direcție și sens; pentru ca viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  să fie vector, rămâne de dovedit că vitezelor unghiulare li se aplică legea de adunare a vectorilor.

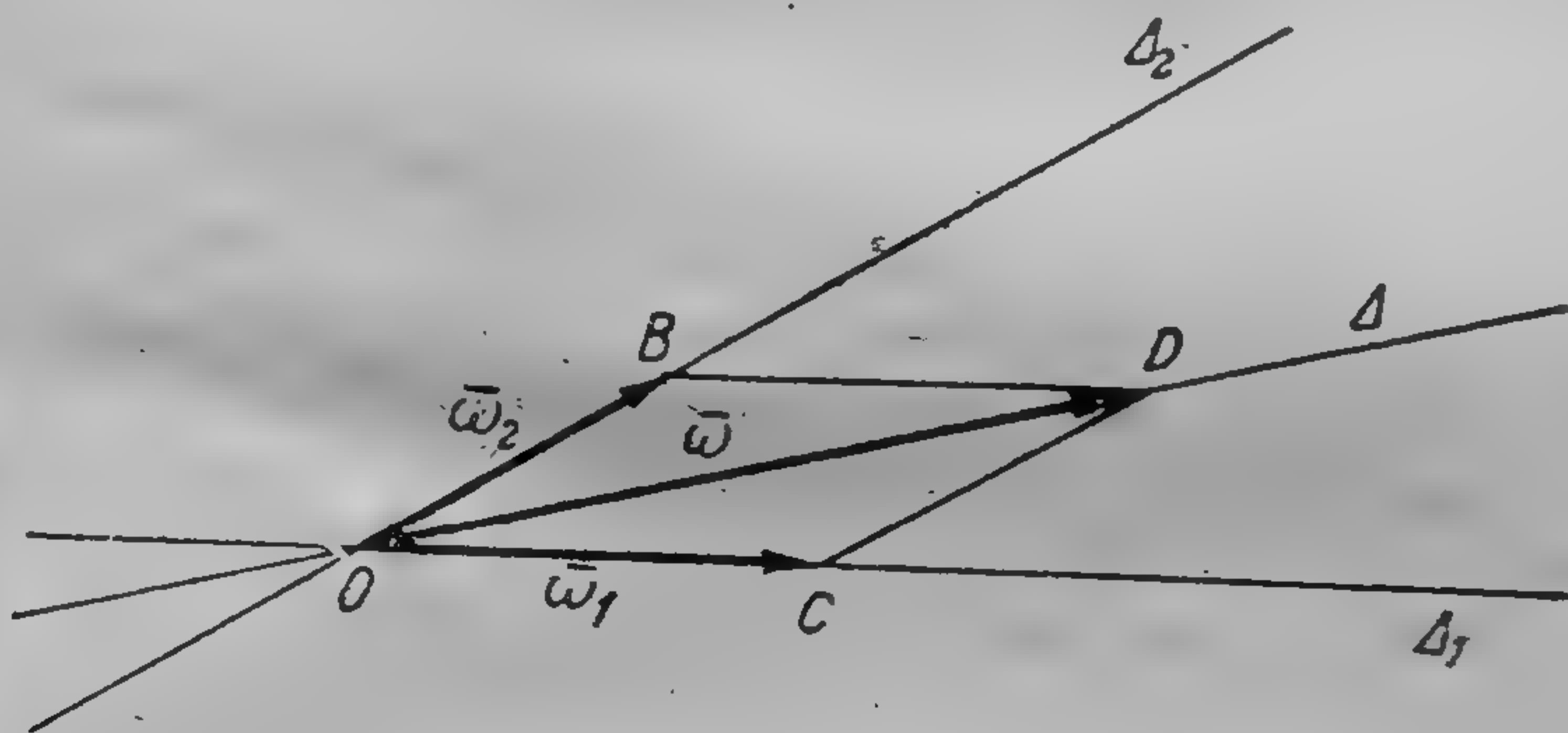


Fig. 167

Pentru a demonstra aceasta, să examinăm două axe de rotație  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$ , care se întretaie în punctul  $O$ , pe care măsurăm vectorii viteză unghiulară  $\vec{\omega}_1$  și  $\vec{\omega}_2$  cu originea în punctul  $O$  (fig. 167). Această mișcare a solidului se poate obține dacă ne închipuim că solidul se rotește în jurul axei  $\Delta_1$  cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_1$ , iar axa  $\Delta_1$  se rotește în jurul axei  $\Delta_2$  cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_2$ .

Examinăm aici poziția instantanee a acestor axe. Vom construi cu vitezele unghiulare  $\vec{\omega}_1$  și  $\vec{\omega}_2$  paralelogramul  $OCDB$ , și vom demonstra că diagonala  $OD$  a acestui paralelogram reprezintă viteza unghiulară, prin care se pot înlocui vitezele unghiulare  $\vec{\omega}_1$  și  $\vec{\omega}_2$ . Pentru aceasta, în primul rînd este necesar să se dovedească că dreapta  $\Delta$ , pe care se găsește segmentul  $OD$ , este axă de rotație, adică că vitezele tuturor punctelor acestei drepte sînt egale cu zero, și în al doilea rînd că viteza liniară, a



oricărui punct al solidului, determinată de vitezele unghiulare  $\bar{\omega}_1$  și  $\bar{\omega}_2$  va fi egală cu aceea datorită vitezei unghiulare  $\bar{\omega} = \overline{OD}$ . Să examinăm punctele  $O$  și  $D$ . Viteza punctului  $O$  este egală cu zero deoarece este situat pe axele de rotație. Viteza punctului  $D$  datorită mișcării de rotație cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$  este egală ca modul cu 2 aria  $\triangle DOC$ , iar aceea datorită mișcării de rotație cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$  este egală ca modul cu 2 aria  $\triangle DOB$ . Deoarece  $\triangle DOC = \triangle DOB$ , ambele viteze ale punctului  $D$  sînt egale între ele, ele sînt dirijate perpendicular pe planul paralelogramului  $OCDB$ , în sens contrar. De aceea, viteza compusă a punctului  $D$  este egală cu zero. Deoarece punctele  $O$  și  $D$  de pe dreapta  $\Delta$  au vitezele egale cu zero, rezultă de aici că vitezele tuturor punctelor dreptei  $\Delta$  sînt egale cu zero, adică dreapta  $\Delta$  este axă de rotație. Observăm că de aici, desigur, nu rezultă că dreapta  $\Delta$  este fixă; din cele expuse urmează numai că în momentul considerat, vitezele tuturor punctelor dreptei  $\Delta$  sînt egale cu zero. Pentru a demonstra că viteza unui punct oarecare datorită mișcărilor de rotație au vitezele unghiulare  $\bar{\omega}_1$  și  $\bar{\omega}_2$  va fi aceeași cu viteza datorită mișcării de rotație cu viteza unghiulară  $\bar{\omega} = \overline{OD}$ ; să examinăm de exemplu punctul  $C$ . Datorită rotației cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$ , punctul  $C$  are viteza egală cu zero, iar datorită rotației cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$  punctul  $C$  are o viteză al cărei modul este egal cu 2 aria  $\triangle CBO = \text{aria } OCDB$ . Datorită mișcării de rotație cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  punctul  $C$  trebuie să aibă o viteză al cărei modul este egal cu 2 aria  $\triangle CDO = \text{aria } OCDB$ , adică datorită mișcării de rotație cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  punctul  $C$  are o viteză, egală în modul, cu aceea datorită vitezelor unghiulare  $\bar{\omega}_1$  și  $\bar{\omega}_2$ . Deoarece și direcțiile și sensurile vitezelor punctului  $C$  în ambele cazuri, după cum este ușor de văzut în desen, vor fi la fel, rezultă că vitezele unghiulare se adună vectorial. Astfel, ajungem la teorema că *viteza unghiulară este un vector*.

Este ușor de văzut că viteza unghiulară este un vector alunecător, deoarece prin mutarea vectorului  $\bar{\omega}$  de-a lungul axei  $\Delta$  în alt loc, nu se modifică nici aria nici planul triunghiului  $ABC$ .

Astfel, demonstrația faptului că viteza unghiulară este un vector, este o demonstrație matematică, în timp ce numai cu ajutorul științelor naturii putem afirma că forța este un vector.



După demonstrația, că viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  este un vector alunecător, se poate da expresia vectorului viteză  $\vec{v}$  al punctului  $A$ , sub forma următoare (fig. 166):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{BA}. \quad (18.4)$$

În adevăr, acest produs vectorial egal în modul cu 2 aria  $\triangle ABC$ , este un vector dirijat perpendicular pe planul triunghiului  $ABC$  în sensul în care este dirijat vectorul viteză al punctului  $A$ . Astfel, pe baza formulei (18.4), ajungem la următoarea teoremă:

*Viteza unui punct al unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe este egală cu produsul vectorial al vectorului viteză unghiulară cu vectorul care unește originea vectorului viteză unghiulară cu punctul considerat.*

De multe ori sistemul ortogonal de axe de coordonate fixe  $Oxyz$ , se ia astfel încât originea  $O$  a coordonatelor să fie situată pe axa de rotație  $\Delta$ . Deoarece vectorul  $\vec{\omega}$  este un vector alunecător, rezultă că vectorul  $\vec{\omega}$  poate fi deplasat pe axa  $\Delta$  astfel încât originea lui  $B$  să coincidă cu punctul  $O$ ; atunci vectorul  $\vec{BA}$  se va transforma în vectorul de poziție  $\vec{OA} = \vec{r}$ , și vom obține formula:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (18.5)$$

Din această formulă rezultă că:

*Vectorul viteză al unui punct al unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe ce trece prin originea coordonatelor, este egal cu produsul vectorial dintre vectorul viteză unghiulară de rotație și vectorul de poziție al acelui punct.*

Deoarece dreapta  $\vec{BA} = -\vec{AB}$  (v. fig. 166), din formula (18.4) rezultă  $\vec{\omega} \times (-\vec{AB}) = \vec{AB} \times \vec{\omega}$  adică

$$\vec{v} = \vec{AB} \times \vec{\omega}. \quad (18.5')$$

Dar produsul vectorial  $\vec{AB} \times \vec{\omega}$  nu este altceva decât momentul (§ 13) vectorului  $\vec{\omega}$  în raport cu punctul  $A$ ; prin urmare:

*Vectorul viteză al unui punct al unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe, este egal cu momentul vectorului viteză unghiulară în raport cu acest punct.*

§ 78. Proiecțiile vitezelor punctelor unui solid, care se rotește în jurul unei axe fixe. Din formula (18.5) nu este greu de obținut proiecțiile  $v_x, v_y, v_z$ , pe axele  $Ox, Oy$  și  $Oz$  ale unui



sistem de coordonate fixe, ale vitezei  $\bar{v}$ , a punctului care aparține unui solid care se rotește cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  în jurul axei  $\Delta$  ce trece prin originea  $O$  a coordonatelor. Să presupunem că noi căutăm aceste proiecții pentru un moment oarecare  $t$ , și fie  $x, y, z$  coordonatele punctului  $A$  în acest moment, iar  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  proiecțiile vectorului  $\bar{\omega}$  pe axele  $Oxyz$ . Avem:

$$\bar{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z,$$

$$\bar{\omega} = \bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z,$$

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z.$$

Conform § 12 formula (18.5), se poate prezenta sub forma:

$$\bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

De aici, dezvoltînd determinantul cum s-a indicat în § 12, vom obține:

$$\bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z = \bar{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \bar{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \bar{k}(\omega_x y - \omega_y x),$$

nau

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Aceste formule aparțin lui Euler și se numesc *formulele cinematice ale lui Euler*. Proiecțiile vectorului  $\bar{\omega}$  pe axele de coordonate se notează uneori prin  $p, q, r$ , astfel că vom avea  $p = \omega_x, q = \omega_y, r = \omega_z$ . Cu notațiile  $(p, q, r)$ , formulele lui Euler au forma:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= qz - ry, \\ v_y &= rx - pz, \\ v_z &= py - qx. \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

Presupunem acum că axa de rotație  $\Delta$  coincide cu axa  $Oz$ . Atunci  $\omega_x = \omega_y = 0$ , și noi obținem că  $\bar{\omega} = \bar{k}\omega_z$ . De aici, în primul rînd, vom avea  $v_z = 0$ , ceea ce trebuia să se întîmple, deoarece atunci cînd axa  $\Delta$  coincide cu axa  $Oz$ , punctul  $A$  se mișcă pe o circumferință într-un plan perpendicular pe axa  $Oz$ ; mai departe, din formulele (18.6) obținem:

$$v_x = -\omega_z y, \quad v_y = +\omega_z x, \quad (18.8)$$



Acest caz particular al formulelor lui Euler se poate obține și pe cale elementară. Deoarece la această mișcare punctul  $A$  va rămâne tot timpul într-un plan perpendicular pe axa  $Oz$ , atunci pentru el vom avea:  $z = \text{const}$ , adică vom avea:  $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$ . În acest plan, punctul  $A$  va descrie un cerc cu raza  $R$  și cu centrul în punctul de intersecție al acestui plan cu axa  $Oz$ . Folosind coordonatele polare ale punctului  $A$ , vom obține:

$$x = R \cos \Theta, \quad y = R \sin \Theta.$$

De aici vom avea

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R \sin \Theta \frac{d\Theta}{dt} = -y \frac{d\Theta}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt} = x \frac{d\Theta}{dt}.$$

Deoarece după formula (18.1),  $\frac{d\Theta}{dt} = \omega$ , găsim:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = +\omega x,$$

adică ajungem la formulele (18.1). Este evident că aici mărimea  $\omega$  nu este modulul vitezei unghiulare, ci o mărime algebrică, după cum rezultă din formula (18.1), adică aici  $\omega = \omega_z$ .

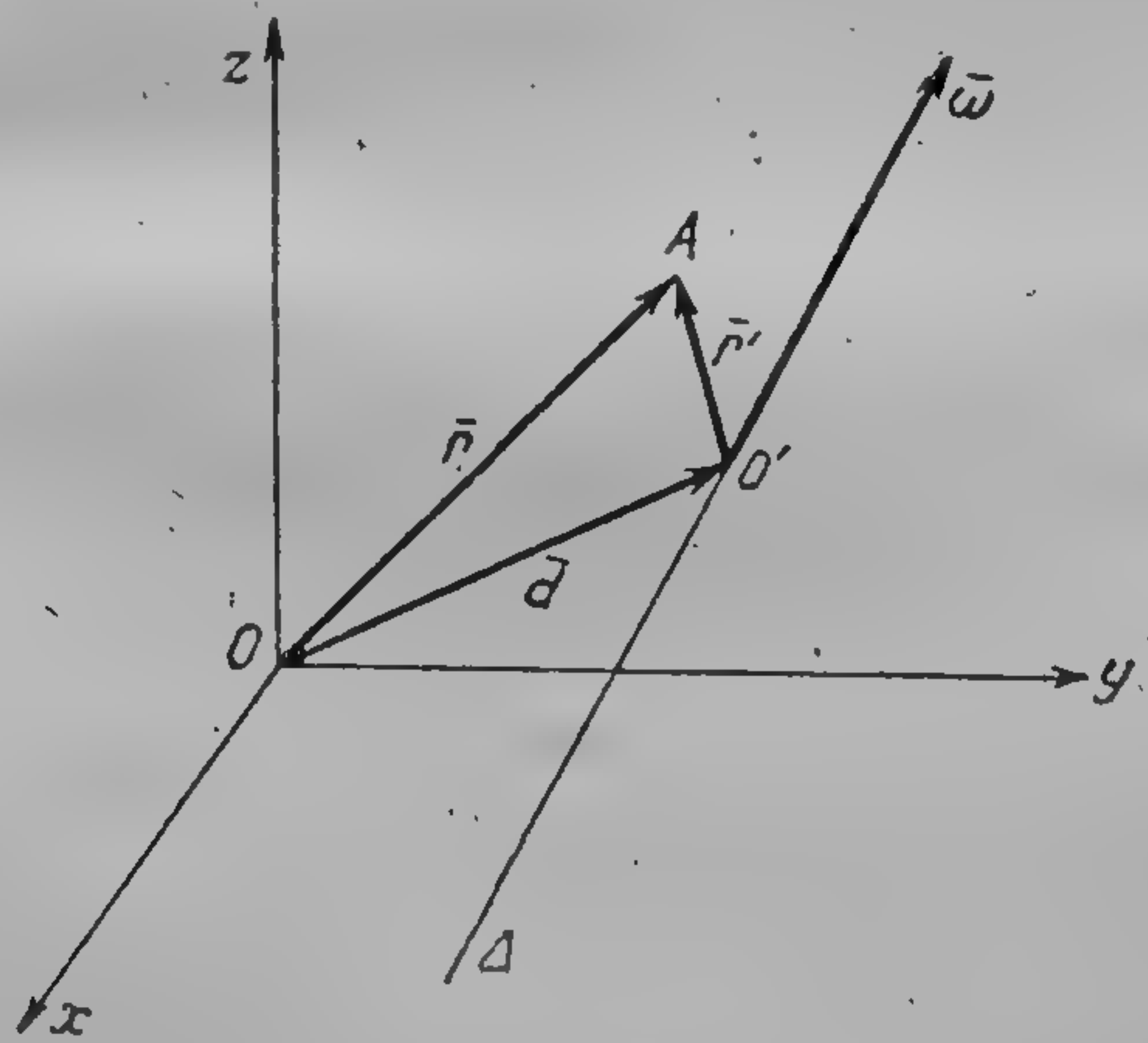


Fig. 168

Să presupunem, că axa de rotație  $\Delta$  nu trece prin originea coordonatelor  $O$  (fig. 168). Atunci vom lua pe axă un punct oarecare  $O'$  și vom deplasa de-a lungul axei  $\Delta$  vectorul  $\vec{\omega}$  astfel



încît originea lui să ajungă în punctul  $O'$ . Fie punctul  $A$  a cărui viteză  $\vec{v}$  o căutăm. Să unim punctul  $O'$  cu punctul  $A$  prin vectorul  $\vec{r}' = \vec{O'A}$ ; atunci vom putea utiliza formula (18.5) și vom obține:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Vom uni punctul  $O$  cu punctul  $A$  prin vectorul  $\vec{r} = \vec{OA}$  și punctul  $O$  cu punctul  $O'$  prin vectorul  $\vec{d} = \vec{OO'}$ . Din fig. 168 se vede că

$$\vec{d} + \vec{r}' = \vec{r},$$

adică

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d},$$

De aici vom avea:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{d}). \quad (18.9)$$

Dacă  $x', y', z'$  sînt coordonatele punctului  $O'$  în raport cu sistemul de axe  $Oxyz$ , atunci:

$$\vec{d} = \vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z',$$

$$\vec{r} - \vec{d} = \vec{i}(x - x') + \vec{j}(y - y') + \vec{k}(z - z'),$$

și vom obține:

$$\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x - x' & y - y' & z - z' \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd determinantul ca mai sus, vom avea:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y(z - z') - \omega_z(y - y'), \\ v_y &= \omega_z(x - x') - \omega_x(z - z'), \\ v_z &= \omega_x(y - y') - \omega_y(x - x'). \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

Dacă axa de rotație  $\Delta$  este paralelă la axa  $Oz$ , iar  $x', y'$  sînt coordonatele urmei acestei axe pe planul  $Oxy$ , atunci, deoarece  $\omega_x = \omega_y = 0$ , formulele (18.10) vor lua forma:

$$v_x = -\omega_z(y - y'), \quad v_y = +\omega_z(x - x'). \quad (18.11)$$

Formulele lui Euler dau proiecțiile vitezei oricărui punct al unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe, și în oricare moment. Pentru găsirea acestor proiecții este necesar să se cunoască numai coordonatele punctului considerat în momentul în care se calculează proiecțiile vitezei. Dacă modulul vectorului viteză unghi-



Iar  $\bar{\omega}$  variază în decursul timpului, atunci proiecțiile  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , vor fi funcții de timp; totuși, ele pot varia rămânând proporționale, căci cercetăm cazul cînd axa de rotație rămîne fixă. Este evident că ecuațiile axei  $\Delta$ , care trece prin punctul de coordonate  $(x', y', z')$ , vor fi:

$$\frac{x-x'}{\omega_x} = \frac{y-y'}{\omega_y} = \frac{z-z'}{\omega_z},$$

unde  $x, y, z$ , sînt coordonatele curente ale punctelor axei de rotație. Coordonatele  $(x, y, z)$  ale fiecărui punct al solidului vor fi neapărat funcții de timp, deoarece fiecare punct se mișcă pe o circumferință în jurul axei de rotație și, prin urmare, coordonatele  $(x, y, z)$  ale punctului solidului variază încontinuu.

§ 79. Accelerațiile punctelor unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe. Prin mișcarea de rotație a unui solid în jurul unei axe fixe  $\Delta$  fiecare punct al solidului descrie o circumferință, iar accelerația în timpul mișcării punctului pe circumferință a fost studiată amănunțit în § 73. În acest paragraf, se dă o astfel de expresie pentru vectorul accelerație  $\bar{a}$  al unui punct oarecare al solidului care se rotește în jurul unei axe fixe, încît la orice poziție a axei de rotație  $\Delta$  se pot găsi ușor proiecțiile vectorului  $\bar{a}$  pe axele de coordonate; aceste proiecții ale vectorului  $\bar{a}$  vor fi calculate în cadrul acestui paragraf. Am avut formula generală (17.2)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Presupunînd că axa de rotație  $\Delta$  a solidului trece prin originea coordonatelor  $O$ , obținem din formula (18.5):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

prin urmare (§ 65)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Dar derivata  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  este vectorul viteză  $\bar{v}$  al punctului considerat al solidului, de aceea, avem:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}.$$



Produsul vectorial  $\bar{\omega} \times \bar{v}$  poate căpăta și o altă formă. Conform § 12, vom avea:

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

adică

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{i}(\omega_y v_z - \omega_z v_y) + \bar{j}(\omega_z v_x - \omega_x v_z) + \bar{k}(\omega_x v_y - \omega_y v_x).$$

Vom înlocui aici proiecțiile  $v_x, v_y, v_z$  ale vectorului viteză al punctului considerat  $(x, y, z)$  al solidului care se rotește în jurul unei axe fixe  $\Delta$ , cu expresiile lor după formulele lui Euler (18.6). De exemplu, pentru prima paranteză vom avea:

$$\begin{aligned} \omega_y v_z - \omega_z v_y &= \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z) = \\ &= \omega_x \omega_y y + \omega_x \omega_z z - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x. \end{aligned}$$

Adăugind și scăzînd din partea dreaptă pe  $\omega_x^2 x$  vom găsi:

$$\omega_y v_z - \omega_z v_y = \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)x.$$

Dar știm că (§ 18):

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2, \quad \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z = \omega \cdot r.$$

De aceea, vom avea:

$$\omega_y v_z - \omega_z v_y = \omega_x(\omega \cdot r) - \omega^2 x.$$

În mod analog vom obține:

$$\omega_z v_x - \omega_x v_z = \omega_y(\omega \cdot r) - \omega^2 y;$$

$$\omega_x v_y - \omega_y v_x = \omega_z(\omega \cdot r) - \omega^2 z.$$

Astfel

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = (\omega \cdot r)(\bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z) - \omega^2(\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z),$$

sau

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = (\omega \cdot r)\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}.$$

Deoarece vectorul  $\bar{v}$  este egal cu  $\bar{\omega} \times \bar{r}$ , vom obține:

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\omega \cdot r)\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}. \quad (18.12)$$



Această formulă pentru calculul dublului produs vectorial se va întâlni și mai departe. În acest fel, formula accelerației  $\bar{a}$  capătă forma definitivă:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) \bar{\omega} - \omega^2 \bar{r} \quad (18.13)$$

De aici nu este greu de obținut proiecțiile  $a_x, a_y, a_z$ , ale accelerației  $\bar{a}$  pe axele de coordonate  $Oxyz$ . Ținând seamă de formula (16.21) și de proiecțiile derivatei  $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$  vom obține:

$$\begin{aligned} \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z = & \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{d\omega_x}{dt} & \frac{d\omega_y}{dt} & \frac{d\omega_z}{dt} \\ x & y & z \end{vmatrix} + [\bar{i}\omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x] + \\ & + \bar{j}[\omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y] + \bar{k}[\omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z]. \end{aligned}$$

Egalînd între ei coeficienții lui  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  și  $\bar{k}$  în partea dreaptă și stîngă a acestei egalități, vom ajunge la expresiile căutate:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ a_y &= \frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ a_z &= \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

Dacă axa de rotație  $\Delta$  coincide cu axa  $Oz$ , atunci vom avea:  $\omega_x = \omega_y = 0$ . În acest caz, formulele (18.14) capătă următoarea formă:

$$a_x = -\frac{d\omega_z}{dt} y - \omega^2 x, \quad a_y = \frac{d\omega_z}{dt} x - \omega^2 y, \quad a_z = 0. \quad (18.15)$$

Calculînd pătratul modulului după formula  $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ , vom găsi:

$$a^2 = \left( \frac{d\omega_z}{dt} y + \omega^2 x \right)^2 + \left( \frac{d\omega_z}{dt} x - \omega^2 y \right)^2 = \left( \frac{d\omega_z}{dt} \right)^2 (x^2 + y^2) + \omega^4 (x^2 + y^2).$$

Deoarece  $x^2 + y^2$  este pătratul distanței  $R$  a punctului la axa  $Oz$ , vom avea:

$$a^2 = R^2 \left[ \left( \frac{d\omega_z}{dt} \right)^2 + \omega^4 \right],$$

ajungem la formula (18.3).



Din formula (18.13) rezultă că vectorul  $\bar{a}$  este suma a doi vectori:

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}'',$$

unde

$$\bar{a}' = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \quad \bar{a}'' = (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) \bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}.$$

Dacă viteza unghiulară de rotație a solidului este constantă, atunci vom avea  $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = 0$ , și prin urmare vom avea  $\bar{a}' = 0$ , adică componenta  $\bar{a}'$  a accelerației  $\bar{a}$  depinde de variația vitezei unghiulare.

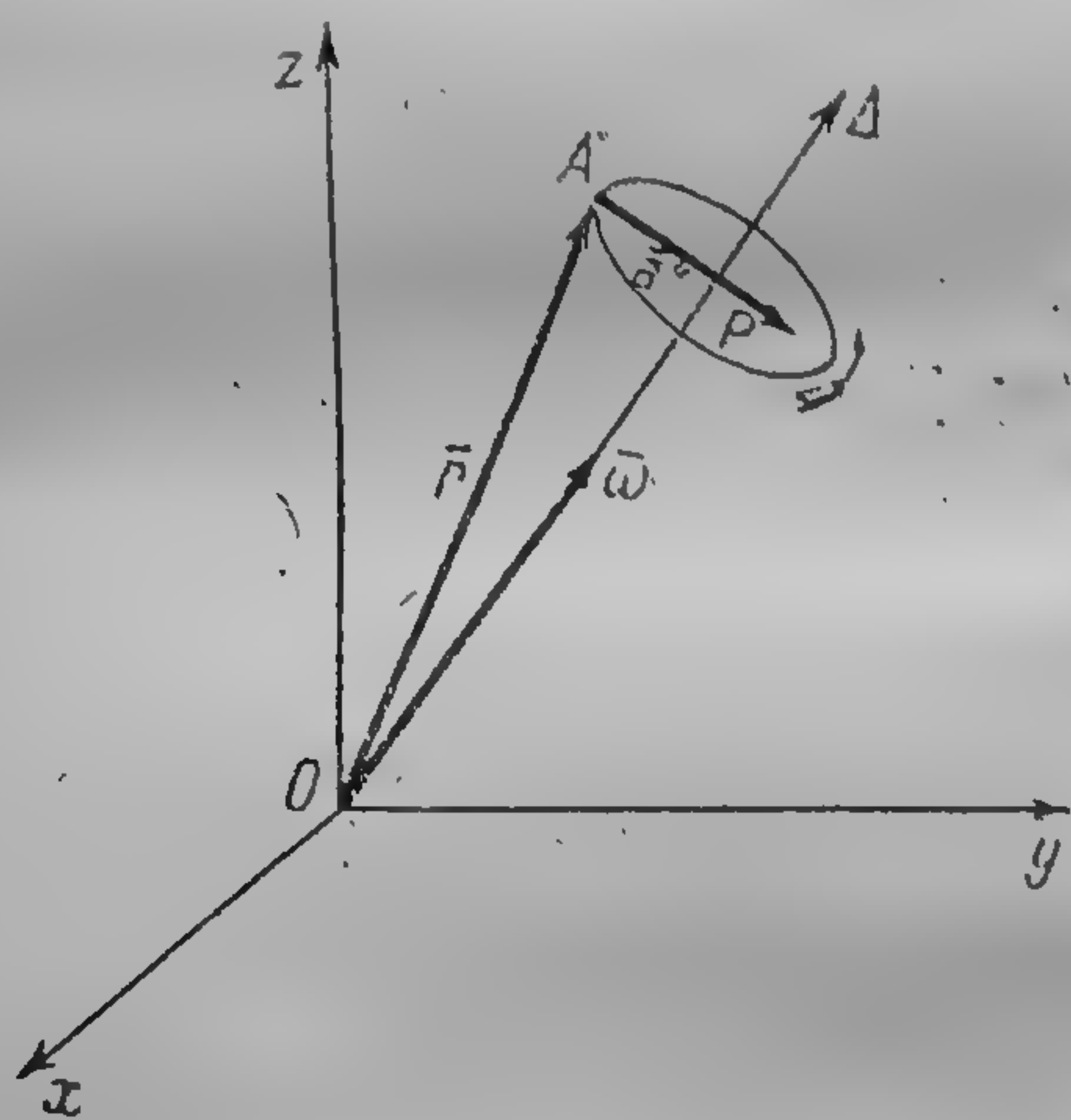


Fig. 169

Dacă rotația solidului va fi uniformă, atunci, deoarece toate punctele solidului vor descrie circumferințe, în mișcare uniformă, accelerațiile tuturor punctelor solidului, trebuie să fie dirijate spre centrele acestor circumferințe, adică să fie accelerații centripete și după § 73, trebuie să fie egale cu  $R\omega^2$ , unde  $R$  sînt razele circumferințelor. Pentru a obține din acest rezultat proiec-

țiile  $a_x''$ ,  $a_y''$ ,  $a_z''$  ale accelerației  $\bar{a}''$ , ne vom folosi de fig. 169 și vom cerceta mișcarea unui punct oarecare  $A$  al solidului. Coborînd perpendiculara  $AP$  pe axa de rotație  $\Delta$  vom găsi că vectorul accelerației  $\bar{a}$  va fi egal cu  $\omega^2 \overline{AP}$ . Să calculăm proiecția acestui vector, de exemplu, pe axa  $Ox$ , vom avea:

$$a_x'' = \omega^2 AP_x.$$

Dar din triunghiul  $AOP$  avem:

$$\overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OP},$$

adică

$$\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} = \overline{OP} - r.$$



Prin urmare, trebuie să avem:

$$AP_x = OP_x - x.$$

Pentru a obține pe  $OP_x$ , observăm că vom avea:

$$OP = OA \cos(\widehat{AOP}).$$

Vom nota unghiurile formate de axa de rotație  $\Delta$  cu axele de coordonate, prin  $\alpha, \beta, \gamma$  și vom nota prin  $\bar{\Delta}^0$  vectorul unitar, al axei  $\Delta$ . Atunci, conform § 18, vom avea:

$$OA \cos(\widehat{AOP}) = \overline{OA} \cdot \bar{\Delta}^0;$$

deoarece proiecțiile vectorului unitar  $\bar{\Delta}^0$  pe axele de coordonate sînt  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , atunci în baza aceluiași § 18 obținem:

$$OP = \overline{OA} \cdot \bar{\Delta}^0 = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

De aceea, deoarece vectorul  $OP$  este situat de-a lungul axei  $\Delta$ ,

$$OP_x = (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \cos \alpha.$$

În acest fel, găsim:

$$AP_x = OP_x - x = (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \cos \alpha - x.$$

Ținînd seamă de egalitățile:

$$\omega_x = \omega \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cos \beta, \quad \omega_z = \omega \cos \gamma,$$

din formula  $a_x'' = \omega^2 AP_x$  vom obține:

$$a_x'' = \omega^2 (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \cos \alpha - \omega^2 x,$$

sau

$$a_x'' = \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x,$$

adică ajungem la rezultatul stabilit prin prima formulă (18.14).

Se mai poate lămuri semnificația vectorului  $\bar{a}''$  pornind de la formula

$$\bar{a}'' = (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) \bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}.$$

În adevăr, avem:

$$\bar{\omega} \cdot \bar{r} = \omega r \cos(\bar{\omega}, \bar{r}) \text{ și } \bar{\omega} = \omega \bar{\omega}^0;$$

prin urmare, vom avea:

$$\bar{a}'' = \omega^2 r \cos(\bar{\omega}, \bar{r}) \bar{\omega}^0 - \omega^2 \bar{r} = \omega^2 [r \cos(\bar{\omega}, \bar{r}) \bar{\omega}^0 - \bar{r}],$$

sau

$$\bar{a}'' = \omega^2 (\overline{OP} - \overline{OA}) = \omega^2 \overline{AP}.$$



În acest fel, direct din formula vectorială a lui  $\bar{a}''$  se deduce că  $\bar{a}''$  este accelerația centripetă.

În cercetările precedente am presupus că axa de rotație  $\Delta$  a solidului, trece prin originea  $O$  a coordonatelor. Desigur, la fel ca și cu ocazia deducerii formulelor pentru viteză, ne putem dispensa de această limitare. Vom face această transformare pentru cazul când axa de rotație  $\Delta$  va fi paralelă la axa  $Oz$  dar nu va coincide cu ea, ci va întretăia planul  $Oxy$  într-un punct oarecare cu coordonatele  $(\xi, \eta)$ . Evident că, în acest caz, bazându-ne pe formulele de transformare a originii coordonatelor, vom obține următoarele expresii pentru proiecțiile  $a_x, a_y, a_z$  ale accelerației  $a$ :

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -\frac{d\omega_z}{dt}(y-\eta) - \omega^2(x-\xi), \\ a_y &= +\frac{d\omega_z}{dt}(x-\xi) - \omega^2(y-\eta), \\ a_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

Ridicându-le la pătrat și adunînd, vom avea:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{d\omega_z}{dt}\right)^2 + \omega^4\right] [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} = \\ &= R \sqrt{\left(\frac{d\omega_z}{dt}\right)^2 + \omega^4}, \end{aligned} \quad (18.17)$$

unde ca și mai înainte  $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$  este distanța de la punctul considerat la axa de rotație  $\Delta$ .

§ 80. Exemple. 55. O placă dreptunghiulară, perpendiculară pe planul desenului, a cărei urmă pe acest plan este  $AB$ , execută o mișcare de translație cu viteza constantă  $w$  care formează unghiul  $\beta$  cu direcția  $AB$  (fig. 170). Afară de aceasta, placa oscilează prin translație cu viteza variabilă  $v(t)$  în jurul poziției ei mijlocii în direcția perpendiculară pe viteza  $w$ . Să se găsească unghiul  $\alpha$  format de viteza mișcării compuse și placă. Deoarece placa se găsește în mișcare de translație, vitezele tuturor punctelor plăcii vor fi egale între ele. Să examinăm un punct oarecare  $C$  al plăcii, situat pe urma  $AB$ , și să presupunem că placa se ridică; atunci, după cum se vede din fig. 170, vom avea:

$$\alpha = \beta - s,$$

unde  $\operatorname{tg} s = \frac{v(t)}{w}$ . Dacă placa ar coborî, am avea:

$$\alpha = \beta + s.$$

Vom uni amîndouă aceste formule într-una singură.

$$\alpha = \beta \mp s.$$



De aici avem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\beta \mp \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg} \beta \mp \operatorname{tg} \varepsilon}{1 \pm \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varepsilon},$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta \mp \frac{v}{w}}{1 \pm \frac{v}{w} \operatorname{tg} \beta}.$$

Dacă valoarea maximă a vitezei  $v(t)$  este mică în comparație cu  $w$ , atunci se poate pune cu aproximație  $\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon$ ; de aceea, vom avea  $\varepsilon = \frac{v(t)}{w}$ , și vom obține formula aproximativă:

$$\alpha = \mp \frac{v(t)}{w}.$$

Presupunem că oscilațiile plăcii cu viteza  $v(t)$  se fac după legea de oscilație armonică  $v(t) = \frac{2\pi a}{T} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ , unde  $a$  este amplitudinea oscilațiilor, iar  $T$  — perioada oscilațiilor, dacă raportul  $\frac{a}{T}$  este mic în comparație cu valoarea vitezei  $w$ , atunci, aplicând formula precedentă, vom obține:

$$\alpha = \beta - \frac{2\pi a}{wT} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

unde ambele semne sînt deja incluse în funcția cosinus, deoarece la ridicare-cosinusul va fi pozitiv, iar la coborîre negativ. Acest fenomen se produce:

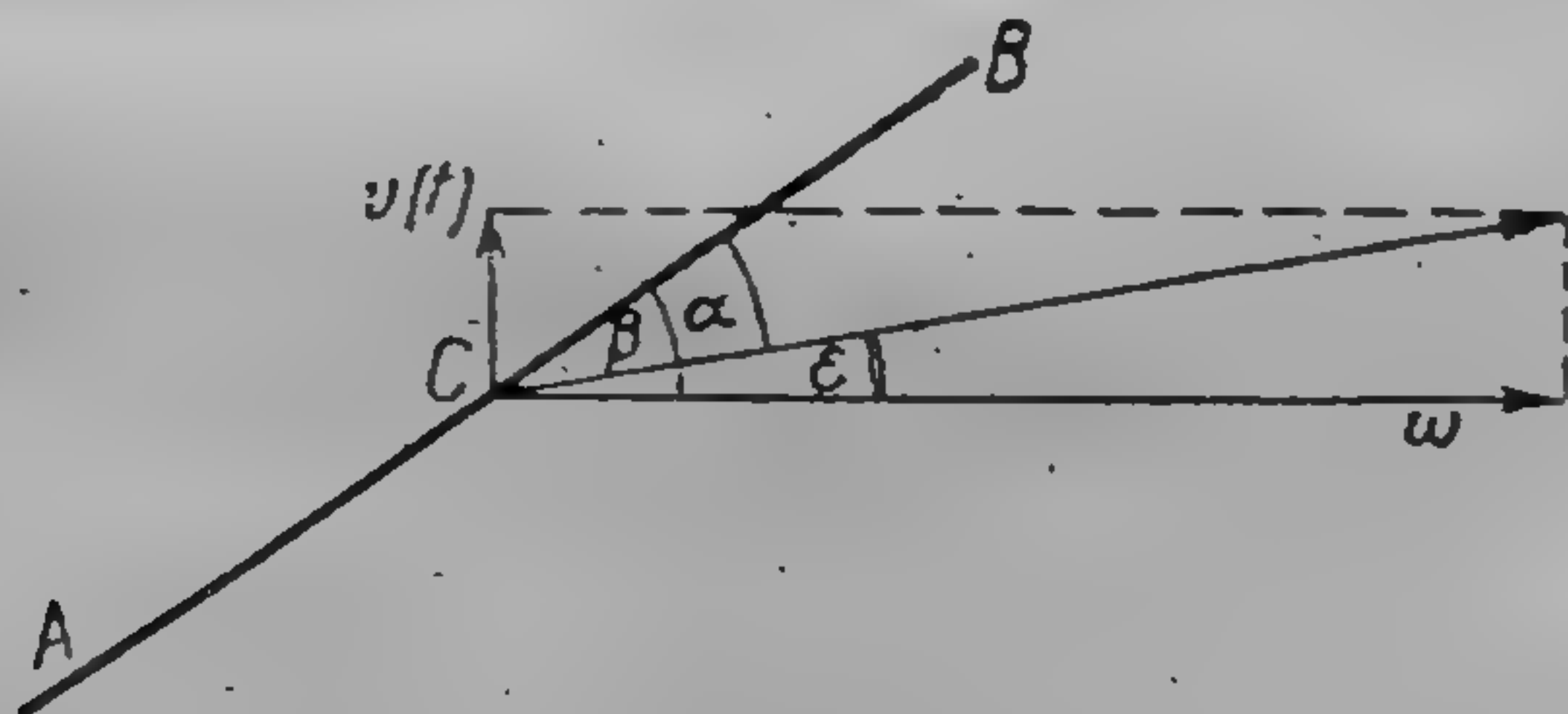


Fig. 170

în aviație, cînd unghiul  $\beta$  de atac al aripii avionului devine unghiul de atac  $\alpha$  din cauza oscilațiilor aripii, perpendiculare pe viteza avionului (cazul aripii de avion).

56. Să se determine proiecțiile vitezelor punctelor unui solid, pentru cazurile cînd solidul se rotește în jurul axei  $Ox$ , axei  $Oy$  și axei  $Oz$ . Aplicînd formulele (18.6) ale lui Euler, trebuie să presupunem succesiv:

$$\omega_x = \omega, \quad \omega_y = \omega_z = 0; \quad \omega_y = \omega, \quad \omega_x = \omega_z = 0; \quad \omega_z = \omega, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$



Vom obține respectiv:

<u>Ox</u>	<u>Oy</u>	<u>Oz</u>
$v_x = 0,$	$v_x = +\omega z,$	$v_x = -\omega y,$
$v_y = -\omega z,$	$v_y = 0,$	$v_y = +\omega x,$
$v_z = +\omega y;$	$v_z = -\omega x;$	$v_z = 0.$

57. Să se determine pătratul vitezei unui punct oarecare al unui solid, care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega$  în jurul axei  $\Delta$ , care trece prin originea  $O$  a coordonatelor și formează cu axele coordonatelor, unghiuri egale. Deoarece:

$$\omega_x = \omega \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cos \beta, \quad \omega_z = \omega \cos \gamma.$$

iar

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

atunci dacă  $\alpha = \beta = \gamma$ , obținem:

$$\omega_x = \omega \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_y = \omega \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_z = \omega \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aplicând formulele (18.6) ale lui Euler, vom avea:

$$v_x = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(z-y), \quad v_y = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(x-z), \quad v_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(y-x).$$

De aici găsim:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{\omega^2}{3} [(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2],$$

sau.

$$v^2 = \frac{2\omega^2}{3} [(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)].$$

58. Un solid se rotește în jurul axei fixe  $\Delta$ , care trece prin originea coordonatelor  $O$  și formează cu axele coordonatelor unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ . Să se afle pătratul vitezei unui punct oarecare al acestui solid, dacă viteza unghiulară de rotație este egală cu  $\omega$ . Avem:

$$\omega_x = \omega \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cos \beta, \quad \omega_z = \omega \cos \gamma;$$

de aceea, formulele lui Euler se pot reprezenta sub forma:

$$v_x = \omega(z \cos \beta - y \cos \gamma), \quad v_y = \omega(x \cos \gamma - z \cos \alpha), \\ v_z = \omega(y \cos \alpha - x \cos \beta).$$

De aici găsim:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \omega^2 [(z \cos \beta - y \cos \gamma)^2 + (x \cos \gamma - z \cos \alpha)^2 + \\ + (y \cos \alpha - x \cos \beta)^2],$$

sau:

$$v^2 = \omega^2 [(z^2 + y^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (y^2 + x^2) \cos^2 \gamma - \\ - 2zy \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \gamma \cos \alpha - 2yx \cos \alpha \cos \beta].$$



59. Să se găsească proiecțiile momentului  $\bar{J}$  al vitezei unui punct oarecare al solidului care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega$  în jurul unei axe fixe  $\Delta$ , care trece prin originea  $O$  a axelor de coordonate. Conform § 11–13, avem:

$$J_x = yv_z - zv_y, \quad J_y = zv_x - xv_z, \quad J_z = xv_y - yv_x.$$

Aplicând expresiei pentru  $J_x$ , formulele (18.16) ale lui Euler, vom obține:

$$J_x = y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z),$$

sau

$$J_x = \omega_x y^2 + \omega_x z^2 - \omega_y xy - \omega_z xz.$$

Adunând și scăzând din partea dreaptă, produsul  $\omega_x x^2$ , vom avea:

$$J_x = \omega_x (x^2 + y^2 + z^2) - x(\omega_x x - \omega_y y + \omega_z z).$$

Introducând vectorul de poziție al punctului și expresia produsului scalar, găsim:

$$J_x = \omega_x r^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) x;$$

în mod analog pentru mărimile  $J_y$  și  $J_z$ , vom obține:

$$J_y = \omega_y r^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) y, \quad J_z = \omega_z r^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) z.$$

60. Să se găsească proiecțiile accelerației unui punct al solidului care se rotește cu o viteză unghiulară constantă  $\omega$  în jurul axei  $\Delta$  care trece prin originea  $O$  a coordonatelor și formează unghiuri egale cu axele de coordonate. Avem:

$$\omega_x = \omega \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cos \beta, \quad \omega_z = \omega \cos \gamma, \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Deoarece  $\alpha = \beta = \gamma$ , vom obține:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}}.$$

De aceea, din formulele (18.14) găsim:

$$a_x = \frac{\omega^2}{3} (x + y + z) - \omega^2 x,$$

$$a_y = \frac{\omega^2}{3} (x + y + z) - \omega^2 y,$$

$$a_z = \frac{\omega^2}{3} (x + y + z) - \omega^2 z,$$

sau:

$$a_x = \frac{\omega^2}{3} (z + y - 2x), \quad a_y = \frac{\omega^2}{3} (x + z - 2y), \quad a_z = \frac{\omega^2}{3} (x + y - 2z).$$

De aici vom avea pentru pătratul accelerației:

$$a^2 = \frac{2\omega^4}{3} [(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)].$$



## CAPITOLUL XIX

### MIȘCAREA PLAN PARALELĂ A SOLIDULUI

§ 81. Studiul geometric al deplasărilor solidului în mișcarea plan paralelă. În cadrul staticii s-a consacrat sistemului plan de forțe un capitol special, capitolul IX din prezentul curs de meca-

nică. Și în cinematică se consacră un capitol special cazului analog de mișcare a solidului, adică aceluia caz al cărui studiu ne duce la cercetarea sistemelor de deplasări, viteze și accelerații, situate în același plan. O asemenea mișcare poate fi definită astfel:

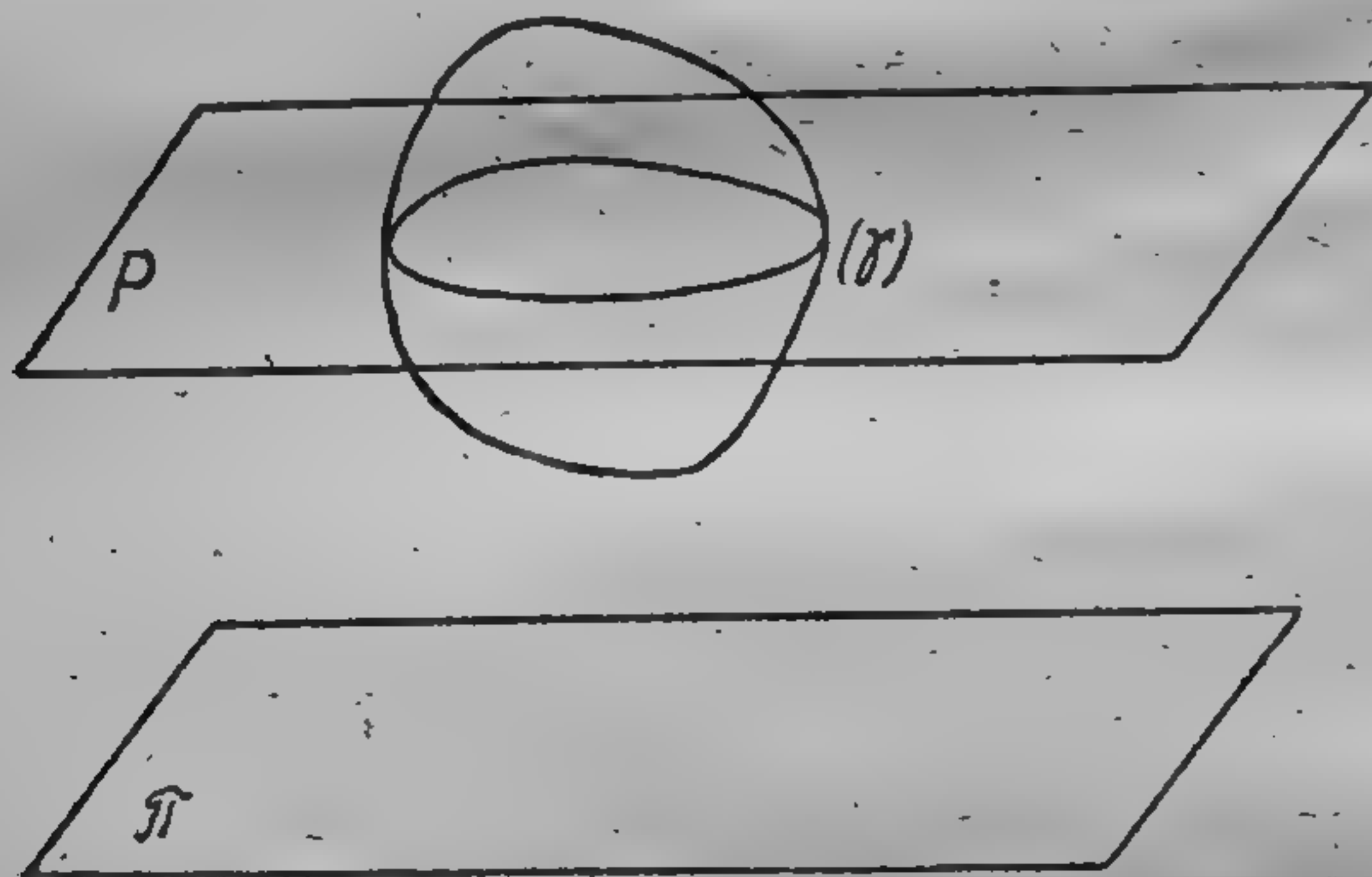


Fig. 171

*Dacă în mișcarea unui solid toate punctele lui se deplasează paralel cu un plan oarecare, această mișcare a solidului se numește mișcare plan-paralelă, sau mișcare plană.*

Asemenea mișcare a solidului este foarte importantă, deoarece ea are loc la foarte multe mașini și mecanisme.

Să presupunem că un solid se găsește într-o mișcare plan paralelă, fie  $\pi$  planul paralel cu care se produce mișcarea tuturor punctelor solidului (fig. 171). Ducem planul  $P$ , paralel cu planul  $\pi$ , astfel încât el să intersecteze corpul considerat; prin secționare vom obține o suprafață mărginită de conturul  $(\gamma)$ . Evident, că prin deplasarea solidului considerat, figura plană mărginită de conturul  $(\gamma)$  se va deplasa în planul  $P$ . Astfel, în loc să studiem mișcarea plană paralelă a solidului, este suficient să studiem mișcarea acestei figuri plane în planul ei.



Se observă ușor că două puncte ale acestei figuri plane determină poziția ei în planul  $P$ , adică în loc să urmărim mișcarea figuri plane în planul ei, este suficient să urmărim mișcarea a două puncte oarecare ale ei, de exemplu, punctele  $A$  și  $B$ , din acest plan (fig. 172). Deoarece punctele  $A$  și  $B$  determină pe deplin segmentul  $AB$ , tragem de aici concluzia că studiul mișcării figuri plane în planul ei, se reduce la studiul mișcării unui segment de dreaptă în acest plan.

Să presupunem că la început figura plană ocupă poziția  $I$ ; apoi, deplasându-se în planul ei, ea ocupă poziția a  $II$ -a (fig. 173). Observăm că aici nu ne interesează legea după care se produc

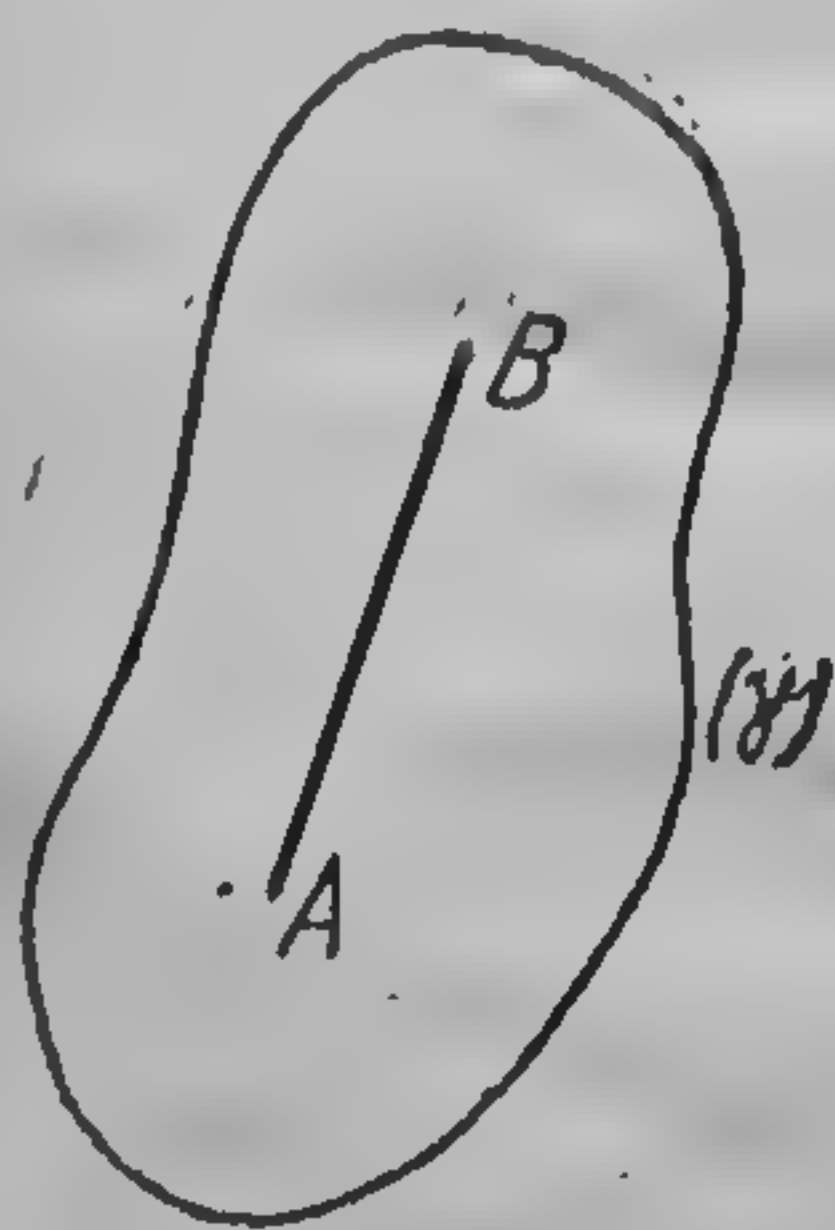


Fig. 172

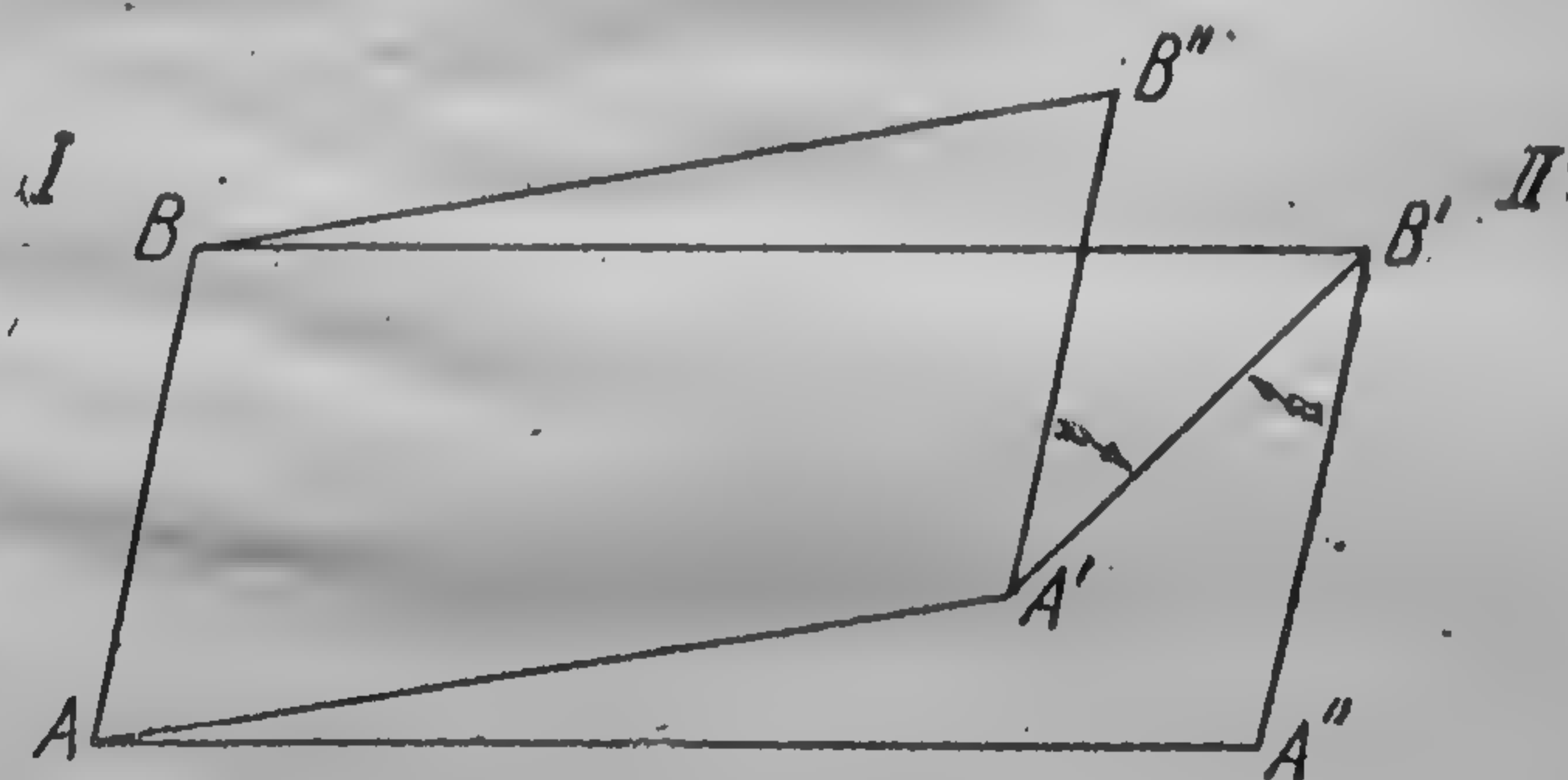


Fig. 173

deplasarea figuri din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a; putem chiar ignora această lege, deoarece noi examinăm numai cele două poziții  $I$  și  $II$  ale acestei figuri. Vom dovedi că *figura plană se poate totdeauna deplasa din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a printr-o mișcare de translație (§ 76) și printr-o mișcare de rotație*. În adevăr, vom lua în figura considerată în poziția ei  $I$ , un segment de dreaptă oarecare  $AB$ . În poziția a  $II$ -a a figuri plane, acest segment va trece în poziția  $A'B'$ . Unim între ele punctele  $A$  și  $A'$  prin dreapta  $AA'$  și ducem segmentul  $BB''$   $\parallel$   $AA'$ . Vedem că deplasarea segmentului din poziția  $AB$  în poziția  $A'B'$  se poate obține printr-o translație  $AA'$  care mută segmentul din poziția  $AB$  în poziția  $A'E''$  și printr-o deplasare de rotație în jurul punctului  $A'$ , sub unghiul  $B''A'B'$  care deplasează segmentul din poziția  $A'E''$  în poziția  $A'B'$ . Astfel, teorema este demonstrată. Observăm că în timp ce mișcarea de translație va fi în general diferită pentru diversele puncte ale figuri plane, mărimea și sensul unghiului de rotație al figuri plane vor fi totdeauna aceleași. În adevăr, vom face aceeași construcție ca și mai sus,



pentru punctul  $B$ ; anume, vom uni printr-o dreaptă punctul  $B$  cu punctul  $B'$  și vom duce segmentul  $AA'' \parallel BB'$ . Vedem că se poate deplasa segmentul  $AB$  în poziția  $A'B'$  printr-o translație  $BB'$ , care mută segmentul  $AB$  în poziția  $A''B'$  și printr-o rotație în jurul punctului  $B'$  sub unghiul  $A''B'A'$ , care mută segmentul din poziția  $A''B'$  în poziția  $A'B'$ . Dar, în timp ce deplasările de translație  $AA'$  și  $BB'$  sînt în general diferite, unghiurile de rotație  $B''A'B'$  și  $A''B'A'$  sînt egale între ele ca unghiuri alterne interne

la două drepte paralele și ambele rotiri se fac în același sens, și anume, pentru fig. 173 în sensul acelor unui ceasornic.

Vom dovedi acum că amîndouă aceste mișcări, de translație și de rotație, se pot înlocui printr-o singură mișcare de rotație, cu alte cuvinte vom demonstra următoarea teoremă:

*Figura plană se poate totdeauna deplasa în planul ei, dintr-o poziție în alta, prin rotirea ei în jurul unui anumit punct.*

Vom lua în figura plană un segment oarecare de dreaptă  $AB$

și vom presupune că din cauza deplasării figurii plane, segmentul  $AB$  trece în poziția  $A'B'$  (fig. 174). Unim prin drepte punctul  $A$  cu  $A'$  și punctul  $B$  cu  $B'$ . Dacă segmentul  $AB$  se poate muta în poziția  $A'B'$  prin rotirea în jurul unui centru oarecare, atunci punctul  $A$  trebuie să treacă în  $A'$  descriind o circumferință și punctul  $B$  trebuie să treacă în  $B'$  descriind o circumferință concentrică; de aceea, segmentele  $AA'$  și  $BB'$  vor fi coardele acestor circumferințe. Bazîndu-ne pe o teoremă din geometria elementară, vom ridica în mijloacele  $L$  și  $M$  ale coardelor  $AA'$  și  $BB'$  perpendiculare pe aceste coarde; perpendicularele ridicate se vor intersecta într-un punct  $C$  care trebuie să fie centrul de rotație. În adevăr, unim punctul  $C$  cu punctele  $A, B, A', B'$ . Triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C$  vor fi egale între ele ca fiind triunghiuri cu laturi egale; în adevăr, avem:  $A'B' = AB$  și  $CA = CA', CB = CB'$  ca oblice egal depărtate de perpendicularele  $CL$  și  $CM$ . De aici, urmează că rotînd triunghiul  $ABC$  în jurul punctului  $C$  în sens pozitiv, sub unghiul  $ACA'$  îl vom aduce să coincidă cu triunghiul  $A'B'C$ ; adică vom muta segmentul  $AB$  în poziția  $A'B'$ , printr-o

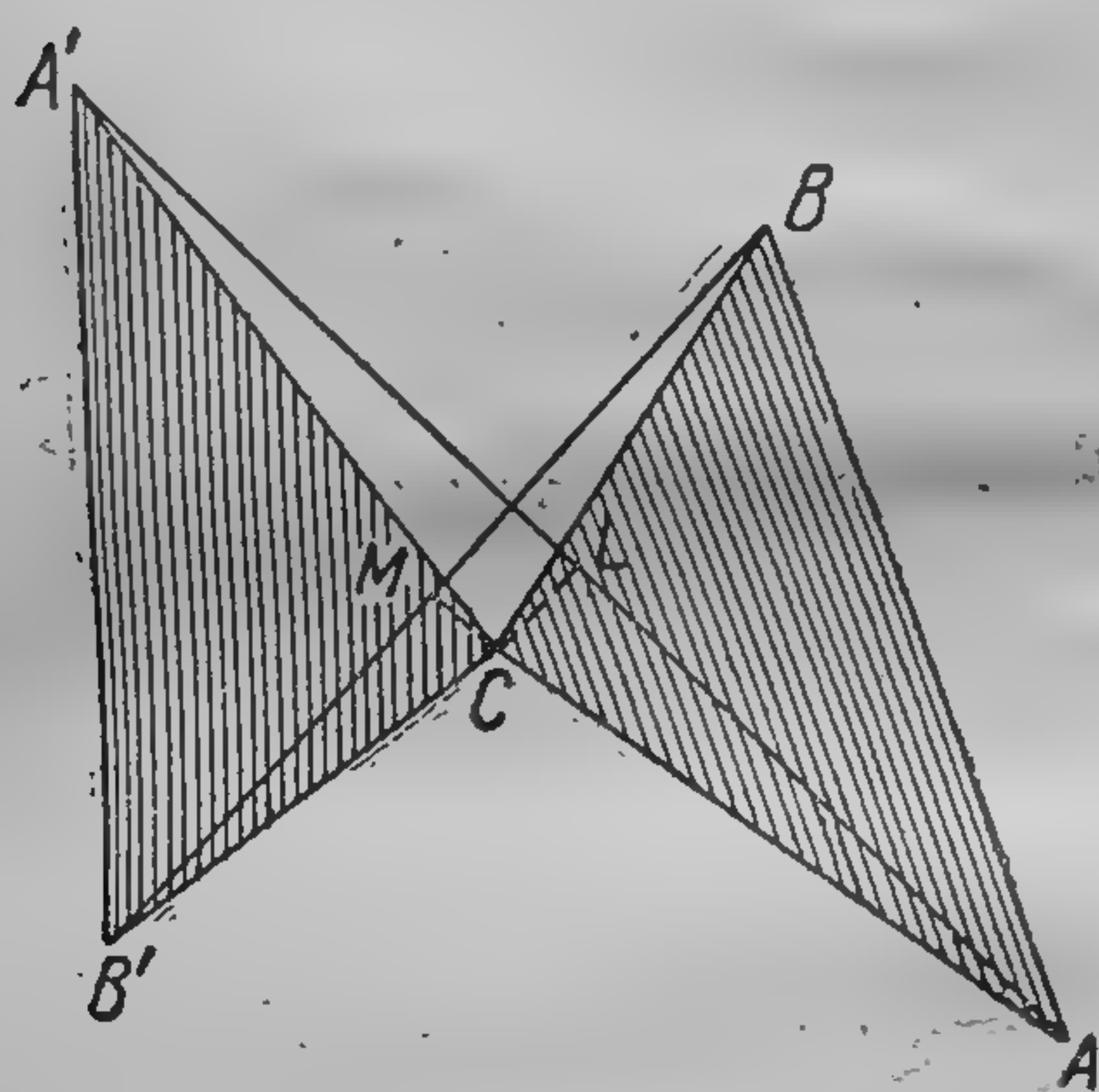


Fig. 174



rotație în jurul centrului  $C$  sub unghiul  $ACA'$ . Evident, că segmentul  $AB$  se poate aduce să coincidă cu segmentul  $A'B'$  prin rotirea triunghiului  $ABC$  în jurul punctului  $C$  și în sens negativ, adică în sensul acelor unui ceasornic. În cazul fig. 174, unghiul de rotație în sens negativ va fi mai mare decât unghiul de rotație în sens pozitiv. Vom alege totdeauna, în lipsa unor indicații speciale, pentru rotație cel mai mic unghi, dintre cele două unghiuri de rotație posibile.

Există câteva cazuri speciale în care teorema precedentă nu conduce la soluții practice. Să presupunem anume că  $AB \parallel A'B'$

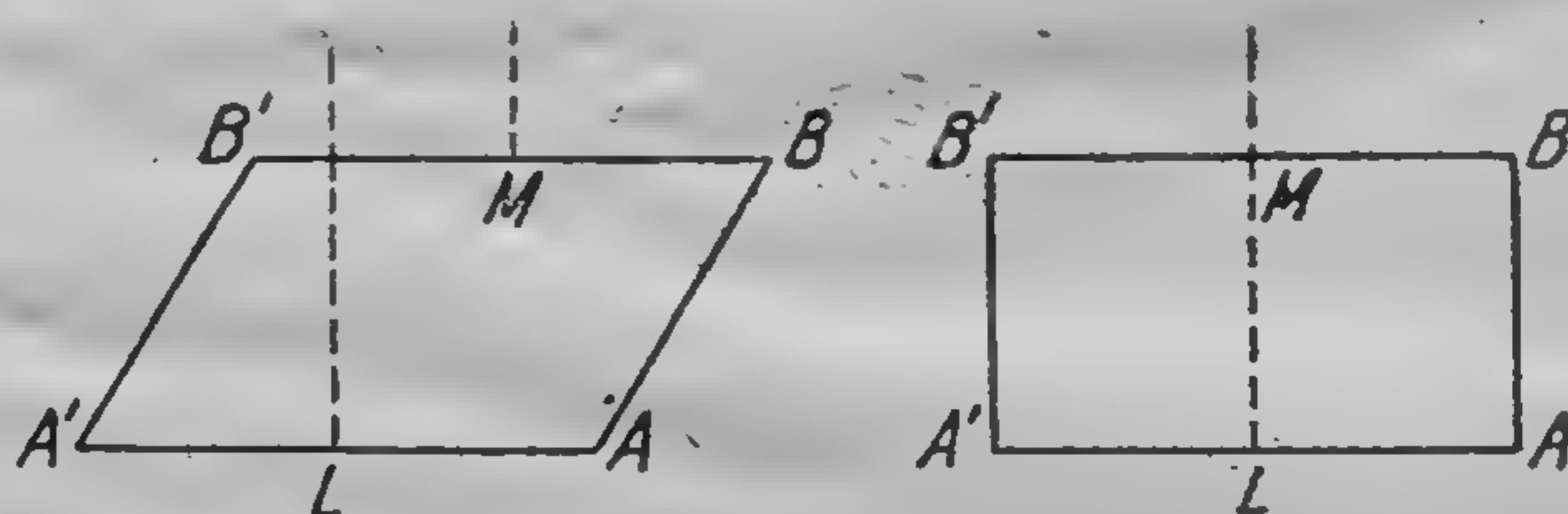


Fig. 175

după cum se arată în fig. 175. Executând construcția precedentă, noi vom găsi că perpendicularele ridicate din mijloacele  $L$  și  $M$  ale segmentelor  $AA'$  și  $BB'$  sau vor fi paralele între ele, sau se vor confunda. Dar, evident că în ambele cazuri centrul de rotație se găsește la infinit, și deplasarea segmentului  $AB$  se reduce la o deplasare de translație.

Să presupunem apoi, că figura  $A'B'B'A'$  va fi un trapez isoscel (fig. 176), în acest caz, perpendicularele pe  $AA'$  și  $BB'$  în punctele  $L$  și  $M$  vor coincide de asemenea, și evident că punctul de rotație va fi punctul  $C$  care se află la întretaieri prelungirii laturilor trapezului  $AA'$  și  $A'B'$ .

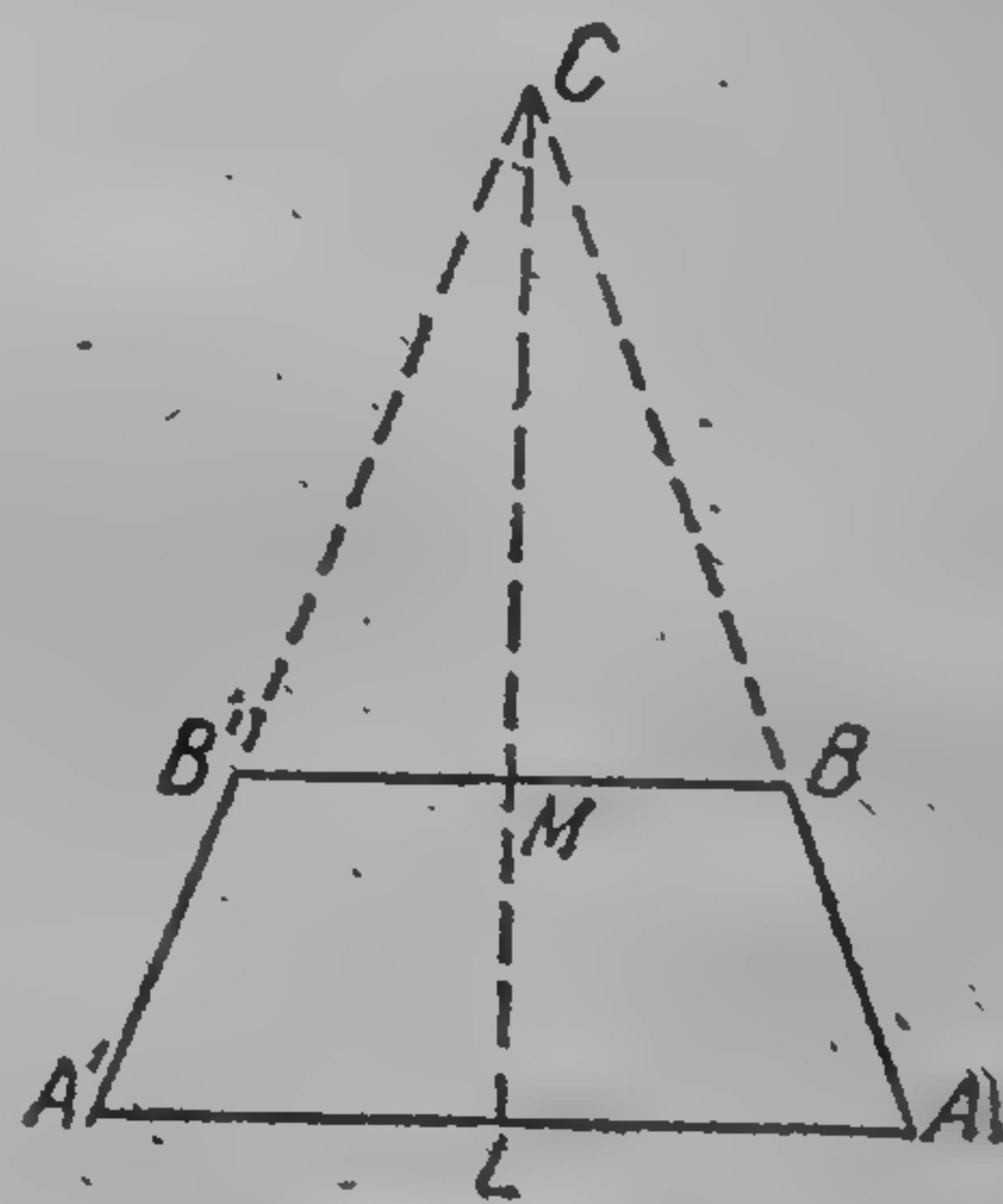


Fig. 176

Până acum am cercetat numai două poziții:  $I$  și  $II$  ale figurii plane, fără să ne punem întrebarea, în ce mod într-o deplasare reală, figura plană trece din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a. În general trecerea figurii plane din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a, printr-o singură rotație ar putea să nu reprezinte deplasarea reală a



figurii plane. Să presupunem acum că examinăm o deplasare *reală* foarte mică a figurii plane, la care poziția a *II*-a va fi foarte apropiată de poziția *I*. Aici la deplasarea reală, punctul *A* va trece într-un punct foarte apropiat  $A'$  descriind un arc foarte mic  $\widehat{AA'}$  al unei curbe oarecare, iar punctul *B* va trece într-un punct foarte apropiat  $B'$ , descriind un arc foarte mic  $\widehat{BB'}$  al unei alte curbe oarecare. Vom face acum deplasarea figurii din poziția *I* în poziția a *II*-a printr-o rotație, găsind pentru aceasta centrul corespunzător *C*. Evident, că prin această mișcare de rotație, punctul *A* va descrie un arc de cerc foarte mic  $\widehat{AA'}$  și punctul *B* va descrie un arc de cerc foarte mic  $\widehat{BB'}$ , iar aceste arce de cerc vor fi foarte apropiate de acele arce de curbă foarte mici, care au fost descrise de către aceste puncte în deplasare reală. Astfel, cu cât va fi mai apropiată poziția a *II*-a de poziția *I*, cu atât rotirea în jurul centrului *C* va reprezenta mai precis deplasarea reală a figurii plane. Dacă poziția a *II*-a va fi foarte apropiată de poziția *I*, atunci la limită vom obține un punct în jurul căruia rotirea sub un unghi infinit mic, reprezintă o deplasare reală infinit mică. Acest punct *C* se numește *centrul vitezelor, centrul instantaneu de rotație sau pol instantaneu*. De aici obținem următoarea definiție:

*Centrul vitezelor, centrul instantaneu de rotație sau polul instantaneu se numește poziția limită a punctului în jurul căruia trebuie să se rotească sub un unghi infinit mic, o figură plană, pentru a o trece dintr-o poziție în alta, infinit apropiată de prima.*

În paragraful următor ni se va da o altă definiție a centrului instantaneu de rotație, mai comodă pentru calcule.

Să examinăm acum o deplasare oarecare finită a unei figuri plane. S-o împărțim într-un număr de deplasări infinit mici și pentru fiecare din aceste deplasări construim câte un centru instantaneu. Putem nota pozițiile acestor centre instantanee într-un plan fix pe care se deplasează figura plană; *locul geometric al centrelor instantanee de rotație într-un plan fix, se numește centroidă fixă sau bază*.

Să ne imaginăm că planul figurii plane mobile este prelungit la infinit, astfel că, prin deplasarea figurii plane, planul mobil legat de ea alunecă pe cel fix. Putem de asemenea să notăm pozițiile centrelor instantanee și pe acest plan mobil; *locul geometric al centrelor instantanee de rotație în planul mobil, se numește centroidă mobilă sau ruletă*.



Pentru a ne forma o imagine mai clară asupra celor expuse mai sus, se pot efectua următoarele construcții. Pe o coală de hîrtie se desenează o serie de poziții apropiate ale segmentului  $AB$ , așa cum se arată în fig. 177. Apoi se determină pe această coală de hîrtie pozițiile centrului  $C_1$  pentru trecerea de la  $AB$  la  $A_1B_1$ ,

centrului  $C_2$  pentru trecerea din  $A_1B_1$  în  $A_2B_2$ , centrului  $C_3$  pentru trecerea din  $A_2B_2$  în  $A_3B_3$  etc. Locul geometric al punctelor  $C_1, C_2, C_3, \dots$  la limită va fi centroida fixă sau baza. Mai departe trebuie luată o bucată de hîrtie de calc,

transparentă și desenat pe ea un segment egal cu segmentul  $AB$ . Apoi se aplică hîrtia de calc în așa fel, încît segmentul de pe ea să coincidă cu segmentul  $AB$  de pe hîrtie, înfigem prin calc un ac în punctul  $C_1$  și rotim calcul în jurul acului în așa fel, încît segmentul de pe el, plecînd de pe  $AB$ , să coincidă cu segmentul  $A_1B_1$  de pe hîrtie; după aceea scoatem acul din punctul  $C_1$ , îl înfigem prin calc în punctul  $C_2$  și întoarcem calcul în așa fel, încît segmentul de pe calc plecînd de pe  $A_1B_1$  va coincide cu segmentul  $A_2B_2$  pe hîrtie, iar gaura făcută în calc va pleca de pe punctul  $C_1$  etc. Astfel, găurile în calc vor reprezenta locul centrelor de rotație în planul mobil, care la limită va da centroida mobilă (ruleta).

Vom demonstra acum că, cunoscînd locul centrelor de rotație în planul fix și unghiurile de rotație în jurul fiecăruia dintre ele, se poate găsi locul centrelor de rotație în planul mobil. Să presupunem că se dă locul centrelor de rotație  $C, C_1, C_2, C_3, \dots$  într-un plan fix și unghiurile de rotație  $\Delta\theta, \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \dots$

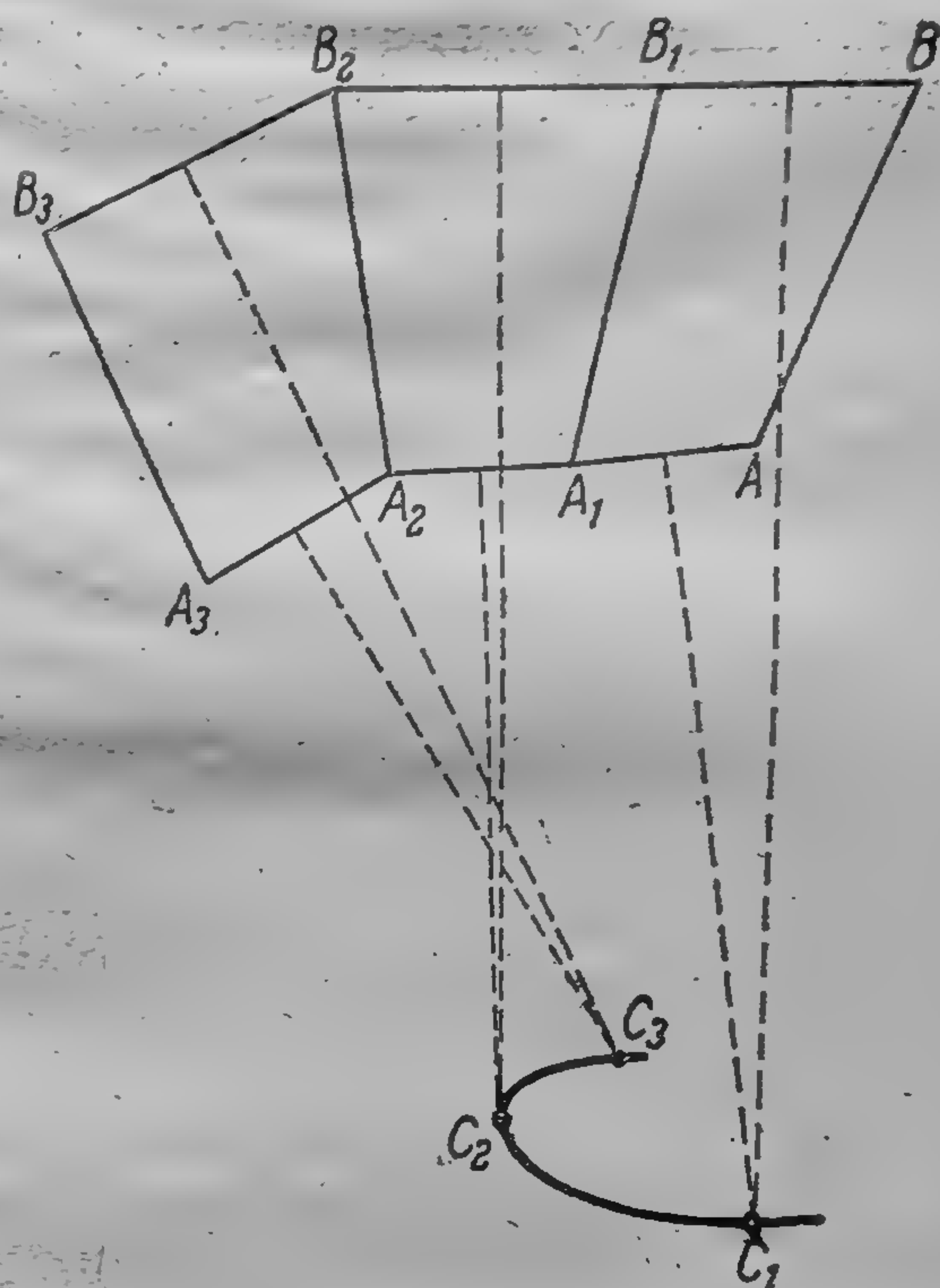


Fig. 177



în jurul fiecăreia dintre ele (fig. 178). Vom uni punctele  $C, C_1, C_2, C_3, \dots$  cu drepte; vom obține o linie frântă care la limită se va transforma în centroida fixă. Presupunem că toate rotațiile  $\Delta\theta, \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \dots$  se produc în sens pozitiv, adică în sens contrar acelor unui ceasornic. Vom efectua construcția de mai jos. Măsurăm de la punctul  $C$  segmentul  $CC_1 = CC_1$  rotit sub unghiul  $\Delta\theta$  în sens negativ. Apoi ducem din punctul  $C_1$  dreapta  $C_1A_1$  în așa fel, încît să avem  $\angle CC_1A_1 = \angle CC_1C_2$ . De la dreapta  $C_1A_1$  în sensul rotațiilor negative vom măsura segmentul  $C_1C_2 = C_1C_2$  sub unghiul  $\Delta\theta_1$  față de dreapta  $C_1A_1$ . Mai departe, vom duce din punctul  $C_2$  dreapta  $C_2A_2$ , astfel încît să avem  $\angle C_1C_2A_2 = \angle C_1C_2C_3$ . De la dreapta  $C_2A_2$  în sensul rotațiilor negative, vom măsura segmentul  $C_2C_3 = C_2C_3$  sub unghiul  $\Delta\theta_2$  față de dreapta  $C_2A_2$  etc. Punctele  $C, C_1, C_2, C_3$  obținute în acest fel, vor fi locurile centrelor de rotație în planul mobil și linia frântă  $CC_1C_2C_3 \dots$  la limită va fi centroida mobilă.

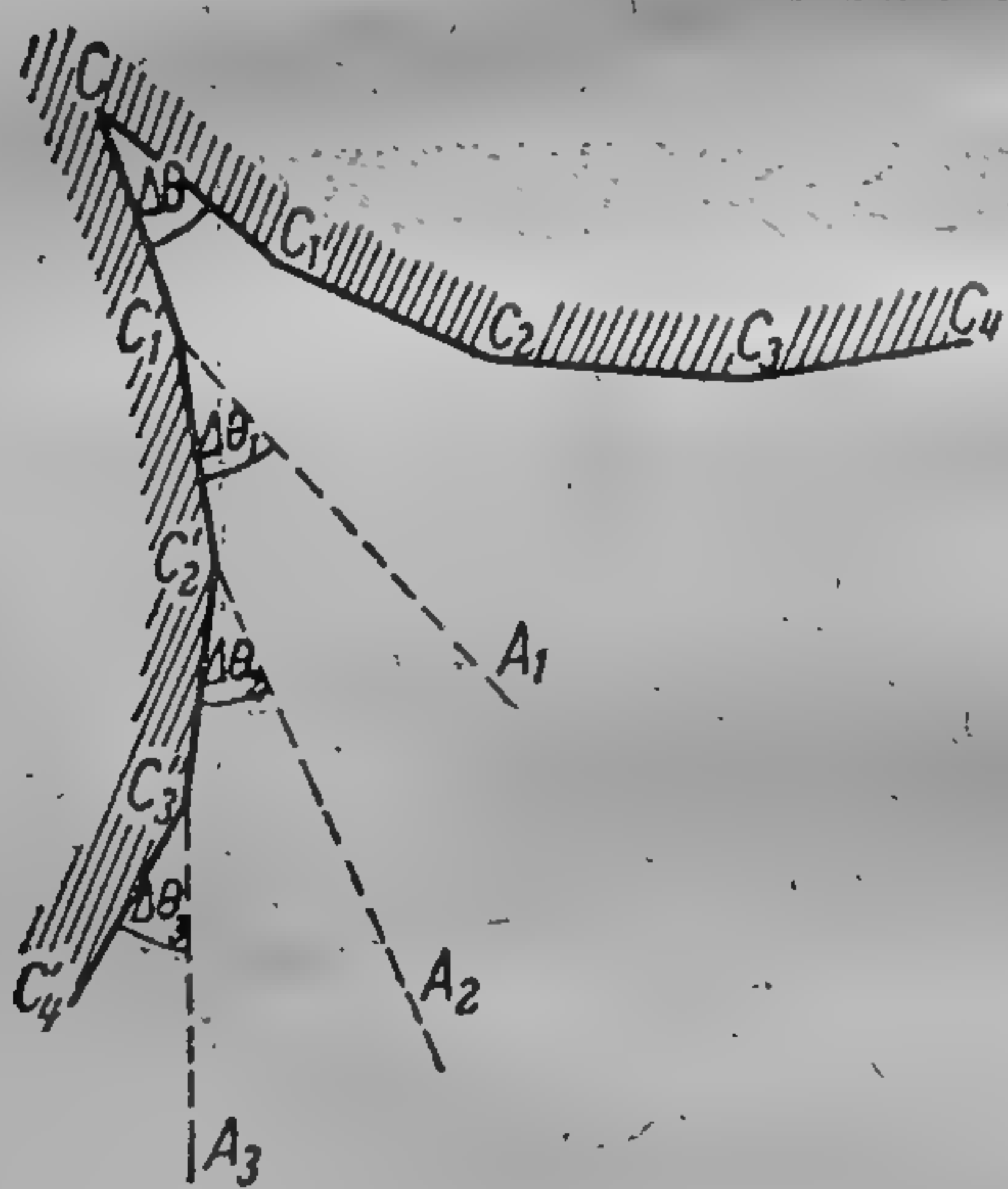


Fig. 178

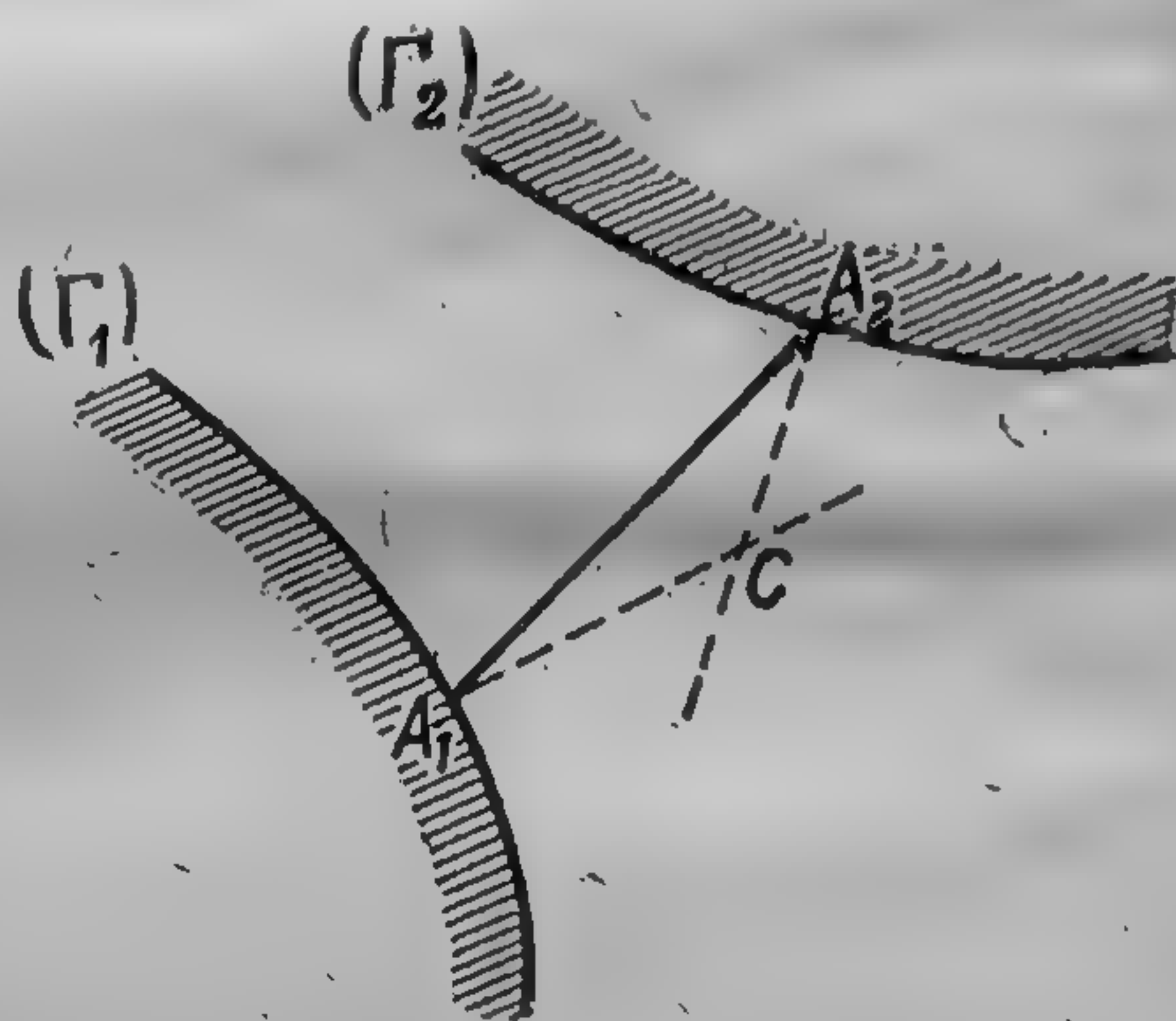


Fig. 179

În adevăr, să presupunem conform celor arătate mai sus că linia frântă  $CC_1C_2C_3$  este construită în planul mobil, iar linia frântă  $CC_1C_2C_3 \dots$  în planul fix. În poziția reprezentată în fig. 178, punctul  $C$  servește ca punct de rotație. Vom roti planul mobil în jurul punctului  $C$  în sens pozitiv cu unghiul  $\Delta\theta$ . Atunci, conform construcției, punctul  $C_1$  va coincide cu punctul  $C_1$  și dreapta  $C_1A_1$  se va suprapune pe dreapta  $C_1C_2$ . Vom roti apoi planul mobil în jurul punctului  $C_1$ , cu care coincide punctul  $C_1$



în sens pozitiv cu unghiul  $\Delta\theta_1$ , atunci, conform construcției punctul  $C'_2$  va coincide cu punctul  $C_2$ , și dreapta  $C'_2A_2$  se va suprapune peste dreapta  $C_2C_3$  etc. Continuând aceste raționamente, vom vedea, că toate punctele  $C'_1, C'_2, C'_3, \dots$  vor coincide succesiv cu punctele  $C_1, C_2, C_3, \dots$ , adică punctele  $C'_1, C'_2, C'_3, \dots$ , reprezintă locurile centrelor de rotație în planul mobil. Cu ajutorul unei foi de hârtie și a unei de calce, toate aceste construcții se pot verifica ușor.

Această construcție duce la o concluzie foarte importantă. Vedem că prin suprapunerea succesivă a centrelor  $C'_1$  cu  $C_1, C_2$  cu  $C_2, C'_3$  cu  $C_3$  și așa mai departe, laturile  $CC'_1, C'_1C'_2, C'_2C'_3 \dots$  ale liniei frînte  $CC'_1C'_2C'_3 \dots$  coincid succesiv cu laturile  $CC_1, C_1C_2, C_2C_3$  ale liniei frînte  $CC_1C_2C_3 \dots$ , adică linia frîntă  $CC'_1C'_2C'_3$  se rostogolește fără alunecare pe linia frîntă  $CC_1C_2C_3$ . Deoarece la limită aceste linii frînte se transformă în centroide concludem că:

*Orice mișcare a unei figuri plane în planul ei, se poate obține printr-o rostogolire fără alunecare a centroidei mobile, legată invariabil cu acea figură, pe centroidă fixă.*

Excepție o constituie numai mișcarea de translație pentru care ambele centroide se transformă într-un punct al planului situat la infinit.

Vedem de asemenea că, *punctul de contact al centroidei mobile cu cea fixă este centrul instantaneu de rotație în momentul dat.*

Centroidele se folosesc în mecanica aplicată.

Trebuie subliniat că, prin intermediul centroidelor pentru o viteză arbitrară de rostogolire, reproducem mișcarea reală numai geometric; pentru ca să reproducem mișcarea reală și mecanic rostogolirea centroidei mobile pe cea fixă trebuie să fie astfel, încît în orice moment să fie realizată o viteză a acestei rostogoliri care să reproducă viteza reală a mișcării.

Vom indica următorul caz al unei mișcări date, cînd este ușor de determinat poziția centrului instantaneu de rotație. Fie dată mișcarea unei figuri plane în așa fel, încît un segment oarecare  $A_1A_2$ , legat invariabil de această figură, trebuie să alunece în tot timpul mișcării cu capetele lui pe curbele date  $(\Gamma_1)$  și  $(\Gamma_2)$  (fig. 179). Să presupunem că segmentul  $A_1A_2$  a căpătat o deplasare infinit mică, ocupînd poziția  $A'_1A'_2$ . Pentru ca să găsim poziția centrului de rotație, vom uni între ele prin drepte punctele  $A_1$  cu  $A'_1$  și  $A_2$  cu  $A'_2$ , vom împărți coardele  $A_1A'_1$  și  $A_2A'_2$  în



două și din mijlocul lor vom ridica perpendiculare; intersecția acestor perpendiculare va determina centrul de rotație  $C$ . Dar segmentele  $A_1A_1'$  și  $A_2A_1'$  prelungite în ambele sensuri sînt secante care se transformă la limită în tangente, iar perpendicularele duse pe ele se transformă în normale la curbele  $(\Gamma_1)$  și  $(\Gamma_2)$ . În acest fel, obținem că *centrul instantaneu de rotație este situat în punctul de intersecție al normalelor la curbele  $(\Gamma_1)$  și  $(\Gamma_2)$  ridicate la capetele segmentului  $A_1A_2$ .*

Să aplicăm acest rezultat la următoarea problemă. Fie dată mișcarea planului mobil astfel încît segmentul  $A_1A_2$  dus pe plan

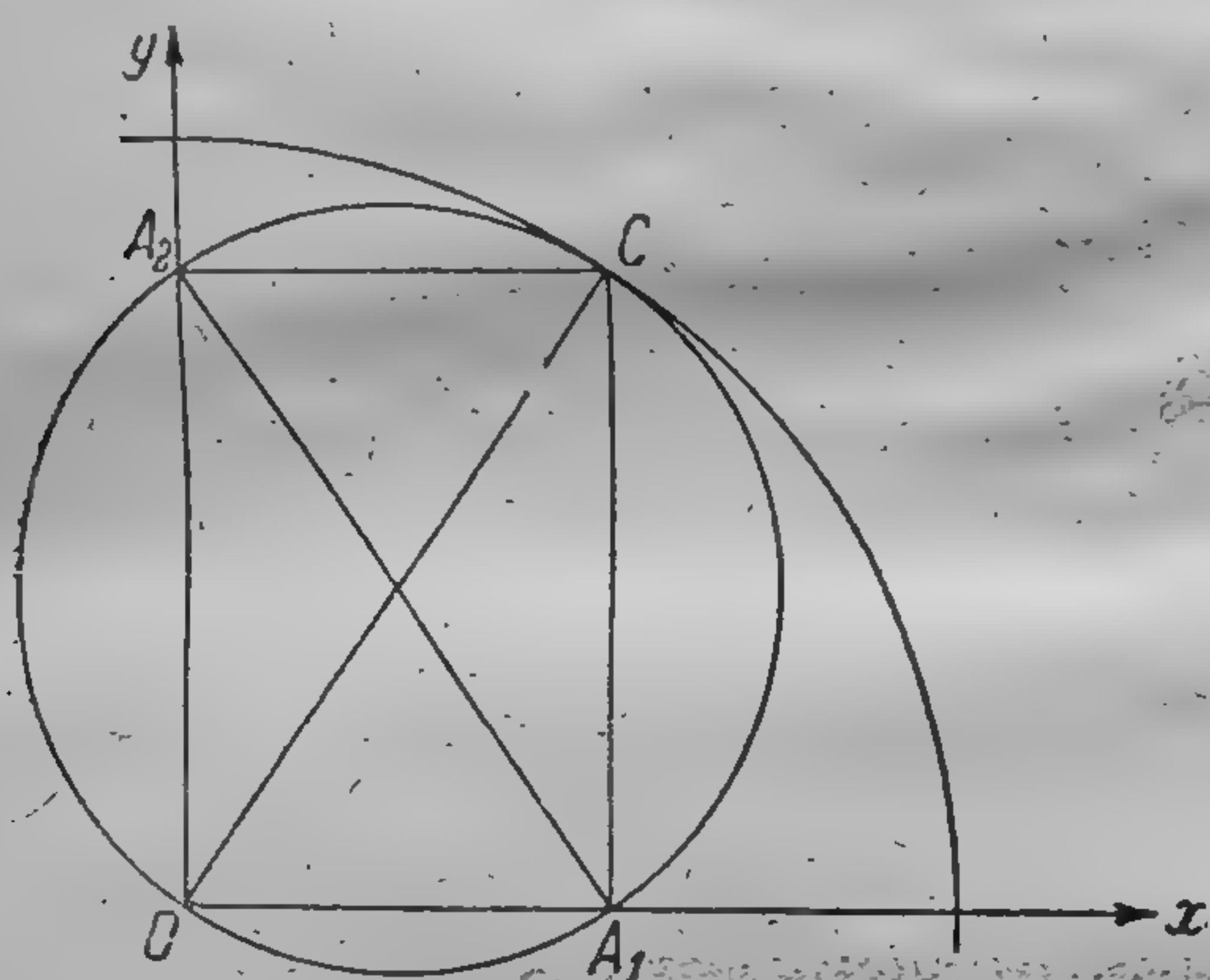


Fig. 180

alunecă cu extremitățile sale pe două drepte perpendiculare între ele  $Ox$  și  $Oy$  din planul fix (fig. 180). Conform celor arătate mai sus vom duce în punctele  $A_1$  și  $A_2$  normalele, adică perpendicularele pe dreptele  $Ox$  și  $Oy$ , vom obține punctul  $C$  care va fi chiar centrul instantaneu de rotație. Nu este greu de găsit pentru acest caz centroida fixă. Deoarece  $OC = A_1A_2$ , adică este

egal cu lungimea segmentului, atunci punctul  $C$  în toate pozițiile segmentului  $A_1A_2$  trebuie să fie situat la o distanță constantă de la punctul  $O$ , adică *centroida fixă este circumferința descrisă din punctul  $O$  cu o rază egală cu lungimea segmentului*. În raport cu planul mobil punctul  $C$  va fi totdeauna în vârful unghiului drept  $A_1CA_2$ , care se sprijină pe segmentul  $A_1A_2$ . Din geometrie se știe că locul geometric al vîrfurilor unghiurilor drepte care se sprijină pe un segment, este circumferința descrisă pe acest segment luat ca diametru. Astfel, *centroida mobilă este o circumferință în care segmentul dat este diametru*. Prin urmare raza circumferinței care reprezintă centroida mobilă, este de două ori mai mică decît raza circumferinței, care reprezintă centroida fixă.

Centroida fixă poate fi completată pînă la o circumferință întreagă și prin urmare mișcarea cercetată a planului mobil se



poate obține printr-o rostogolire fără alunecare pe partea interioară a cercului, a unui alt cerc care are o rază de două ori mai mică. Vom demonstra că, în acest caz toate punctele planului mobil descriu drepte, elipse sau cercuri. În adevăr, punctul  $K$  — centrul cercului mic — descrie, evident un cerc (fig. 181). Punctele cercului mic descriu drepte. Aceasta este evident pentru punctele  $A_1$  și  $A_2$ , dar același lucru se întâmplă și cu punctele  $B_1$  și  $B_2$  situate la extremitățile unui alt diametru  $B_1B_2$  al cercului mic, care vor descrie respectiv dreptele  $Ox'$  și  $Oy'$ , deoarece dreptele  $Ox'$  și  $Oy'$  îndeplinesc în această mișcare același rol ca și dreptele  $Ox$  și  $Oy$ . Să luăm acum un punct oarecare  $M$  pe segmentul  $A_1A_2$ ; coordonatele punctului  $M$  vor fi:

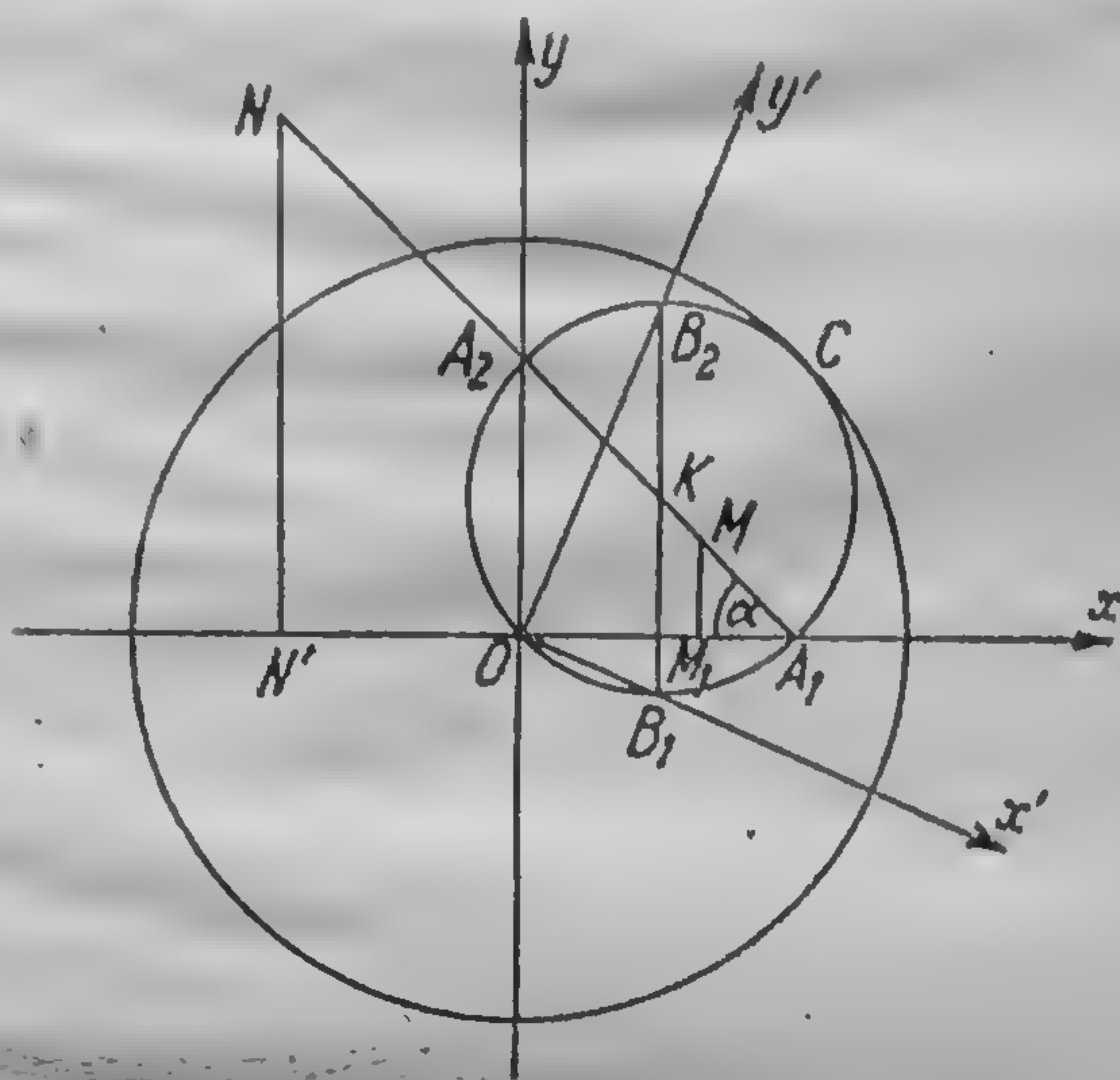


Fig. 181

$$x = OM_1 = A_2M \cos \alpha, \quad y = MM_1 = A_1M \sin \alpha.$$

De aici obținem:

$$\frac{x}{A_2M} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{A_1M} = \sin \alpha;$$

ridicînd la pătrat și adunînd, vom găsi că punctul  $M$  descrie elipsa

$$\frac{x^2}{A_2M^2} + \frac{y^2}{A_1M^2} = 1.$$

Vom lua în sfîrșit un punct oarecare  $N$ , situat în afara segmentului  $A_1A_2$ , dar pe aceeași dreaptă. Pentru coordonatele acestui punct avem expresiile:

$$x = -ON' = -A_2N \cos \alpha, \quad y = NN' = A_1N \sin \alpha;$$

de aici, ca și mai înainte, vom obține:

$$\frac{x^2}{A_2N^2} + \frac{y^2}{A_1N^2} = 1.$$



adică punctul  $N$  descrie de asemenea o elipsă. Astfel, vedem că, dacă segmentul  $A_1A_2$  se prelungește la infinit în ambele părți, toate punctele dreptei obținute aflate în afara acestui segment, care vor descrie elipse; punctele  $A_1$  și  $A_2$  ale acestui segment, care se află pe cercul interior, vor descrie segmente de dreaptă; punctele situate în interiorul acestui segment vor descrie elipse, afară de mijlocul lui care va descrie un cerc. Deoarece, același lucru va avea loc pentru punctele unei drepte oarecare  $B_1B_2$  care trece prin centrul cercului mic, concludem de aici că toate punctele

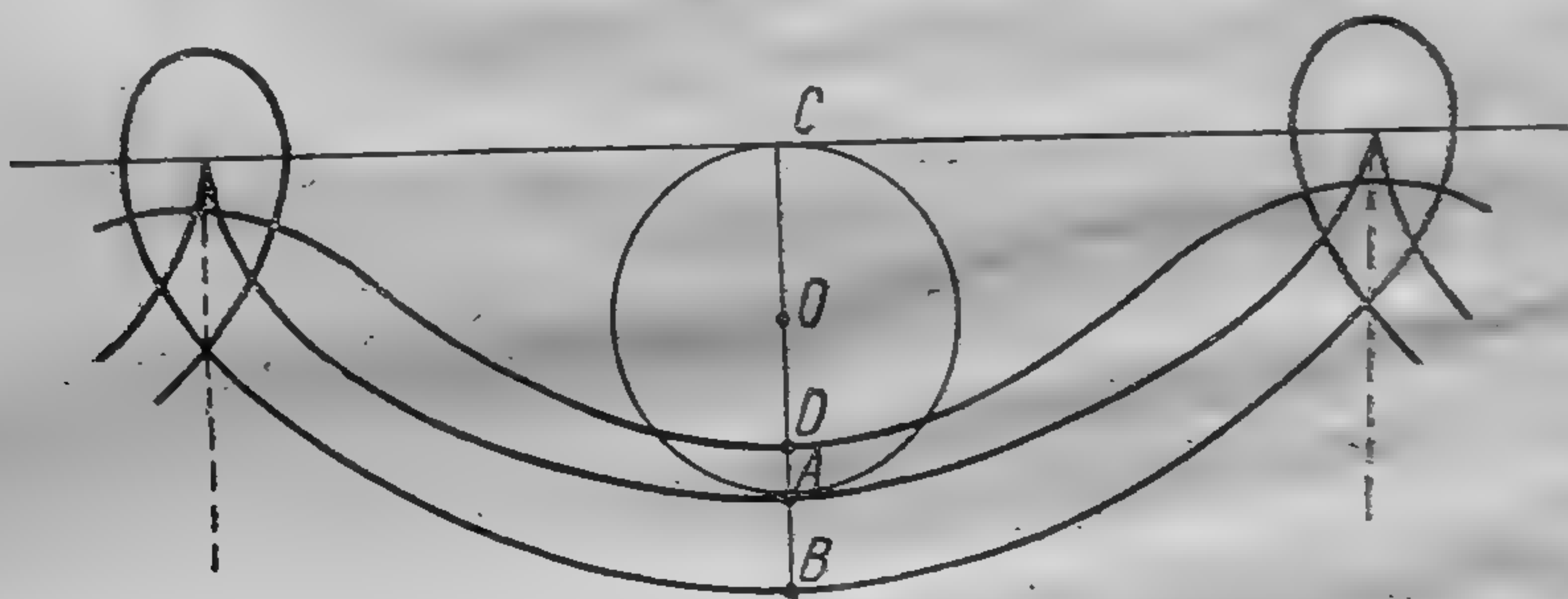


Fig. 182

planului mobil descriu elipse care degenerază în segmente de dreaptă pentru punctele cercului mic și, în circumferințe, pentru centrul cercului mic.

Bazându-ne pe proprietățile mișcării considerate nu este greu să se construiască un aparat de trasare a elipselor, numit *elipsograf*. Pentru aceasta este suficient să facem să alunece pe glisieră, pe două bare perpendiculare între ele  $xOx$  și  $yOy$ , aplicate pe o foaie de hîrtie, o a treia bară articulată cu glisierele. Fixînd în diferite locuri, din această a treia bară, un creion, și făcînd bara să alunece pe glisieră, de-a lungul barelor  $xOx$  și  $yOy$  vedem, conform celor expuse mai sus, că creionul trebuie să descrie o elipsă pe foaia de hîrtie. Forma și dimensiunile fiecărei elipse, depinde evident de poziția creionului pe bara mobilă, și de distanța dintre glisiere.

Să examinăm încă un exemplu, cînd centroida fixă (bara) este o dreaptă, iar centroida mobilă (ruleta) este o circumferință (fig. 182); este evident că centru instantaneu este situat în punctul de contact al cercului cu dreapta. La această mișcare, punctul  $A$ , situat pe ruletă va descrie o cicloidă; punctul  $D$  situat în interiorul cercului, va descrie curba denumită *cicloidă pre-*



scurtată sau trohoidă; punctul  $B$  aflat în afara cercului, va descrie o curbă, reprezentată în fig. 182, denumită *cicloidă alungită*.

Ambele cazuri studiate pot fi considerate cazuri particulare ale cazului unui cerc care se rostogolește fără alunecare pe un alt cerc; razele cercurilor, în general pot fi luate arbitrar. Centroida mobilă, în acest caz poate atinge pe cea fixă în interior sau în exterior. În ultimul exemplu dat, centroida fixă a fost dreaptă, adică o circumferință cu raza infinit mare. Dacă schimbăm rolul centroidelor, adică centroida fixă o facem mobilă, iar centroida mobilă o facem fixă, atunci această schimbare a rolului centroidelor se numește *inversarea mișcării*.

Deoarece la inversarea mișcărilor, mișcarea relativă a punctelor ambelor plane va fi aceeași, indiferent care centroidă va fi considerată mobilă și care fixă, este evident că în primul exemplu studiat fixînd într-un punct oarecare al planului legat de cercul mic un cuțit, și luînd cercul mic drept centroidă fixă, vom găsi că datorită mișcării planului legat de cercul mare, cuțitul îl va tăia după o elipsă. Pe această proprietate, se bazează strungurile pentru fasonatul materialului în formă de elipse. Un astfel de strung a fost propus de renumitul pictor și savant Leonardo da Vinci (1452—1519).

Trecînd de la mișcarea figurii plane la mișcarea plan paralelă corespunzătoare a solidului, evident că în locul centrelor de rotație, trebuie să considerăm axele de rotație, perpendiculare pe planul figurii și care trec prin centrele de rotație. În acest caz, vom obține suprafețe cilindrice, numite *axoide*. Astfel *mișcarea plană paralelă a unui solid, se poate obține prin rostogolirea fără alunecare a unei axoide cilindrice mobile pe axoida fixă*.

Alte detalii privitoare la acest procedeu de cercetare geometrică a mișcării plan paralele a solidului se pot găsi în cursurile speciale de cinematică mecanismelor.

§ 82. Studiul analitic al mișcării plan paralele a solidului. Viteza. După studiul geometric al mișcării plan paralele a solidului, vom trece la studiul său analitic și, ca și în paragraful precedent, vom considera mișcarea figurii plane în planul ei, ca reprezentînd mișcarea plan paralelă a solidului. Deoarece studiul mișcării unei figuri plane în planul ei se reduce la rîndul lui la studiul mișcării în plan al unui segment de dreaptă luat pe această figură, vom examina pe figura plană, un segment oare-



care de dreaptă  $AB$  (fig. 183). Vom lua în planul fix, pe care se deplasează figura plană, un punct oarecare fix  $O$  și vom uni punctul  $O$  cu punctele  $A$  și  $B$  prin vectorii  $OA = \vec{r}_A$  și  $OB = \vec{r}$ ; vom nota prin  $\vec{r}$  vectorul  $AB$ . Avem:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}. \quad (19.1)$$

La mișcarea figurii plane, vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{r}_A$  vor varia, în general, și ca modul și ca direcție, iar vectorul  $\vec{r}$  va varia numai ca direcție, deoarece modulul său este egal cu distanța constantă dintre punctele  $A$  și  $B$ . Derivând în raport cu timpul ambii membri ai relației (19.1) obținem:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Dar  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  este vectorul viteză  $\vec{v}$  al punctului  $B$ ;  $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$  este vectorul viteză  $\vec{v}_A$  al punctului  $A$ ; în ce privește derivata  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ , deoarece vectorul  $\vec{r}$  este de modul constant, ea este egală cu viteza

liniară de rotație a punctului  $B$  în jurul punctului  $A$ , și de aceea, conform formulei (18.5) obținem  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  unde  $\vec{\omega}$  este vectorul viteză unghiulară. În acest fel, relația precedentă poate căpăta forma:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad (19.2)$$

aceasta este o formă particulară a formulei (16.23), când  $\vec{v}_2 = -\vec{\omega} \times \vec{r}$ . Vedem că viteza punctului se compune geometric din două viteze; prima identică cu viteza punctului  $A$ , iar a doua se

obține din cauza vitezei unghiulare  $\vec{\omega}$  de rotație în jurul punctului  $A$ . Dacă viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  ar fi egală cu zero, atunci am avea  $\vec{v} = \vec{v}_A$ , și mișcarea figurii plane s-ar reduce la o mișcare de translație. Să observăm că dacă vom alege în locul punctului  $A$  un alt punct al figurii plane, vom obține, în general, un alt

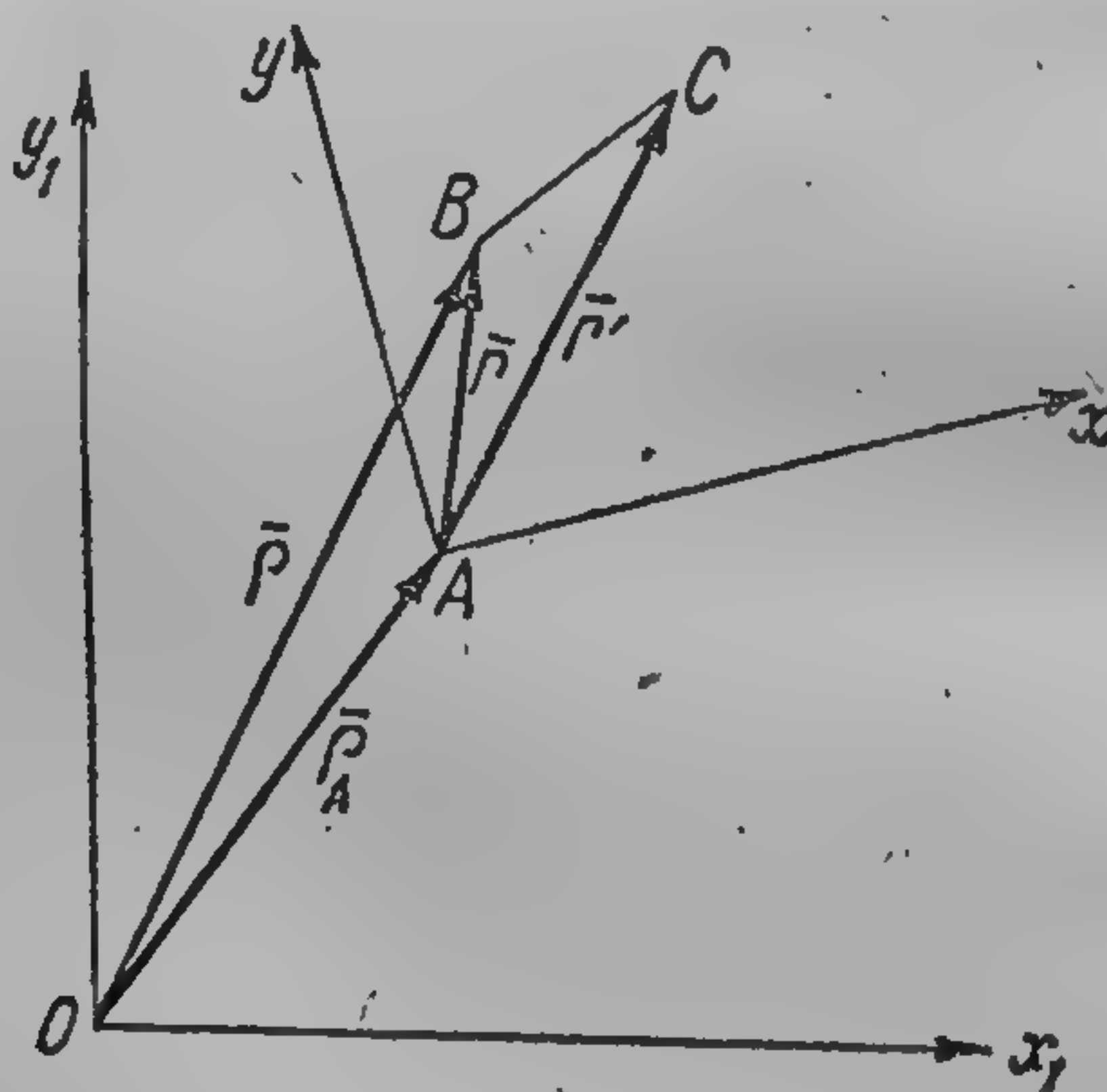


Fig. 183



vector  $\vec{v}_A$ , dar vectorul  $\vec{\omega}$  va rămâne același oriunde ar fi luat punctul  $A$  pe figura plană și, astfel  $\vec{\omega}$  reprezintă viteza unghiulară de rotație a figurii plane; în adevăr, în paragraful precedent, am văzut că unghiul de rotație al figurii plane nu depinde de alegerea punctului  $A$ . De asemenea este evident că vectorul viteză  $\vec{v}$  al punctului  $B$  va rămâne același oriunde ar fi luat punctul  $A$  pe figura plană; viteza  $\vec{v}$  a punctului  $B$ , rămâne invariabilă la schimbarea poziției punctului  $A$ , independent de variațiile corespunzătoare ale primului și ale celui de-al doilea factor al formulei (19.2).

Să găsim acum un astfel de punct  $C$  în planul mobil legat invariabil de figura plană, ca viteza  $\vec{v}_C$  a punctului  $C$ , în momentul considerat să fie egală cu zero.

Notînd vectorul  $\vec{AC}$  prin  $\vec{r}'$ , vom obține:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

sau, deoarece  $\vec{v}_C = 0$ , atunci

$$0 = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (19.3)$$

Această egalitate mai poate fi prezentată și sub forma:

$$\vec{r}' \times \vec{\omega} = -\vec{v}_A.$$

Pentru determinarea vectorului  $\vec{r}'$  cunoscînd vectorii  $\vec{v}_A$  și  $\vec{\omega}$  trebuie să rezolvăm ecuația vectorială de mai sus. În statică am văzut că o soluție a acestei ecuații nu va fi univocă; în adevăr, dacă am obținut vectorul  $\vec{r}'$ , atunci vom avea și alte soluții de forma  $\vec{r}' + \vec{d}$ , unde  $\vec{d}$  este un vector arbitrar, paralel la vectorul  $\vec{\omega}$ , adică perpendicular pe planul de mișcare al figurii, deoarece datorită paralelismului vectorilor  $\vec{d}$  și  $\vec{\omega}$  trebuie să avem:

$$(\vec{r}' + \vec{d}) \times \vec{\omega} = \vec{r}' \times \vec{\omega} + \vec{d} \times \vec{\omega} = \vec{r}' \times \vec{\omega}.$$

Deoarece în cazul considerat avem de-a face cu o problemă plană, găsind vectorul  $\vec{r}'$  situat în planul de mișcare al figurii, putem pune  $\vec{d} = 0$ , adică punctul  $C$  se va determina univoc. Vom scădea termen cu termen din egalitatea (19.2) egalitatea (19.3); obținem:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (19.4)$$



După cum se vede ușor din fig. 183, vom avea  $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ ; de aceea, găsim:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{CB}, \quad (19.5)$$

adică, viteza punctului  $B$  într-un moment dat este la fel ca în cazul când punctul  $B$  s-ar roti cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  în jurul punctului fix  $C$ . Astfel, ajungem analitic la definiția centrului vitezelor sau a centrului instantaneu de rotație, și anume:

*Centrul vitezelor, centrul instantaneu de rotație sau polul instantaneu se numește acel punct din planul mobil, a cărui viteză la un moment dat este egală cu zero.*

Vom trece în formulele (19.2), (19.3) și (19.4) de la notațiile vectoriale la cele analitice, și vom folosi două sisteme de axe ortogonale de coordonate, așa cum se va proceda totdeauna la studiul mișcării solidului; anume, un sistem fix de axe de coordonate cu originea în punctul  $O$ , sistem așezat în planul fix, pe care se mișcă figura plană, și un sistem mobil de axe de coordonate, cu originea în punctul  $A$ , sistem legat invariabil de figura plană mobilă. Sistemul fix al axelor de coordonate îl vom nota prin  $Ox_1y_1$ , iar sistemul mobil prin  $Axy$ . Vom nota vectorii unitari care determină axele fixe de coordonate prin  $\vec{i}_1$  și  $\vec{j}_1$ , iar vectorii unitari care determină axele mobile de coordonate, prin  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$ . Evident că vectorii  $\vec{i}_1$  și  $\vec{j}_1$  sînt constanți iar vectorii  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$  sînt constanți ca modul dar variază ca direcție deoarece ei se rotesc o dată cu axele mobile  $Axy$ . Dacă am fi construit și axele  $Oz$  și  $Az$ , atunci aceste axe fiind perpendiculare pe planul de mișcare al figurii plane, ar fi paralele între ele și noi am avea  $\vec{k}_1 = \vec{k}$ . Prin urmare,  $\vec{\omega} = \vec{k}_1 \omega$  și  $\vec{\omega} = \vec{k} \omega$ , unde  $\omega$  este proiecția vectorului  $\vec{\omega}$  pe axa  $Oz$  sau pe axa  $Az$ . Vom nota proiecțiile vitezelor  $\vec{v}_A$  și  $\vec{v}$  pe axele  $Ox_1y_1$  și  $Axy$  respectiv prin:

$$(\vec{v}_A)_{x_1}, (\vec{v}_A)_{y_1}, (\vec{v}_A)_x, (\vec{v}_A)_y, v_{x_1}, v_{y_1}, v_x, v_y.$$

Vom nota prin  $(a, b)$  și  $(x_1, y_1)$  coordonatele punctelor  $A$  și  $B$  în raport cu axele  $Ox_1y_1$ ; prin  $(x, y)$  coordonatele punctului  $B$  în raport cu axele  $Axy$ ; prin  $(x'_1, y'_1)$  și prin  $(x', y')$  coordonatele centrului instantaneu de rotație  $C$  respectiv în raport cu axele  $Ox_1y_1$  și  $Axy$ . Avem:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{i}_1 (\vec{v}_A)_{x_1} + \vec{j}_1 (\vec{v}_A)_{y_1}, & \vec{v} &= \vec{i} v_x + \vec{j} v_y, \\ \vec{v}_A &= \vec{i} (\vec{v}_A)_x + \vec{j} (\vec{v}_A)_y, & \vec{v} &= \vec{i} v_x + \vec{j} v_y. \end{aligned}$$



Din fig. 183 se vede, că:

$$\vec{r} = \vec{i}_1(x_1 - a) + \vec{j}_1(y_1 - b) = \vec{i}x + \vec{j}y,$$

$$\vec{r}' = \vec{i}_1(x'_1 - a) + \vec{j}_1(y'_1 - b) = \vec{i}x' + \vec{j}y',$$

$$\vec{CB} = \vec{r} - \vec{r}' = \vec{i}_1(x_1 - x'_1) + \vec{j}_1(y_1 - y'_1) = \vec{i}(x - x') + \vec{j}(y - y').$$

Trecînd de la formulele vectoriale (19.2), (19.3) și (19.4) la cele analitice, în sistemul fix de coordonate  $Ox_1y_1$ , vom avea:

$$\vec{i}_1 v_{x_1} + \vec{j}_1 v_{y_1} = \vec{i}_1 (v_A)_{x_1} + \vec{j}_1 (v_A)_{y_1} + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 - a & y_1 - b & 0 \end{vmatrix},$$

$$0 = \vec{i}_1 (v_A)_{x_1} + \vec{j}_1 (v_A)_{y_1} + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x'_1 - a & y'_1 - b & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{i}_1 v_{x_1} + \vec{j}_1 v_{y_1} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 - x'_1 & y_1 - y'_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Egalînd între ei coeficienții vectorilor unitari de același fel în părțile din stînga și dreapta acestor formule, vom obține din prima formulă:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_1} &= (v_A)_{x_1} - \omega(y_1 - b), \\ v_{y_1} &= (v_A)_{y_1} + \omega(x_1 - a); \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

din a doua vom obține:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (v_A)_{x_1} - \omega(y'_1 - b), \\ 0 &= (v_A)_{y_1} - \omega(x'_1 - a); \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

în sfîrșit din a treia formulă vom găsi:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_1} &= -\omega(y_1 - y'_1), \\ v_{y_1} &= +\omega(x_1 - x'_1). \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$



Formulele (19.7) determină coordonatele  $(x'_1, y'_1)$  ale centrului instantaneu de rotație  $C$  în raport cu axele fixe de coordonate  $Ox_1y_1$ ; din aceste formule obținem:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a - \frac{(v_A)_{y_1}}{\omega} \\ y'_1 &= b + \frac{(v_A)_{x_1}}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

Deoarece la mișcarea unei figuri plane, mărimile  $a, b, (v_A)_{x_1}, (v_A)_{y_1}, \omega$  sînt funcții cunoscute de timpul  $t$  dacă mișcarea figuri plane este cunoscută, atunci din formulele (19.9) vom avea:

$$x'_1 = f_1(t), \quad y'_1 = \varphi_1(t).$$

Din aceste ecuații se poate vedea cum variază coordonatele centrului instantaneu de rotație  $C$  în raport cu timpul  $t$  în planul fix. Eliminînd din ele timpul  $t$ , obținem ecuația centroidei fixe, sub forma:

$$F_1(x'_1, y'_1) = 0.$$

Din formulele (19.8), obținem modulul vectorului viteză al punctului  $B$ , ridicîndu-le la pătrat și adunîndu-le și avem:

$$v = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} = \sqrt{\omega^2(y_1 - y'_1)^2 + \omega^2(x_1 - x'_1)^2},$$

sau

$$v = |\omega| \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2}.$$

Dar expresia care stă sub radical este pătratul distanței de la punctul  $B$  pînă la centrul instantaneu  $C$ , adică lungimea  $CB$ . De aceea vom avea:

$$v = |\omega| CB. \quad (19.10)$$

Vedem încă o dată confirmarea formulei (19.5), iar formula (19.10) poate fi exprimată în felul următor: *modulul vitezei punctului  $B$  este egal cu produsul modulului vitezei unghiulare de rotație a figuri plane, cu distanța de la punctul  $B$  la centrul instantaneu de rotație.* Din comparația formulelor (19.8) și (19.11) rezultă că *vectorul viteză al punctului  $B$  este astfel ca și cum în momentul considerat figura plană s-ar roti cu viteza unghiulară  $\omega$  în jurul punctului  $C$ , considerat fix, precum s-a mai indicat cu ocazia formulelor (19.5).* Pentru a evita orice nelămurire, vom sublinia că punctul  $C$  în realitate nu este fix; putem doar să



afirmăm că în momentul dat viteza lui este egală cu zero, dar mai jos vom vedea că accelerația punctului  $C$ , în general nu este egală cu zero. De aceea, dacă în momentul dat punctul  $C$  este centru instantaneu de rotație, atunci, într-un interval de timp infinit mic, deplasarea lui va fi infinit mică, cel puțin de ordinul doi, în timp ce deplasările tuturor celorlalte puncte ale figuri plane vor fi infinit mici de ordinul întâi.

Pentru a lămurii cele afirmate mai înainte vom examina o deplasare infinit mică a unui punct care se mișcă în linie dreaptă. Presupunem că punctul se mișcă pe dreapta  $Ox$  după legea  $x=f(t)$  și în momentul  $t_0$  are coordonata  $x_0$ , astfel că vom avea  $x_0=f(t_0)$ . Să găsim coordonata  $x$  a punctului după un interval de timp infinit mic  $h$ , adică în momentul  $t=t_0+h$ ; vom avea:  $x=f(t_0+h)$ . Dezvoltând partea dreaptă în serie tayloriană vom obține:

$$x=f(t_0)+hf'(t_0)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(t_0)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(t_0)+\dots,$$

sau

$$x=x_0+hv_0+\frac{h^2}{1\cdot 2}a_0+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(t_0)+\dots,$$

unde  $v_0=f'(t_0)$  și  $a_0=f''(t_0)$  sînt viteza și accelerația punctului în momentul  $t=t_0$ . Dacă viteza punctului în momentul  $t_0$  nu este egală cu zero, atunci deplasarea  $x=x_0$  a punctului, este un infinit mic de ordinul întâi. Dacă însă  $v_0=0$ , atunci deplasarea  $x-x_0$  a punctului, pentru  $a_0\neq 0$  este un infinit mic de ordinul doi. Dar, dacă și accelerația  $a_0$  în momentul  $t_0$  este de asemenea egală cu zero, atunci deplasarea punctului într-un interval de timp infinit mic  $h$ , va fi în general un infinit mic de ordinul trei etc.

Trecînd de la formulele vectoriale (19.2), (19.3) și (19.4) la cele analitice, în sistemul mobil de coordonate  $Axy$ , vom avea:

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y=\bar{i}(v_A)_x+\bar{j}(v_A)_y+\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix},$$

$$0=\bar{i}(v_A)_x+\bar{j}(v_A)_y+\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix},$$

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x-x' & y-y' & 0 \end{vmatrix}.$$



Egalînd între ei coeficienții vectorilor unitari de același fel, în partea stîngă și dreaptă a acestor formule, vom obține din prima formulă:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= (v_A)_x - \omega y, \\ v_y &= (v_A)_y + \omega x; \end{aligned} \right\} \quad (19.11)$$

din a doua vom obține:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (v_A)_x - \omega y', \\ 0 &= (v_A)_y + \omega x'; \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

în sfîrșit din a treia formulă găsim:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\omega (y - y'), \\ v_y &= +\omega (x - x'). \end{aligned} \right\} \quad (19.13)$$

Formulele (19.12) determină coordonatele centrului instantaneu de rotație  $C$  în raport cu axele mobile de coordonate  $Axy$ ; din aceste formule obținem:

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\frac{(v_A)_y}{\omega}, \\ y' &= +\frac{(v_A)_x}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

Deoarece în mișcarea figurii plane mărimile  $(v_A)_x$ ,  $(v_A)_y$  și  $\omega$  sînt funcții de timpul  $t$ , atunci din formulele (19.14) vom avea:

$$x' = f(t), \quad y' = \varphi(t).$$

Din aceste formule se poate vedea, cum variază în timp coordonatele centrului instantaneu de rotație  $C$  în planul mobil. Eliminînd din ele timpul  $t$ , obținem ecuația centroidei mobile sub forma:

$$F(x', y') = 0.$$

Din formulele (19.13), vom obține modulul vectorului viteză al punctului  $B$ , ridicîndu-le la pătrat și adunînd, și anume:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\omega| \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = |\omega| CB,$$

adică ajungem la formula (19.10).

Ca exemplu de determinare pe cale analitică a centroidelor, vom examina următoarea problemă. O bară rigidă  $AB$ , se mișcă pe un plan fix, fiind tot timpul tangentă la o circumferință fixă



(C) cu raza egală cu  $a$ , și rezemându-se cu capătul său  $A$  pe o dreaptă fixă  $Ox_1$ , care trece prin centrul  $O$  al acestei circumferințe (fig. 184). Conform celor expuse mai sus, pentru a găsi poziția centrului instantaneu de rotație  $C$ , vom duce normalele în punctele  $A$  și  $E$  la curbele (C) și  $Ox_1$ ; aceste normale se vor întretaia într-un punct oarecare  $C$  care va fi chiar centrul instantaneu de rotație. Vom construi sistemul fix de coordonate  $Ox_1y_1$

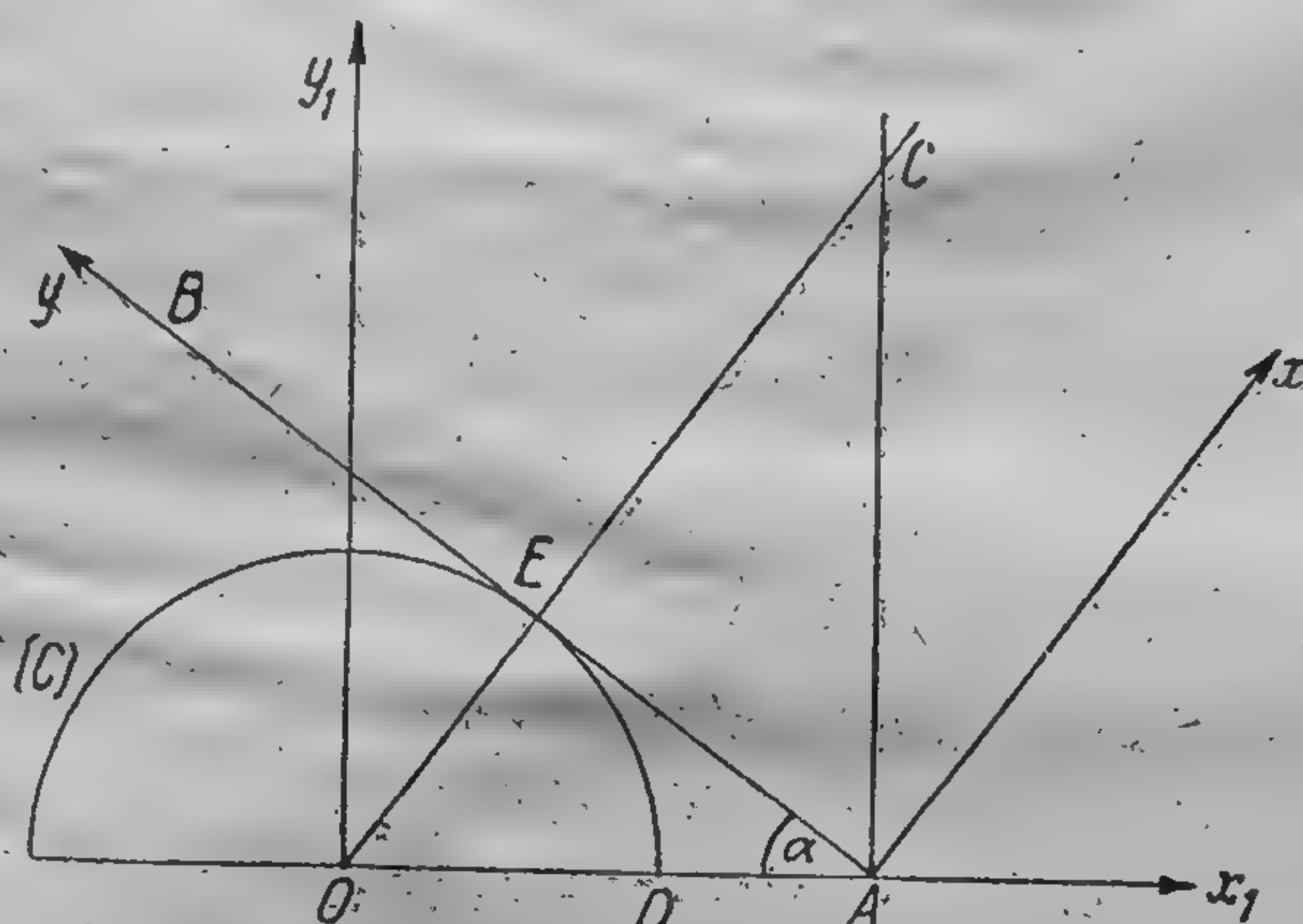


Fig. 184

și sistemul mobil de coordonate  $Axy$ , cum se arată în fig. 184. Vom găsi coordonatele  $(x'_1, y'_1)$  și  $(x', y')$  ale punctului  $C$  respectiv în raport cu axele  $Ox'$   $y'$  și  $Axy$ , exprimate în funcție de unghiul  $\alpha$  de înclinare al dreptei  $AB$  în raport cu dreapta  $Ox_1$ . Avem:

$$x'_1 = OA, \quad y'_1 = AC.$$

Din  $\triangle OEA$  și  $\triangle AQC$ , obținem:

$$x'_1 = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad y'_1 = x'_1 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Din aceste două ecuații găsim:

$$\sin \alpha = \frac{a}{x'_1}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{y'_1}{x'_1}.$$

Deoarece

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$



atunci, înlocuind în aceeași relație pe  $\sin \alpha$  și  $\operatorname{ctg} \alpha$  prin valorile lor, vom obține,

$$\frac{y_1'^2}{x_1'^2} = \frac{1 - \frac{a^2}{x_1'^2}}{\frac{a^2}{x_1'^2}} = \frac{x_1'^2 - a^2}{a^2}.$$

Scăpînd de numitori, vom avea:

$$x_1'^4 - a^2(x_1'^2 + y_1'^2) = 0.$$

Aceasta este ecuația unei curbe de gradul patru; în acest fel, centroida fixă va fi o curbă de gradul patru. Ecuația precedentă este satisfăcută de valorile  $x_1' = a$ ,  $y_1' = 0$ ; prin urmare, centroida fixă trece prin punctul D de intersecție a circumferinței (C) cu axa  $Ox_1$ . Pentru a găsi direcția tangentei la această curbă, într-un punct depărtat la infinit, vom determina din ecuația precedentă derivata  $\frac{dy_1'}{dx_1'}$ ; vom obține succesiv:

$$ay_1' = x_1' \sqrt{x_1'^2 - a^2}$$

și

$$a \frac{dy_1'}{dx_1'} = \sqrt{x_1'^2 - a^2} + \frac{x_1'^2}{\sqrt{x_1'^2 - a^2}}.$$

Din ambele ecuații concludem că trebuie totdeauna să avem  $x_1'^2 \geq a^2$ , și că dacă  $x_1'$  tinde spre infinit, tind spre infinit de asemenea și mărimile  $y_1'$  și  $\frac{dy_1'}{dx_1'}$ . De aici rezultă că centroida fixă, depărtîndu-se la infinit în sus și la dreapta punctului D, tinde către o direcție paralelă la axa  $Oy_1$ . Vom observa că valorile  $x_1' = y_1' = 0$  satisfac de asemenea ecuația centroidei, iar acest punct O este un punct izolat al curbei.

Să determinăm ecuația centroidei mobile, din triunghiul ABC; avem:

$$x' = EC, \quad y' = AE.$$

Deoarece

$$AE = a \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$EC = AE \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

vom obține:

$$x' = a \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad y' = a \operatorname{ctg} \alpha,$$

adică:

$$\frac{y'^2}{a} = x'.$$



Prin urmare ecuația

$$y'^2 = ax'$$

reprezintă centroida mobilă, care va fi o parabolă cu parametrul egal cu  $\frac{a}{2}$ , ce are ca axă dreaptă  $Ax$ . De aici rezultă că mișcarea planului mobil, legat de dreapta  $AB$ , poate fi obținută prin rostogolirea fără alunecare a parabolei  $y'^2 = ax'$  pe curba de gradul patru:

$$x_i'' - a^2(x_i'' + y_i'') = 0.$$

§ 83. Studiul analitic al mișcării plan paralele a solidului. **Accelerație.** Pentru a obține accelerația punctelor unei figuri plane, este suficient să se derive în raport cu timpul ambele părți ale relației (19.2), vom avea:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r})$$

sau

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Deoarece

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

vom obține:

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Aplicînd ultimei egalități formula (18.12), vom avea:

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) \bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}.$$

Deoarece  $\bar{\omega} \perp \bar{r}$ , găsim (§ 18):

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = -\omega^2 \bar{r};$$

prin urmare, vom avea:

$$\bar{a} = \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r}. \quad (19.15)$$

Această formulă ne dă posibilitatea de a calcula accelerația unui punct oarecare al unui solid aflat în mișcare plan-paralelă, în



funcție de accelerația cunoscută  $\bar{a}_A = \frac{d\bar{v}_A}{dt}$  a unui punct oarecare  $A$ , de viteza unghiulară de rotație  $\omega$  și de accelerația unghiulară  $\frac{d\omega}{dt}$ . Dacă avem:  $\omega = 0$  și  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ , atunci vom obține  $\bar{a} = \bar{a}_A$ , adică accelerațiile tuturor punctelor figurii plane vor fi egale, între ele, ceea ce este evident, deoarece în acest caz solidul se află în mișcare de translație. Dacă avem  $\bar{a} = \text{const}$ , atunci trebuie să avem  $\frac{d\omega}{dt} \times \bar{r} = 0$ , și accelerația  $\bar{a}$  este suma geometrică a accelerației  $\bar{a}_A = \frac{d\bar{v}_A}{dt}$  și a accelerației centripete  $-\omega^2 \bar{r}$  ce apare din cauza rotației punctului  $B$  în jurul punctului  $A$  (§ 79).

Vom introduce aceleași sisteme de axe de coordonate mobile și fixe și aceleași notații ca în paragraful precedent, și vom pune:

$$\begin{aligned}\bar{a}_A &= \bar{i}_1 (a_A)_{x_1} + \bar{j}_1 (a_A)_{y_1}, \\ \bar{a} &= \bar{i} (a_A)_x + \bar{j} (a_A)_y.\end{aligned}$$

Trecind de la formula vectorială (19.15) la cea analitică, în sistemul fix de coordonate, vom avea:

$$\begin{aligned}\bar{i}_1 a_{x_1} + \bar{j}_1 a_{y_1} &= \bar{i}_1 (a_A)_{x_1} + \bar{j}_1 (a_A)_{y_1} + \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt} \\ x_1 - m & y_1 - n & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\omega^2 [\bar{i}_1 (x_1 - m) + \bar{j}_1 (y_1 - n)].\end{aligned}$$

De aici, egalînd între ei coeficienții lui  $\bar{i}_1$  și  $\bar{j}_1$ , vom obține:

$$\left. \begin{aligned}a_{x_1} &= (a_A)_{x_1} - \frac{d\omega}{dt} (y_1 - n) - \omega^2 (x_1 - m), \\ a_{y_1} &= (a_A)_{y_1} + \frac{d\omega}{dt} (x_1 - m) - \omega^2 (y_1 - n).\end{aligned} \right\} \quad (19.16)$$

Vom găsi de asemenea un punct  $E$ , a cărui accelerație în momentul dat este egală cu zero. Notînd coordonatele acestui punct  $E$  în raport cu axe fixe de coordonate prin  $\xi_1$  și  $\eta_1$ , din formulele (19.16), vom avea următoarele relații:

$$\left. \begin{aligned}0 &= (a_A)_{x_1} - \frac{d\omega}{dt} (\eta_1 - n) - \omega^2 (\xi_1 - m), \\ 0 &= (a_A)_{y_1} + \frac{d\omega}{dt} (\xi_1 - m) - \omega^2 (\eta_1 - n).\end{aligned} \right\} \quad (19.17)$$



Rezolvînd aceste ecuații în raport cu diferențele  $(\xi_1 - m)$  și  $(\eta_1 - n)$  vom obține:

$$\xi_1 - m = \frac{(a_A)_{x_1} \omega^2 - (a_A)_{y_1} \frac{d\omega}{dt}}{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

$$\eta_1 - n = \frac{(a_A)_{x_1} \frac{d\omega}{dt} + (a_A)_{y_1} \omega^2}{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}.$$

Din aceste formule este ușor de găsit coordonatele  $\xi_1$  și  $\eta_1$  ale punctului  $E$ , a cărui accelerație în momentul dat este egală cu zero; punctul  $E$  se numește centrul *accelerațiilor*. Comparînd expresiile coordonatelor  $\xi_1$  și  $\eta_1$  ale punctului  $E$  cu expresiile coordonatelor  $x'_1$  și  $y'_1$  (19.9) ale centrului vitezelor  $C$ , vedem că centrul vitezelor  $C$  și centrul accelerațiilor  $E$  sînt în general puncte diferite, adică în punctul  $C$  care reprezintă la momentul dat centrul vitezelor, viteza în acest moment va fi egală cu zero, accelerația însă va fi diferită de zero (§ 82). Vom scădea termen cu termen din formulele (19.16) formulele (19.17), vom avea:

$$\left. \begin{aligned} a_{x_1} &= -\frac{d\omega}{dt} (y_1 - \eta_1) - \omega^2 (x_1 - \xi_1), \\ a_{y_1} &= +\frac{d\omega}{dt} (x_1 - \xi_1) - \omega^2 (y_1 - \eta_1). \end{aligned} \right\} \quad (19.18)$$

Pentru a găsi modulul  $a$  al accelerației  $\bar{a}$ , ridicăm la pătrat formulele (19.18), adunăm rezultatele și extragem rădăcina pătrată din ambele părți ale ecuației obținute; vom obține:

$$a = \sqrt{\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4\right] [(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2]}.$$

Deoarece suma  $(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2$  reprezintă pătratul distanței de la punctul  $B$  pînă la punctul  $E$ , adică este egală cu  $BE^2$ , atunci din ultima formulă găsim:

$$a = BE \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}.$$

Comparînd această formulă cu formulele (18.17) și formulele (19.18) cu formulele (18.16), constatăm că pentru accelerația punctului  $B$  se obține aceeași valoare, care ar rezulta dacă punc-



tul  $E$  ar fi fix și punctul  $B$  s-ar roti în jurul punctului  $E$  cu viteza unghiulară  $\omega$ . Prin aceasta se explică denumirea de centrul accelerațiilor, dată punctului  $E$ .

Trecînd de la forma vectorială (19.15) la cea analitică în sistemul mobil de coordonate, vom avea:

$$\bar{i}a_x + \bar{j}a_y = \bar{i}(a_A)_x + \bar{j}(a_A)_y + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2(\bar{i}x + \bar{j}y).$$

De aici, egalînd între ei coeficienții lui  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$ , vom obține:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= (a_A)_x - \frac{d\omega}{dt}y - \omega^2x, \\ a_y &= (a_A)_y + \frac{d\omega}{dt}x - \omega^2y. \end{aligned} \right\} \quad (19.19)$$

Notînd coordonatele centrului accelerațiilor  $E$  în raport cu axele mobile de coordonate, prin  $\xi$  și  $\eta$ , din formulele (19.19), vom avea următoarele relații:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (a_A)_x - \frac{d\omega}{dt}\eta - \omega^2\xi, \\ 0 &= (a_A)_y + \frac{d\omega}{dt}\xi - \omega^2\eta. \end{aligned} \right\} \quad (19.20)$$

Scăzînd termen cu termen din formulele (19.19) formulele (19.20), vom găsi:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -\frac{d\omega}{dt}(y-\eta) - \omega^2(x-\xi), \\ a_y &= +\frac{d\omega}{dt}(x-\xi) - \omega^2(y-\eta). \end{aligned} \right\} \quad (19.21)$$

De aici, vom obține ca și mai sus:

$$a = \sqrt{\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4\right] [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} = BE \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}.$$

Din formulele (19.20) se pot determina coordonatele  $(\xi, \eta)$  ale centrului accelerațiilor  $E$  în planul mobil, în raport cu sistemul



mobil al axelor de coordonate; rezolvînd aceste ecuații, vom obține:

$$\xi = \frac{(a_A)_x \omega^2 - (a_A)_y \frac{d\omega}{dt}}{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4},$$

$$\eta = \frac{(a_A)_x \frac{d\omega}{dt} + (a_A)_y \omega^2}{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}.$$

Comparînd aceste formule cu formulele (19.14) pentru coordonatele  $(x', y')$  ale centrului instantaneu  $C$  în raport cu sistemul mobil de axe de coordonate, concludem încă o dată că punctele  $C$  și  $E$  — centrul instantaneu și centrul accelerațiilor, nu coincid între ele.

Observăm că pentru viteză și accelerație, formulele în sistemul mobil de coordonate și formulele în sistemul fix, au avut la bază aceleași formule vectoriale. În aceasta constă una din cauzele avantajelor notațiilor vectoriale, deoarece în notațiile analitice, am fi nevoiți să deducem separat chiar de la început formulele în sistemul fix de coordonate și formulele în sistemul mobil, adică pentru fiecare sistem de axe de coordonate, trebuie să se facă calcule chiar de la început.

**§ 84. Aplicații.** Din cele expuse în paragrafele precedente, rezultă că dacă ne sînt cunoscute pozițiile centrului instantaneu și viteza unghiulară la un moment oarecare, putem găsi pentru acest moment vitezele tuturor punctelor figurii plane. Să presupunem că  $C$  este centrul instantaneu, se cere să se găsească vitezele punctelor  $A$  și  $B$ . Știm că  $v_A = CA \cdot \omega$  și  $v_B = CB \cdot \omega$ , unde  $CA$  și  $CB$  sînt dreptele ce unesc centrul instantaneu  $C$  și punctele  $A$  și  $B$ . Ducînd din punctele  $A$  și  $B$  perpendiculare pe dreptele  $CA$  și  $CB$  în sensul rotirii figurii plane și luînd pe ele segmentele  $CA \cdot \omega$  și  $CB \cdot \omega$  vom găsi vectorii viteză  $\vec{v}_A$  și  $\vec{v}_B$ .

Să examinăm cîteva exemple:

1. Să presupunem că segmentul  $A_1A_2$  alunecă cu extremitățile sale pe două drepte perpendiculare între ele  $Ox$  și  $Oy$  (fig. 185); se cere să se găsească viteza punctului  $K$  al acestui segment. Unind centrul instantaneu  $C$  cu punctul  $K$  și luînd pe perpendiculara pe dreapta  $KC$  în punctul  $K$  segmentul cu lungimea  $CK \cdot \omega$ , vom găsi vectorul viteză  $\vec{v}_K$  al punctului  $K$ . Deoarece vectorul  $d\vec{r}$  al unei deplasări infinit mici este egal cu vectorul viteză înmulțit



cu diferențiala timpului, adică  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , vom găsi totodată și deplasarea infinit mică  $d\vec{r}$  a punctului  $K$ , astfel cum se arată în fig. 185. Observăm, că acest mod de determinare a deplasărilor infinit mici ale punctelor unei figuri plane, se aplică destul de des în practică.

2. Fie dat sistemul de bare  $AB, EG, F_1E_1A, FF_1, EE_1$ , care sînt prevăzute cu articulații în punctele  $A, B, F_1, E_1, F, E$ , iar

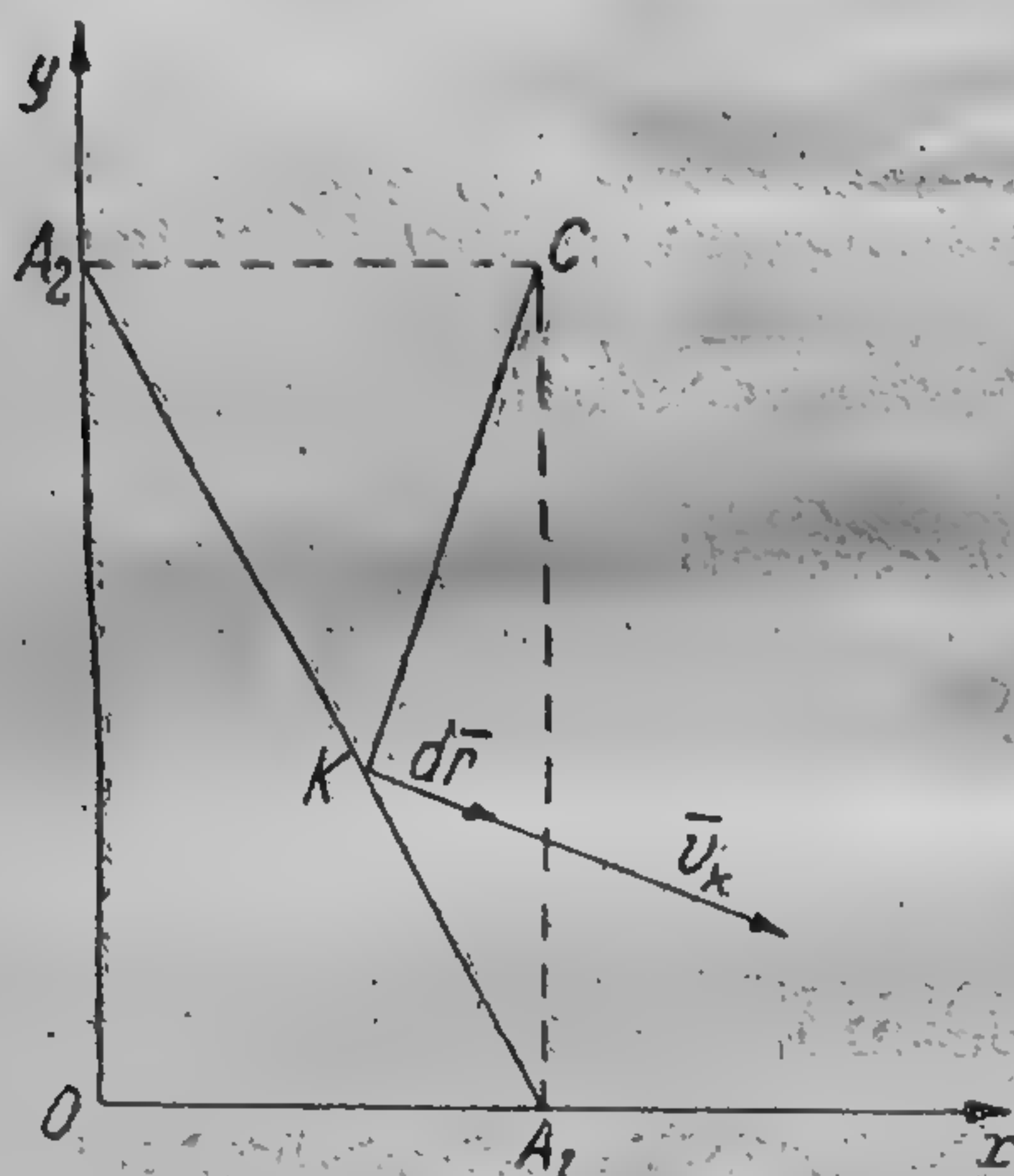


Fig. 185

bara  $AB$  are la extremitatea ei o glisieră  $D$ , care alunecă pe bara fixă  $EG$  (fig. 186). Să se găsească centrul vitezelor  $C$  ale barei  $AB$ . Deoarece punctele  $F_1$  și  $E_1$  ale barei  $F_1E_1A$  trebuie să descrie arce de cerc cu centrele corespunzătoare în punctele  $F$  și  $E$ , centrul vitezelor barei  $F_1E_1A$  se află în punctul  $O$ ; de aceea, viteza punctului  $A$  trebuie să fie perpendiculară pe dreapta  $OA$  și centrul vitezelor barei  $AB$  trebuie să se afle pe dreapta  $OA$ . De aici rezultă că centrul vitezelor se află în punctul de intersecție al dreptei  $BB'$  perpendiculară pe dreapta  $EG$ , cu dreapta

$AO$ , adică în punctul  $C$ . Deci, deplasarea infinit mică  $d\vec{r}$  a unui punct oarecare  $K$  al barei  $AB$ , trebuie să fie dirijată perpendicular pe dreapta  $CK$ , în sensul indicat în fig. 186, dacă viteza unghiulară  $\omega$  este pozitivă și de sens contrar dacă viteza unghiulară  $\omega$  este negativă.

3. Să presupunem că cunoaștem vectorii vitează  $\vec{v}_A$  și  $\vec{v}_B$  a două puncte oarecare  $A$  și  $B$  dintr-o figură plană (fig. 187). Evident că vectorii  $\vec{v}_A$  și  $\vec{v}_B$  nu pot fi arbitrari, deoarece punctele  $A$  și  $B$  aparțin aceleiași figuri plane. Ducînd dreptele  $AC \perp \vec{v}_A$  și  $BC \perp \vec{v}_B$  vom găsi centrul instantaneu în punctul de intersecție  $C$  al acestor drepte  $AC$  și  $BC$ . Vom măsura la aceeași scară modulele vitezelor  $v_A$  și  $v_B$  pe dreptele  $CA$  și  $CB$ ; ele vor fi egale cu segmentele  $Ca$  și  $Cb$ . Unind între ele punctele  $a$  și  $b$  printr-o dreaptă, obținem triunghiul  $Cab$ , care se numește *planul vitezelor*. Presupunem că vrem să aflăm viteza unui punct oarecare  $D$  al







care a primului, se numește *cuplu cinematic*; corpurile componente ale cuplului cinematic se numesc *elementele* cuplului. Pentru ca limitarea mișcării reciproce a elementelor să poată avea loc, este necesar ca acestea să fie în contact; formele geometrice după care se produce acest contact se numesc *legăturile* cuplului cinematic. Cuplurile cinematice se numesc *inferioare*, dacă legăturile lor sînt suprafețe și se numesc *superioare*, dacă legăturile lor sînt curbe sau puncte. Un cuplu cinematic inferior, la care un element are în raport cu celălalt numai o mișcare de translație, se numește *cuplu de translație*; un cuplu cinematic inferior la care un element are în raport cu celălalt element numai o mișcare de rotație, se numește *cuplu de rotație*; un cuplu cinematic la care un element are în raport cu celălalt element numai o mișcare elicoidală, se numește *cuplu elicoidal*. Primul cuplu ni-l putem imagina de forma unei prisme pe care alunecă un corp cu un locaș pe o suprafață prismatică. Cel de-al doilea cuplu se poate imagina ca fiind format dintr-o bară cilindrică peste care se îmbracă un corp cu o gaură cilindrică care se poate doar roti în jurul primului corp fără a putea avea o mișcare de translație de-a lungul barei cilindrice. În sfîrșit, al treilea cuplu poate fi realizat printr-o piuliță cu un filet elicoidal, montată pe un șurub. Evident că aceste cupluri permit să se inverseze mișcarea, adică, de exemplu, în primul cuplu, de a lăsa corpul fix și a deplasa prisma care trece prin el.

Dacă mai multe cupluri cinematice sînt legate între ele, astfel încît fiecare element nu intervine mai mult decît în două cupluri cinematice, atunci acest sistem de cupluri cinematice se numește *lanț cinematic simplu*. Dacă fiecare dintre elementele unui cuplu cinematic simplu, intervine în două cupluri cinematice, atunci acest lanț cinematic simplu se numește *închis*, dacă însă la un lanț cinematic simplu sînt elemente care nu intră decît într-un singur cuplu cinematic, atunci acest lanț cinematic se numește *neînchis*. Dacă, la mișcările date ale unuia sau mai multor elemente, toate celelalte elemente au mișcări complet determinate, acest lanț cinematic se numește *mecanism*. Studiul lanțurilor cinematice și al mecanismelor poate fi găsit în lucrarea lui I. I. Artobolevski „Teoria mecanismelor și mașinilor”, 1953.

La teoria matematică a mecanismelor a contribuit în mare măsură renumitul matematician, acad. Pafnutie Lvovici Cebîșev (1821—1894), care ocupîndu-se inițial doar cu problemele teoretice matematice, și-a pus mai pe urmă și la rezolvat adeseori, probleme matematice legate de practică.



Să examinăm un lanț cinematic plan și închis, ale cărui elemente sînt bare prevăzute la capete cu articulații cilindrice; astfel, lanțul cinematic plan considerat, se compune doar din cupluri de rotație. Evident că numărul elementelor trebuie să fie mai mare decît trei, deoarece trei elemente formînd un triunghi, nu pot avea mișcări relative. De aceea cel mai simplu lanț cinematic închis, trebuie să fie format din patru elemente, cum se arată în fig. 188. Dacă în acest lanț cinematic vom imobiliza, de exemplu, elementul  $AB$ , atunci, deoarece mișcările celorlalte elemente  $BC$ ,  $CD$  și  $DA$ , vor fi complet determinate, vom obține un mecanism. Acest mecanism se numește mecanism format din patru elemente articulate. Elementul  $c$  poartă denumirea de *bielă*, elementele  $b$  și  $d$  se numesc *manivele* dacă ele pot avea o rotire completă în jurul punctelor  $A$  și  $B$ , și *balansoare*, în caz contrar.

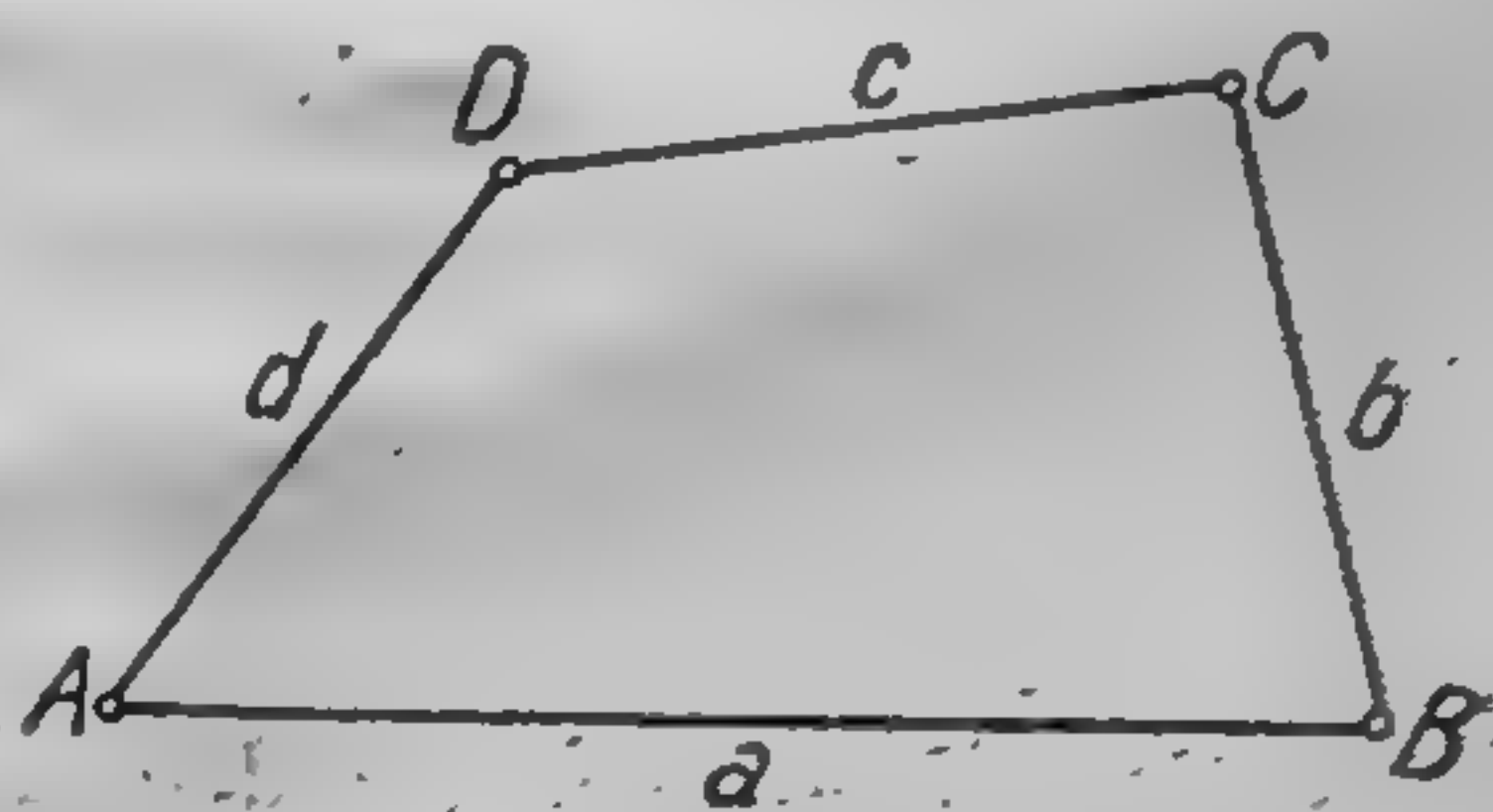


Fig. 188

Nu este greu de găsit condiția suficientă ca elementul  $b$  sau  $d$  să fie manivele. Să presupunem că avem  $d < a$ . Dacă  $d$  este manivelă, atunci are două poziții posibile, care îi asigură rotirea completă în jurul punctului  $A$ ; aceste poziții sînt reprezentate în fig. 189 (I) și (II). Fie  $c > b$ . Atunci din fig. (I) după proprietățile laturilor triunghiului, avem:

$$a - d \geq c - b;$$

din fig. (II) obținem:

$$a + d \leq c + b.$$

Scăzînd din egalitatea a doua pe prima, găsim  $2d < 2b$ , adică manivelă, trebuie să fie cea mai mică dintre elementele  $d$  și  $b$ . Deoarece am presupus că  $a > d$ ,  $c > b$ , și am găsit că  $b > d$ , de aici rezultă că manivela va fi cea mai mică dintre cele patru elemente. Cele două inegalități precedente se mai pot reprezenta și astfel:

$$c + d \leq a + b, \quad a + d \leq c + b.$$

Indiferent de faptul că elementul  $a$  este mai mare sau mai mic decît elementul  $c$ , amîndouă aceste inegalități vor fi satisfăcute, cu condiția ca suma dintre elementul cel mai mare și cel mai mic să fie mai mică sau egală cu suma celorlalte două elemente. Ipoteza  $c < b$  duce la o concluzie analogă. Astfel, ajungem la următorul adevăr:



Pentru ca un element al unui mecanism cu patru elemente să fie manivelă, este suficient ca acesta să fie cel mai mic dintre

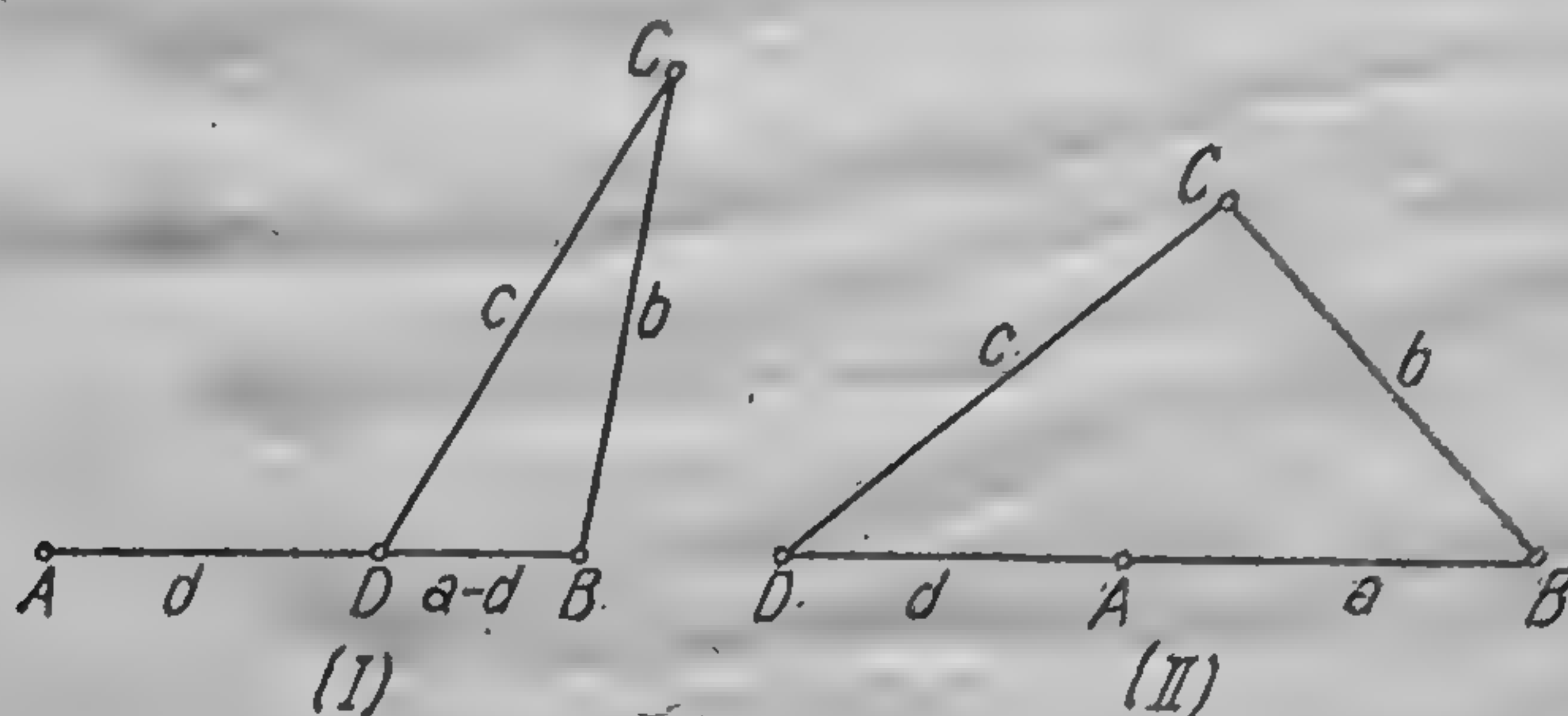


Fig. 189

cele patru elemente și suma elementului cel mai mic cu cel mai mare să fie mai mică sau egală cu suma celorlalte două elemente.

Din triunghiurile cercetate de noi se mai pot deduce și inegalitățile:

$$a - d \leq b + c, \quad a + d \geq c - b.$$

Nu ne-am folosit de aceste inegalități deoarece ele duc la inegalități evidente, care sînt totdeauna satisfăcute:

$$a \leq b + c + d, \quad a + b + d \geq c.$$

Să examinăm mișcarea bielei  $CD$  (fig. 190). Punctele  $C$  și  $D$ , care aparțin barelor  $BC$  și  $AD$  și care sînt în același timp și capetele bielei  $CD$ , descriu prin

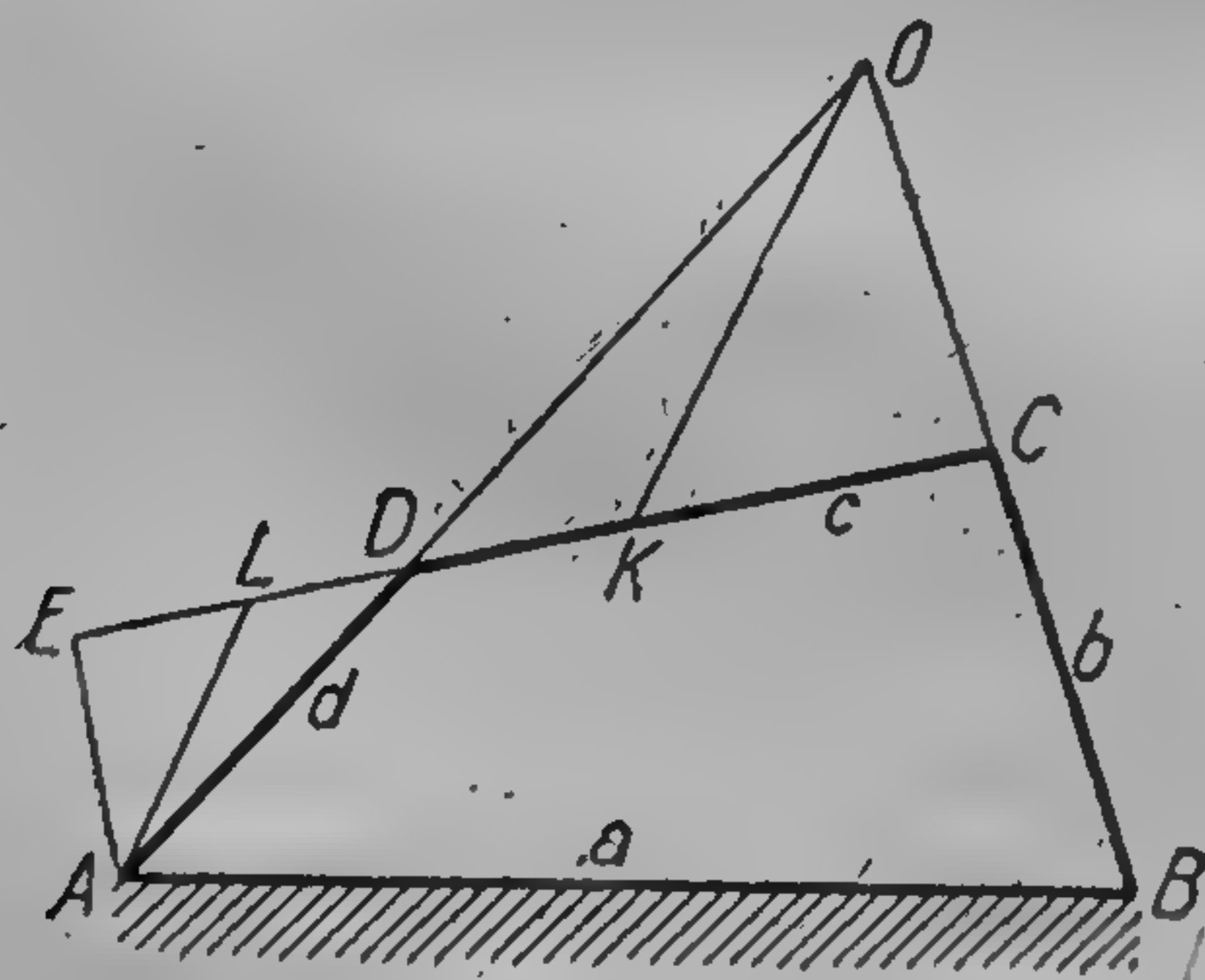


Fig. 190

mișcarea lor, arce de cerc cu raze egale cu  $b$  și  $d$ , cu centrele în punctele  $B$  și  $A$ . Prin urmare, în baza § 81, centrul instantaneu al vitezelor  $O$ , al bielei  $CD$  se află în punctul de intersecție  $O$  al normalelor la aceste circumferințe duse în punctele  $C$  și  $D$ , adică în punctul de intersecție al prelungirilor barelor  $BC$  și  $AD$ . Vom lua un punct oarecare  $K$  al bielei  $CD$  și vom găsi viteza lui  $\vec{v}_K$ . Conform celor precedente, modulul acestei viteze este egal cu  $\Omega \cdot OK$ , unde  $\Omega$  este valoarea absolută



a vitezei unghiulare de rotație a bielei, iar direcția vitezei punctului  $K$  va fi perpendiculară pe dreapta  $OK$ , adică:

$$\vec{v}_K = \vec{n}^0 \Omega \cdot OK,$$

unde  $\vec{n}^0$  este vectorul unitar perpendicular pe dreapta  $OK$ . Pentru a determina viteza unghiulară  $\Omega$ , vom aplica formula precedentă unuia din capetele bielei, de exemplu, punctului  $D$ ; vom obține pentru modulul  $v_D$  al vitezei punctului  $D$ , expresia:

$$v_D = \Omega \cdot OD.$$

Pe de altă parte, pentru modulul  $v_D$  al vitezei punctului  $D$ , avem:

$$v_D = \omega d = \omega \cdot AD,$$

iar viteza unghiulară  $\omega$  este totdeauna cunoscută, deoarece ea ni se dă prin regimul de mișcare al mecanismului. Din aceste două egalități obținem:

$$\Omega \cdot OD = \omega \cdot AD,$$

sau

$$\Omega = \omega \frac{AD}{OD}.$$

Prin urmare, vom avea:

$$\vec{v}_K = \vec{n}^0 \omega \frac{AD}{OD} \cdot OK.$$

În acest fel, viteza punctului arbitrar  $K$  al bielei, se determină printr-o relație simplă dintre lungimile barelor mecanismului.

La executarea acestei construcții se poate întâmpla ca punctul  $O$  să fie atât de îndepărtat, încât nu încapă în limitele desenului. Evident, că aceasta se va întâmpla atunci când barele  $BC$  și  $AD$  sînt aproape paralele între ele. Pentru determinarea vitezei punctului  $K$  al bielei, în acest caz, vom duce dreapta  $AE \parallel BC$  și vom prelungi biela  $CD$  pînă la intersecția ei în punctul  $E$  cu dreapta  $AE$ . Vom obține triunghiul  $AED$  asemenea cu triunghiul  $OCD$ , ca triunghiuri avînd laturile paralele două cîte două.

Luăm pe dreapta  $ED$  un punct  $L$  astfel încît să avem:

$$\frac{EL}{LD} = \frac{CK}{KD}.$$



De aici avem:

$$\frac{EL}{LD} + 1 = \frac{CK}{KD} + 1,$$

sau

$$\frac{ED}{LD} = \frac{CD}{KD},$$

adică

$$\frac{ED}{CD} = \frac{LD}{KD}.$$

Din asemănarea triunghiurilor  $AED$  și  $OCD$  găsim:

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{OD}.$$

Pe baza proporției precedente, vom avea:

$$\frac{AD}{OD} = \frac{LD}{KD},$$

sau

$$\frac{AD}{LD} = \frac{CD}{KD}.$$

De aici concludem că triunghiurile  $ALD$  și  $OKD$ , având câte un unghi egal cu vârful în punctul  $D$  cuprins între laturi proporționale vor fi asemenea între ele. Deci, trebuie să avem:

$$\frac{OK}{AL} = \frac{KD}{LD} = \frac{OD}{AD}.$$

De aici vom avea:

$$OK = AL \cdot \frac{OD}{AD}.$$

Introducând această valoare în expresia precedentă a vectorului viteză  $\vec{v}_K$  al punctului  $K$ , vom obține:

$$\vec{v}_K = \vec{n}^0 \omega \cdot AL.$$

Vedem că pentru determinarea vitezei  $\vec{v}_K$  este suficient să măsurăm segmentul  $AL$ , lucru totdeauna posibil, deoarece triunghiul  $ADE$  va intra totdeauna în limitele desenului.

Să observăm că datorită asemănării triunghiurilor  $OKD$  și  $ADL$  vom avea totdeauna  $AL \parallel OK$ , așa că vectorul  $\vec{n}^0$  va fi perpendicular și pe dreapta  $AL$ . Evident că triunghiul  $ADE$  reprezintă planul vitezelor pentru bilela  $CD$ , deoarece, atunci când punctul  $K$



coincide cu punctele  $C$  și  $D$ , avem  $v_C = \omega \cdot AE$  și  $v_D = \omega \cdot AD$ , adică segmentele  $AE$  și  $AD$  sînt proporționale cu vitezele punctelor  $C$  și  $D$ .

§ 85. Exemple. 61. În ce loc trebuie așezat cepul unei mese mobile, spre a putea întoarce tăblia mesei cu un unghi drept și s-o deschidem în mod obișnuit? În poziția închisă tăblia mobilă a mesei este un dreptunghi a cărui lungime  $AB = 2l$  este dublul lății  $AD = l$  (fig. 191). Tăblia mesei  $ABCD$  poate fi rotită în jurul cepului cu  $90^\circ$  în poziția  $A'B'C'D'$ , și apoi masa poate fi deschisă astfel încît tăblia ia forma unui pătrat cu latura  $2l$ . Conform indicațiilor § 81, împărțim segmentele  $CC'$  și  $BB'$  în două părți egale; în mijloacele lor  $G$  și  $K$  ridicăm perpendiculare; punctul  $O$  de intersecție al acestor perpendiculare va fi centrul de

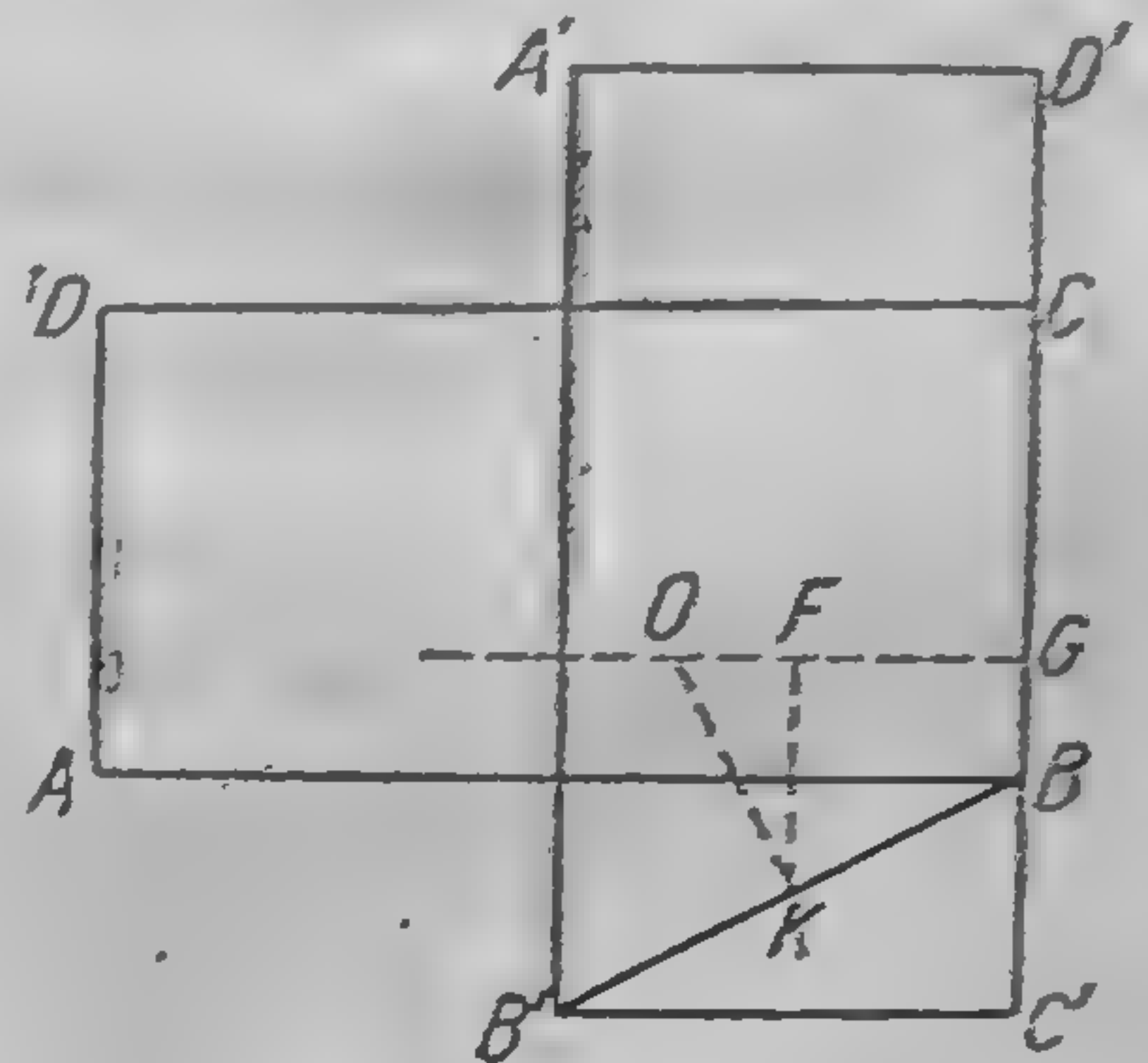


Fig. 191

rotație al tăbliei, adică locul unde trebuie fixat cepul. Deoarece  $D'C = BC' = \frac{l}{2}$ , vom obține că  $CC' = \frac{3l}{2}$ ; de aici vom găsi:

$$GC' = \frac{3l}{4}, \quad BG = \frac{3l}{4} - \frac{l}{2} = \frac{l}{4}.$$

Triunghiurile dreptunghice  $OKF$  și  $BB'C'$  vor fi asemenea deoarece au unghiuri egale; prin urmare, vom avea:

$$\frac{OF}{FK} = \frac{BC'}{B'C'},$$

sau

$$OF = FK \cdot \frac{BC'}{B'C'} = \frac{l}{2} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{4}.$$

Astfel, găsim

$$GO = \frac{l}{2} + \frac{l}{4} = \frac{3l}{4}.$$

Știind că  $BG = \frac{l}{4}$ ,  $GO = \frac{3l}{4}$ , cunoaștem astfel locul unde va trebui fixat cepul.

62. Să se deducă ecuația centroidei fixe și a celei mobile pentru biela  $AB$  a mașinii cu abur (fig. 192). Pentru determinarea ecuației centroidei fixe, vom alege un sistem ortogonal de axe de coordonate fixe  $Ox_1y_1$ , iar pentru determinarea ecuației centroidei mobile, vom alege un sistem mobil de axe de coordonate  $Axy$ . Evident, că bara  $OB$  este o manivelă, deoarece



punctul  $B$  execută o rotație completă în jurul punctului  $O$ . Se vede ușor că centrul instantaneu al bielei  $AB$  va fi punctul de intersecție  $C$  al pre-

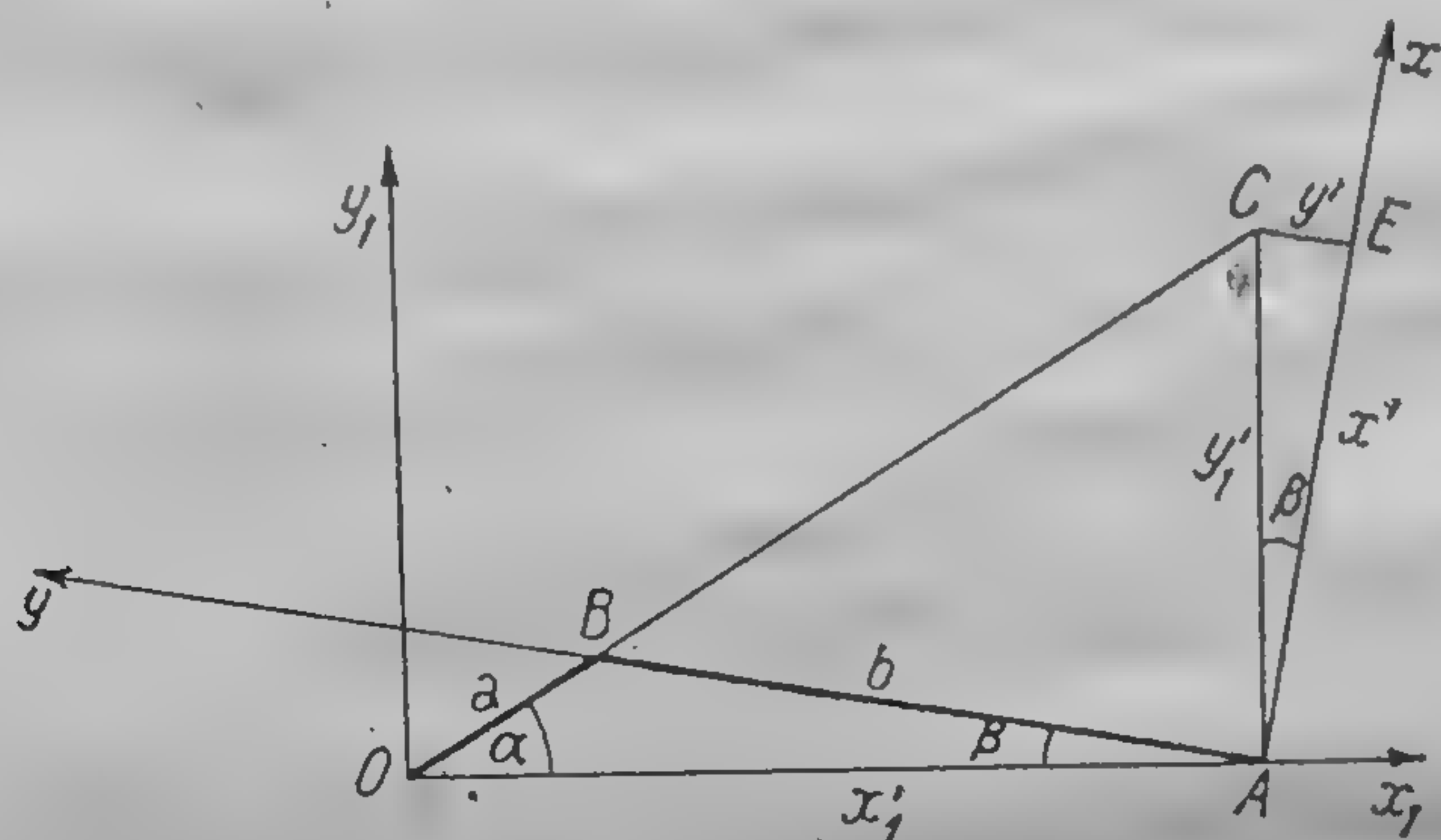


Fig. 192

lungirii lui  $OB$  cu perpendiculara în punctul  $A$  pe dreapta  $Ox_1$ ; notăm coordonatele punctului  $C$  prin  $(x_1', y_1')$ , unde:

$$x_1' = OA, \quad y_1' = AC.$$

Vom introduce notațiile  $OB=a$ ,  $AB=b$ ,  $\angle BOA=\alpha$ ,  $\angle BAO=\beta$ . Făcînd desenul pentru diferite valori ale unghiului  $\alpha$  este ușor să ne convin-gem că pentru valorile unghiului  $\alpha$  situate în primul și în al treilea cadran vom avea  $y_1' > 0$ , iar pentru valorile unghiului  $\alpha$  situate în al doilea și al patrulea cadran vom avea  $y_1' < 0$ . Pentru valorile unghiului  $\alpha$  situate în primul cadran vom obține din fig. 192:

$$x_1' = OA = a \cos \alpha + b \cos \beta, \quad a \sin \alpha = b \sin \beta, \quad y_1' = x_1' \operatorname{tg} \alpha.$$

Din primele două ecuații găsim:

$$b \cos \beta = x_1' - a \cos \alpha, \quad b \sin \beta = a \sin \alpha;$$

ridicîndu-le la pătrat și adunînd rezultatele, vom avea:

$$b^2 = x_1'^2 + a^2 - 2ax_1' \cos \alpha.$$

De aici avem:

$$\cos \alpha = \frac{x_1'^2 + a^2 - b^2}{2ax_1'}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{[x_1'^2 + a^2 - b^2]^2}{4a^2x_1'^2}$$

Deoarece:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1'}{x_1'},$$

vom găsi:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{x_1'^2}{x_1'^2 + y_1'^2}.$$



Egalind între ele cele două expresii obținute pentru  $\cos^2 \alpha$  vom ajunge la ecuația centroidului fixe în coordonate ortogonale, sub următoarea formă:

$$\frac{x_1'^2}{x_1'^2 + y_1'^2} = \frac{[x_1'^2 + a^2 - b^2]^2}{4a^2 x_1'^2}.$$

Introducem coordonatele polare  $(r_1', \varphi_1')$  după formulele:

$$x_1' = r_1' \cos \varphi_1', \quad y_1' = r_1' \sin \varphi_1'.$$

Vom obține:

$$\cos^2 \varphi_1' = \frac{[r_1'^2 \cos^2 \varphi_1' - (b^2 - a^2)]^2}{4a^2 r_1'^2 \cos^2 \varphi_1'}.$$

Aducînd la același numitor și extrăgînd rădăcina pătrată, vom avea:

$$r_1'^2 \cos^2 \varphi_1' - (b^2 - a^2) = \pm 2ar_1' \cos^2 \varphi_1'.$$

Deoarece pentru  $\alpha = 0$  trebuie să avem:

$$\beta = 0, \quad y_1' = 0, \quad \varphi_1' = 0, \quad x_1' = r_1' = a + b,$$

concludem că în partea dreaptă trebuie să se ia semnul plus. Astfel, vom avea:

$$r_1'^2 \cos^2 \varphi_1' - (b^2 - a^2) = + 2ar_1' \cos^2 \varphi_1',$$

sau:

$$\cos \varphi_1' = \pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r_1'(r_1' - 2a)}}.$$

Deoarece pentru  $\varphi_1' = 0$  trebuie să avem:  $r_1' = a + b$ , rezultă că radicalul trebuie luat cu semnul plus și pentru intervalul  $\frac{\pi}{2} \geq \varphi_1' \geq 0$ , vom obține ecuația centroidului fixe în coordonate polare, sub forma definitivă:

$$\cos \varphi_1' = + \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r_1'(r_1' - 2a)}}.$$

Să trecem acum la determinarea ecuației centroidului mobile, notînd prin  $(x', y')$  - coordonatele centrului instantaneu  $C$  în raport cu sistemul mobil al axelor de coordonate ortogonale mobile  $Axy$ . Avem:

$$x' = AC \cos \beta, \quad y' = AC \sin \beta, \quad AC = OA \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

prin urmare:

$$x' = OA \cdot \operatorname{tg} \alpha \cos \beta, \quad y' = OA \cdot \operatorname{tg} \alpha \sin \beta.$$

Introducem coordonatele polare  $(r', \varphi')$  ale punctului  $C$  după formulele:

$$x' = r' \cos \varphi', \quad y' = r' \sin \varphi'.$$

Vedem că trebuie să avem:

$$\varphi' = \beta, \quad r' = AC = OA \operatorname{tg} \alpha.$$



Din prima și a doua relație vom obține:

$$r' = (a \cos \alpha + b \cos \beta) \operatorname{tg} \alpha = a \sin \alpha + b \cos \varphi' \operatorname{tg} \alpha.$$

Din relația  $a \sin \alpha = b \sin \beta = b \sin \varphi'$  vom avea:

$$a \sin \alpha = b \sin \varphi', \quad a \cos \alpha = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi'},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi'}},$$

Prin urmare:

$$r' = (b \sin \varphi' + b \cos \varphi') \frac{b \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi'}},$$

adică:

$$r' = b \sin \varphi' \left[ 1 + \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \sin^2 \varphi'}} \right].$$

Deoarece totdeauna are loc inegalitatea  $\frac{a}{b} < 1$ , putem să punem  $\frac{a}{b} = \sin \varepsilon$ ; vom găsi atunci:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \sin^2 \varphi' &= (\sin \varepsilon + \sin \varphi') (\sin \varepsilon - \sin \varphi') = \\ &= 2 \sin \frac{\varepsilon + \varphi'}{2} \cos \frac{\varepsilon - \varphi'}{2} 2 \sin \frac{\varepsilon - \varphi'}{2} \cos \frac{\varepsilon + \varphi'}{2} = \sin (\varepsilon + \varphi') \sin (\varepsilon - \varphi'). \end{aligned}$$

În acest fel, ajungem la următoarea ecuație a centroidei fixe în coordonate polare:

$$r' = b \sin \varphi' \left[ 1 + \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{\sin (\varepsilon + \varphi') \sin (\varepsilon - \varphi')}} \right].$$

Observăm, că dacă vom avea  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , adică vom avea  $OB \perp OA$ , atunci punctul  $C$  se va găsi la infinit, și vom avea:

$$r'_1 = r' = \infty, \quad x'_1 = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad \varphi'_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi' = \varepsilon.$$

Nu vom reproduce calculele care nu prezintă dificultăți pentru valorile unghiului  $\alpha$  în celelalte cadrane.

63. Să se folosească planul vitezelor pentru găsirea vitezelor punctelor unei biele a unei mașini cu abur.

Mecanismul mașinii cu abur se obține prin deformarea mecanismului cu patru bare articulate (fig. 188) când bara  $BC$  este balansoar, bara  $AD$  este manivelă și punctul  $B$  se depărtează la infinit. În acest caz, vom avea fig. 193. Deoarece punctul  $B$  va fi un punct depărtat la infinit, dreptele  $AB$  și  $CD$  se intersectează într-un punct îndepărtat la infinit, adică devin paralele. În mecanismul cu patru bare, punctul  $C$  descrie un arc de cerc cu raza egală cu  $BC$ ; deoarece punctul  $B$  este depărtat la infinit,



această circumferință devine o dreaptă ( $\Gamma$ ) pe care trebuie să alunece punctul  $C$ . Știm că pentru obținerea centrului instantaneu  $O$  al bielei  $CD$ , trebuie prelungită dreapta  $AD$  pînă la intersecția ei cu prelungirea  $BC$ , adică pînă la intersecția prelungirii dreptei  $AD$  cu perpendiculara pe dreapta ( $\Gamma$ ), ridicată în punctul  $C$ . Dacă punctul  $O$  nu încapă pe desen, putem

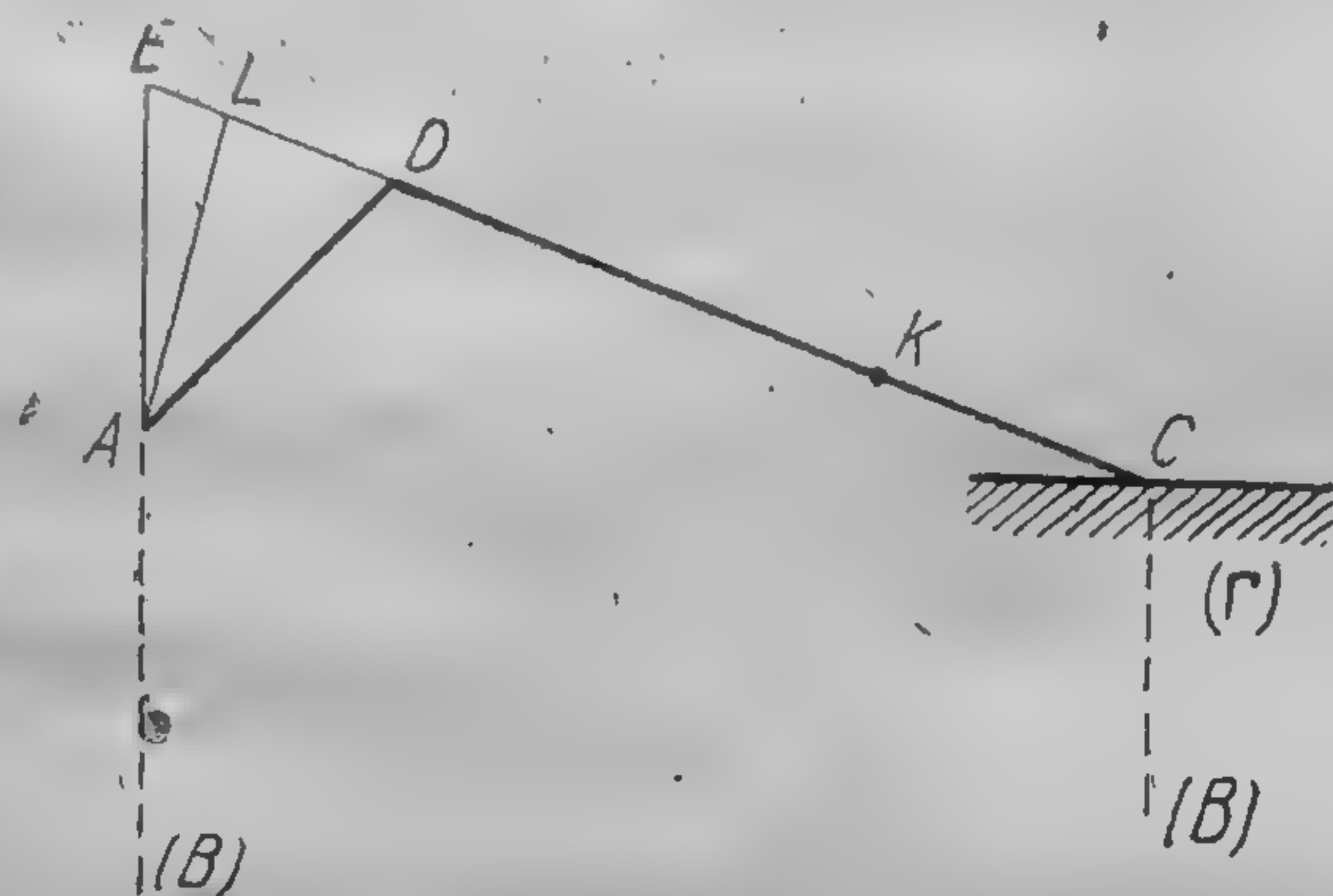


Fig. 193

apela la construcția planului vitezelor, așa cum s-a arătat mai sus. În acest scop vom duce prin punctul  $A$  dreapta  $AE \parallel BC$ , adică perpendiculară pe dreapta  $(\Gamma)$ ; și vom prelungi biela  $CD$  pînă în punctul lor de intersecție, punctul  $E$  cu dreapta  $AE$ . Să determinăm viteza unui punct oarecare  $K$  al bielei  $CD$ . Atunci vom lua pe dreapta  $ED$  punctul  $L$ , astfel încît:

$$\frac{EL}{LD} = \frac{CK}{KD}.$$

Unim punctul  $L$  cu punctul  $A$  prin dreapta  $AL$ ; pe baza celor precedente viteza  $\bar{v}_K$  a punctului  $K$  va fi:

$$\bar{v}_k = \bar{n}^0 \omega \cdot AL$$

unde  $\omega$  este viteza unghiulară a manivelei  $AD$ , iar  $\bar{n}^0$  este vectorul unitar, perpendicular pe dreapta  $AL$ . Acest exemplu ne arată clar avantajul aplicării planului vitezelor.

64. Un corp, mărginit de o suprafață dată de rotația  $S$ , se poate deplasa printr-o mișcare elicoidală în jurul unei axe fixe  $\Delta$ . Pe suprafața  $S$  a corpului apasă un știft drept, astfel încît axa știftului să rămînă totdeauna perpendiculară pe axa corpului considerat, iar știftul să se poată deplasa printr-o mișcare de translație, paralel cu axa lui. Dacă știftul ar avea capete ascuțite, atunci poziția știftului, în orice moment, ar determina raza corpului de rotație dat, adică lungimea perpendicularei coborîtă din punctul de contact al știftului cu suprafața  $S$  pe axa corpului considerat. Totuși nu este posibil ca știftul să fie prevăzut cu un vîrf ascuțit, deoarece vîrfurile va zgîria și, astfel, va deteriora suprafața  $S$ ; de aceea, știftul se termină printr-o emisferă al cărei diametru este egal cu diametrul știftului. De aici rezultă eroarea care se observă pe fig. 194; anume, dacă știftul s-ar termina printr-un vîrf, atunci el ar indica raza  $CA$  a corpului, pe cînd el indică în



realitate raza  $CB$ . Să se găsească o astfel de suprafață, încît știftul terminat cu o emisferă, rezemîndu-se pe această suprafață, să indice razele exacte ale corpului mărgînit de suprafața  $S$ . Această problemă se poate rezolva pur grafic. Fie  $L$  curba de intersecție a suprafeței  $S$  cu planul desenului. Dacă vom așeza secțiunea știftului, astfel încît capătul  $A$  să fie situat pe curba  $L$ , cum se arată în fig. 195, atunci o parte din semicerc se va găsi în stînga curbei  $L$ ; vom desena aceste arce de cerc. Efectuînd asemenea

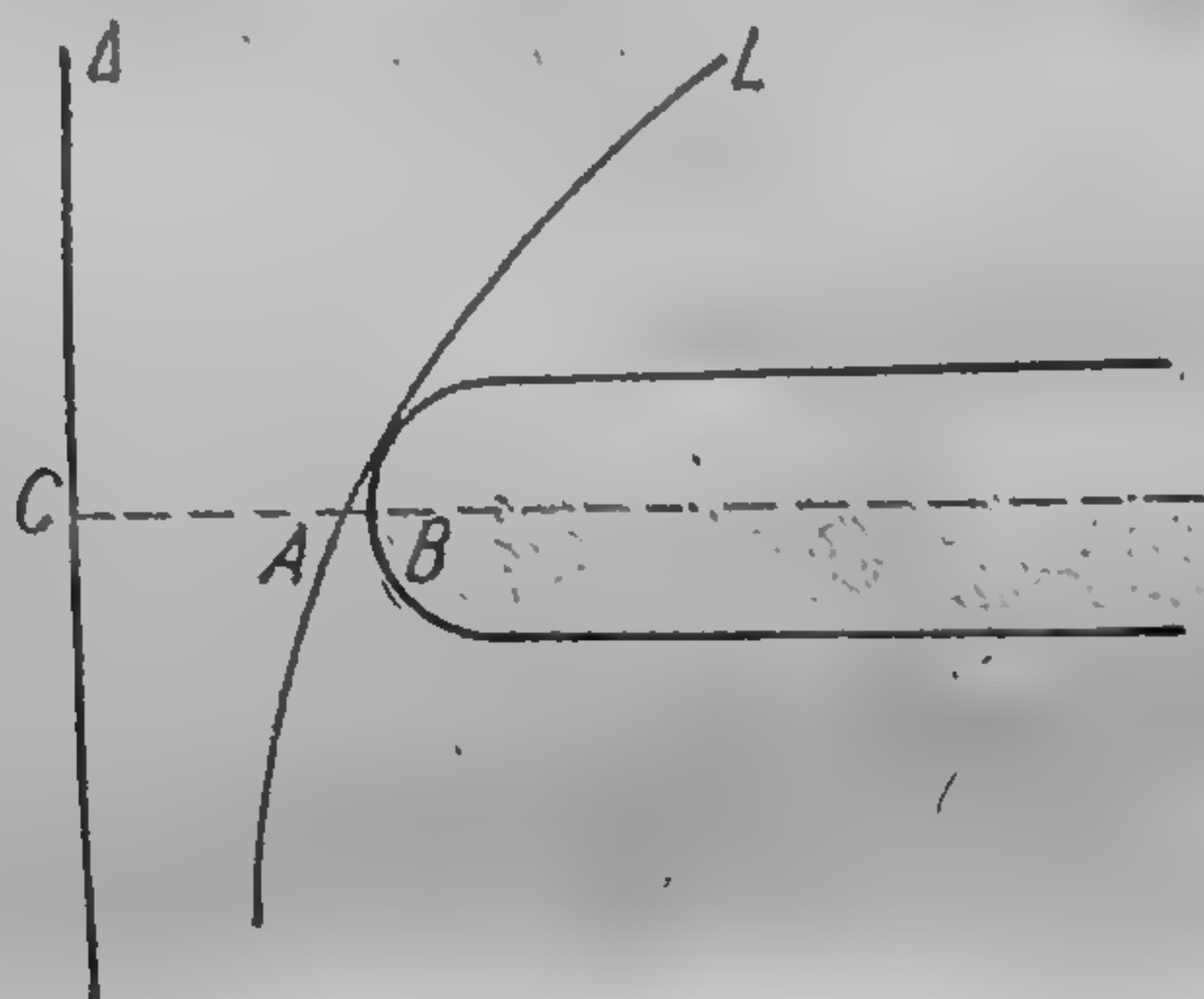


Fig. 194

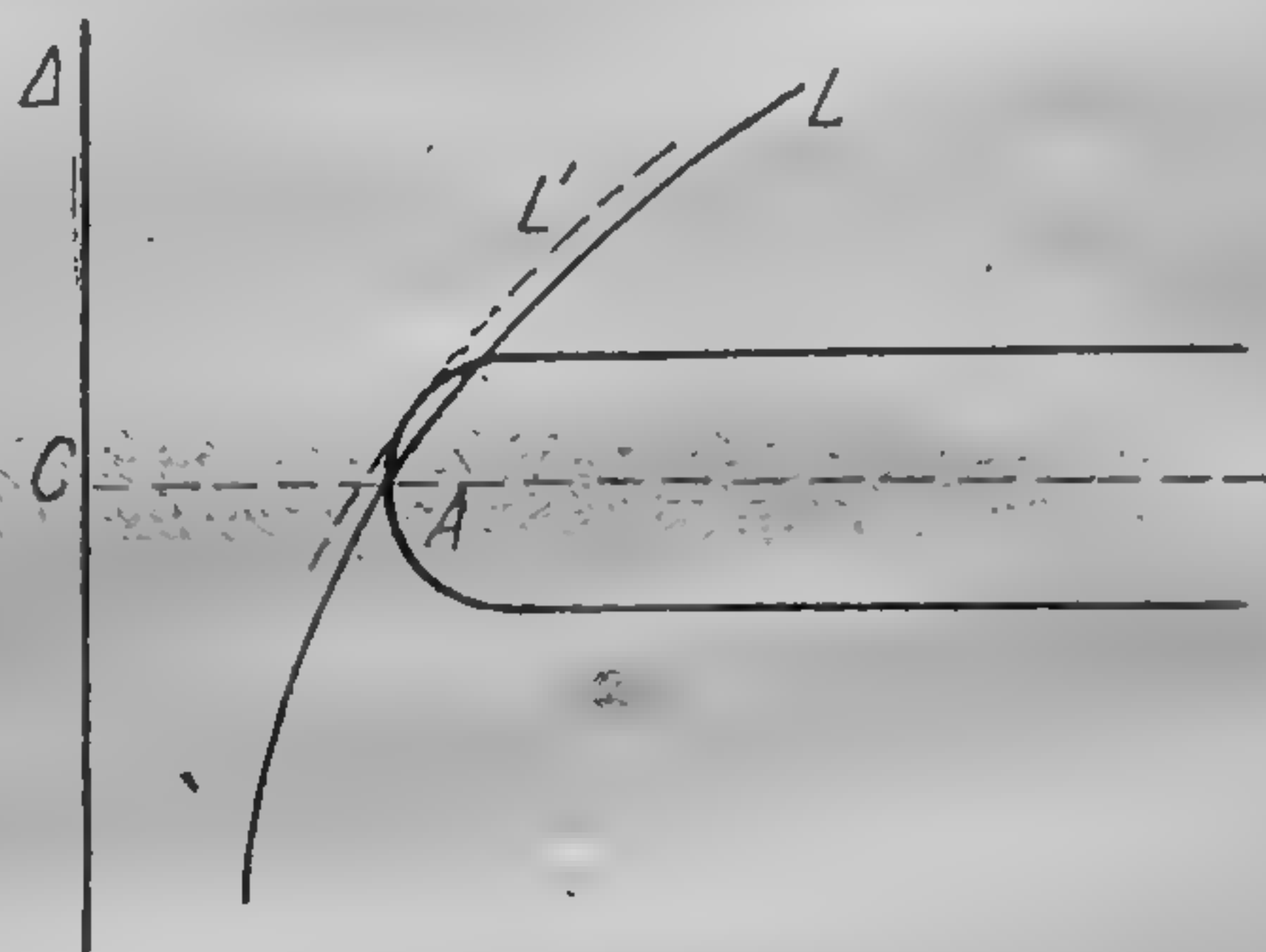


Fig. 195

construcții pentru mai multe puncte ale curbei  $L$  și găsind înfășurătoarea  $L'$  a acestor arce de cerc, vom găsi astfel curba de intersecție  $L'$  a suprafeței căutate cu planul desenului. Deoarece suprafața căutăată trebuie să fie o suprafață de rotație, ea se obține prin rotirea curbei  $L'$  în jurul axei  $\Delta$ .

65. Să se rezolve problema 64 analitic, dacă  $\beta = f(\alpha)$  este ecuația curbei  $L$ , unde  $\alpha$  sînt abscisele iar  $\beta$  ordonatele punctelor ei. Dacă raza emisferei capătului știftului este  $R$ , atunci ecuația cercului care are centrul într-un punct oarecare  $O_1(\alpha + R, \beta)$  și care trece prin punctul  $A$  al curbei  $L$ , va fi:

$$(x - \alpha - R)^2 + [y - f(\alpha)]^2 = R^2,$$

sau

$$F(\alpha) = (x - \alpha - R)^2 + [y - f(\alpha)]^2 - R^2 = 0.$$

Vom obține înfășurătoarea acestor cercuri, eliminînd  $\alpha$  din ecuațiile  $F(\alpha) = 0$  și  $F'(\alpha) = 0$ ; vom obține:

$$F'(\alpha) = (x - \alpha - R) + [y - f(\alpha)] f'(\alpha) = 0.$$

Intrucît  $f'(\alpha) = \tan \varphi$ , în care  $\varphi$  este unghiul format de tangenta la curba  $L$  în punctul  $A$  cu axa  $Ox$ , iar în ecuația  $F(\alpha) = 0$ , putem pune:

$$x - \alpha - R = R \cos \omega, \quad y - f(\alpha) = R \sin \omega,$$

în care  $\omega$  este unghiul format de raza  $R$  a cercului cu axa  $Ox$ , atunci din ecuația  $F'(\alpha) = 0$ , vom avea:

sau

$$\cos \omega + \sin \omega \tan \varphi = 0,$$

$$1 + \tan \omega \tan \varphi = 0.$$



Din această ecuație rezultă că raza  $R$ , dusă în punctul de tangență al cercului la curba  $L'$ , este perpendiculară pe tangenta la curba  $L$  dusă din punctul  $A$ , adică trebuie să avem:  $\omega = \frac{\pi}{2} + \varphi$  (fig. 196). Notînd unghiul format de raza  $R$ , dusă în punctul de tangență al cercului cu curba  $L'$ , cu direcția  $O_1A$  prin  $\vartheta$ , atunci vom avea  $\omega = \pi - \vartheta$ , și vom obține:

$$\pi - \vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Astfel, vom avea:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

De aici rezultă că pentru construirea curbei  $L'$  trebuie să se măsoare unghiul  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  pe care îl formează tangenta la curba  $L$  din punctul  $A$ , cu axa  $Oy$  și sub acest unghi să se ducă raza  $O_1K=R$ , după cum se arată în fig. 196; atunci punctul  $K$  va fi un punct al curbei  $L'$ . Făcînd această construcție pentru diferite valori ale ordonatei  $\beta$  vom obține punctele curbei  $L'$ .

66. O bară dreaptă  $DB$ , care se poate roti în planul  $\pi$  în jurul punctului  $D$ , are la capătul  $B$ , atașată la ea, o figură plană  $S$ , situată în plan și mărginită de curba  $(C)$  cum se arată în fig. 197. O bară cotită,  $AQPNM$ , care se poate roti în același plan în jurul punctului  $A$ , se reazemă cu capătul ei  $M$  de curba  $(C)$  care limitează figura  $S$ . Bară  $DB$  formează unghiul  $\gamma$  cu dreapta  $AD$ , iar bară  $AQ$ , unghiul  $\beta$ . Să se găsească o astfel de formă a curbei  $(C)$ , încît între unghiurile  $\beta$  și  $\gamma$  să existe o dependență funcțională dată, adică fiecărei valori a unghiului  $\gamma$  să-i corespundă o anumită valoare dată pentru unghiul  $\beta$  și invers. Se dau  $AD=L$ ,  $PN=n_1$ ,  $AQ=n_2$ ,  $PQ-NM=\delta$ ,  $DE=l_1$ .

Unim prin dreapta  $AM$ , punctul  $A$  cu punctul  $M$  și notăm  $AM=l'$ ; apoi fie  $\angle MAD = \beta'$  și  $\angle MAQ = \varphi$ . Curba  $(C)$  este determinată dacă vom cunoaște lungimea  $\rho$  a perpendicularei  $MR$  coborîtă din punctul  $M$  pe dreapta  $DB$  și lungimea  $x$  a segmentului  $ER$  care reprezintă distanța de la punctul  $E$  de fixare a figurii  $S$  pe bară  $DB$  pînă la piciorul  $R$  al perpendicularei  $MR$ . Ne vom folosi de fig. 198, la care punctele comune cu fig. 197 sînt notate prin aceleași litere. Coborîm perpendiculara  $MH$  pe dreapta  $AD$ . Din triunghiul  $AMH$ , avem:

$$MH = l' \sin \beta', \quad AH = l' \cos \beta', \quad DH = AD - AH = L - l' \cos \beta'.$$

De aceea:

$$GH = DH \operatorname{tg} \gamma = (L - l' \cos \beta') \operatorname{tg} \gamma.$$

În acest fel, găsim:

$$MG = MH - GH = l' \sin \beta' - (L - l' \cos \beta') \operatorname{tg} \gamma,$$

sau

$$MG = l' \frac{\sin \beta' \cos \gamma + \cos \beta' \sin \gamma}{\cos \gamma} - L \operatorname{tg} \gamma = l' \frac{\sin (\beta' + \gamma)}{\cos \gamma} - L \operatorname{tg} \gamma.$$



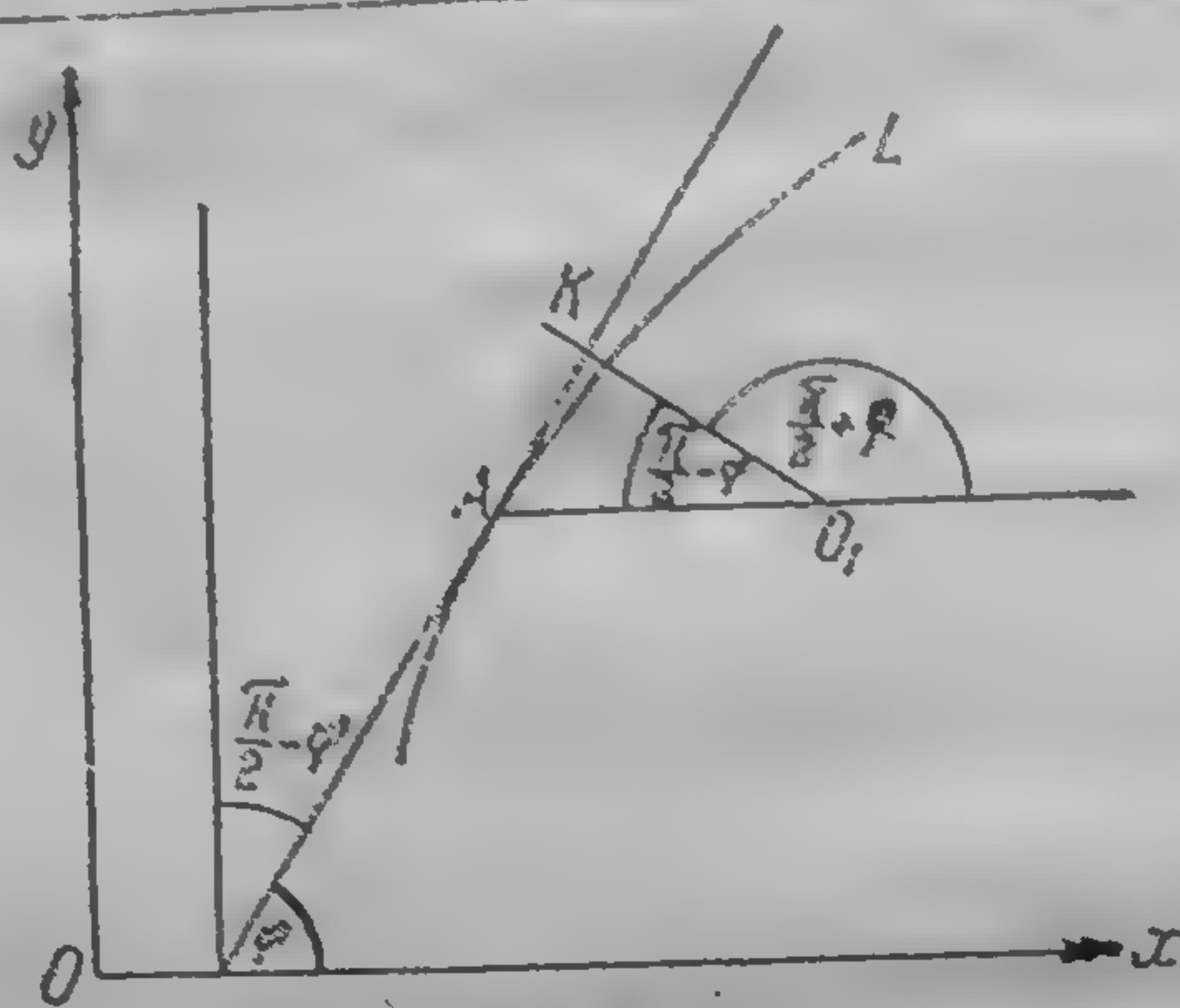


Fig. 196

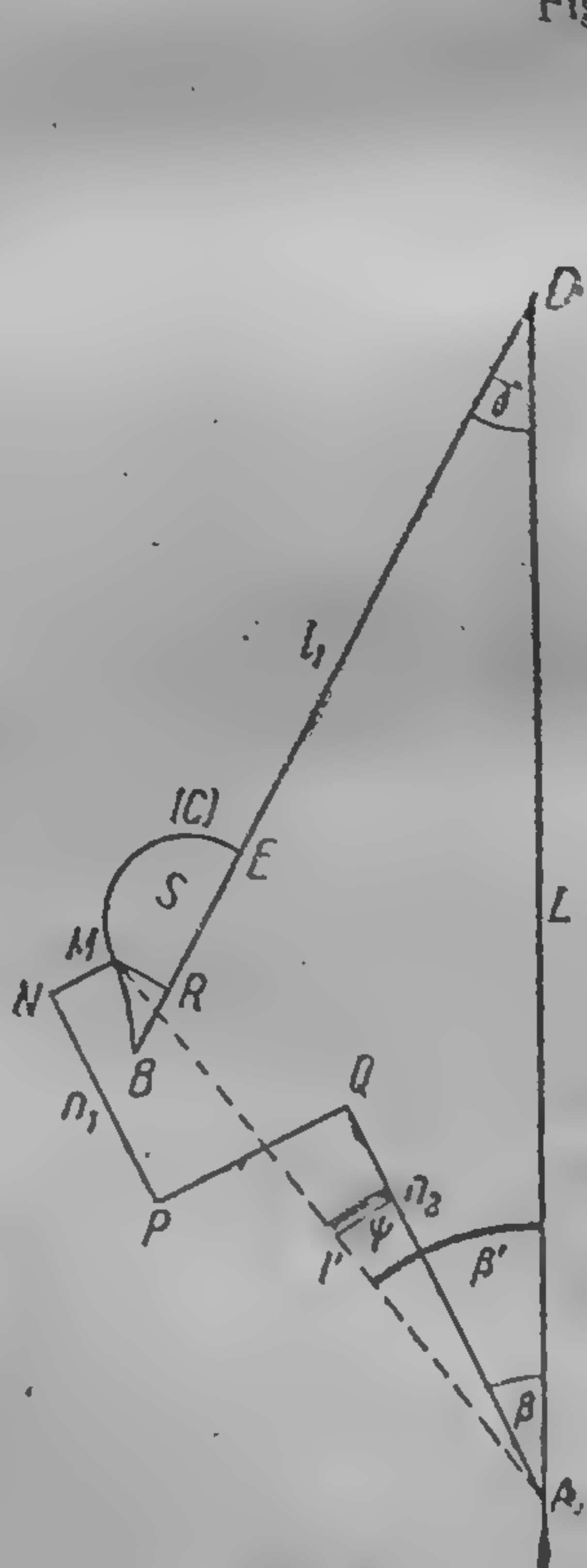


Fig. 197



Fig. 198



Deoarece  $\beta' = \beta + \psi$  după cum se vede din fig. 197, obținem:

$$MG = l' \frac{\sin(\beta + \gamma + \psi)}{\cos \gamma} - L \operatorname{tg} \gamma,$$

sau

$$MG = \frac{\sin(\beta + \gamma) l' \cos \psi + \cos(\beta + \gamma) l' \sin \psi}{\cos \gamma} - L \operatorname{tg} \gamma;$$

folosind fig. 197 și observînd din fig. 198 că avem:

$$\rho = MR = MG \cos \gamma,$$

vom găsi:

$$\rho = (n_1 + n_2) \sin(\beta + \gamma) + \delta \cos(\beta + \gamma) - L \sin \gamma.$$

Pentru determinarea lungimii  $x$ , observăm că:

$$x = ER = DR - DE = DR - l_1.$$

Din triunghiul  $DMR$  avem:

$$DR = \rho \operatorname{ctg}(\omega - \gamma) = \rho \frac{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \gamma}.$$

Deoarece:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{MH}{DH} = \frac{l' \sin \beta'}{L - l' \cos \beta'},$$

obținem:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \gamma} = \frac{L - l' \cos \beta' + l' \sin \beta' \operatorname{tg} \gamma}{l' \sin \beta' - (L - l' \cos \beta') \operatorname{tg} \gamma} = \frac{L \cos \gamma - l' (\cos \beta' \cos \gamma - \sin \beta' \sin \gamma)}{l' (\sin \beta' \cos \gamma + \cos \beta' \sin \gamma) - L \sin \gamma},$$

adică ajungem la formula

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \gamma} = \frac{L \cos \gamma - l' \cos(\beta' + \gamma)}{l' \sin(\beta' + \gamma) - L \sin \gamma} = \frac{L \cos \gamma - l' \cos(\beta + \gamma + \psi)}{l' \sin(\beta + \gamma + \psi) - L \sin \gamma}.$$

De aici vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \gamma} &= \frac{L \cos \gamma - [\cos(\beta + \gamma) l' \cos \psi - \sin(\beta + \gamma) l' \sin \psi]}{\sin(\beta + \gamma) l' \cos \psi + \cos(\beta + \gamma) l' \sin \psi - L \sin \gamma} = \\ &= \frac{L \cos \gamma - (n_1 + n_2) \cos(\beta + \gamma) + \delta \sin(\beta + \gamma)}{(n_1 + n_2) \sin(\beta + \gamma) + \delta \cos(\beta + \gamma) - L \sin \gamma} \end{aligned}$$

Din expresia lungimii  $\rho$  vom găsi:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \gamma} = \frac{L \cos \gamma - (n_1 + n_2) \cos(\beta + \gamma) + \delta \sin(\beta + \gamma)}{\rho}.$$

În acest fel, vom avea:

$$DR = L \cos \gamma - (n_1 + n_2) \cos(\beta + \gamma) + \delta \sin(\beta + \gamma),$$

și obținem:

$$x = L \cos \gamma + \delta \sin(\beta + \gamma) - (n_1 + n_2) \cos(\beta + \gamma) - l_1.$$

Din formulele obținute pentru mărimile  $\rho$  și  $x$  se pot determina coordonatele  $(x, \rho)$  ale punctelor curbei  $(C)$  în funcție de perechile de valori ale unghiurilor  $(\beta, \gamma)$  și de valorile date ale parametrilor  $L, \delta, n_1, n_2, l_1$ .



## CAPITOLUL XX

### MIȘCAREA DE ROTAȚIE A SOLIDULUI ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX

§ 86. Studiul geometric al rotației solidului în jurul unui punct fix. În acest capitol, vom studia mai întâi geometric iar apoi analitic mișcarea de rotație a solidului în jurul unui punct fix.

*Dacă un solid se mișcă astfel încât un punct oarecare legat invariabil de corp rămîne în repaus, atunci această mișcare se numește mișcare de rotație a solidului în jurul unui punct fix.*

Punctul fix  $O$  poate fie să aparțină corpului, fie să se găsească în afara lui, dar atunci trebuie să ne imaginăm că el este invariabil legat de corp într-un fel oarecare, de exemplu, cu ajutorul unei bare. Exemplu al unui solid cu un punct fix, poate fi sfîrleaza; capătul axei de rotație al sfîrlezei reazemă în locașul făcut în suport, astfel încît acest capăt al axei rămîne fix în timpul rotației sfîrlezei.

Să presupunem că solidul se rotește în jurul unui punct fix  $O$ . Vom descrie în jurul punctului  $O$  o sferă care se intersectează cu solidul, secțiunea solidului cu sfera fiind o figură sferică, așezată pe suprafața sferei și mărginită de un contur  $(\gamma)$ . Știind cum se deplasează figura sferică pe suprafața sferei, vom cunoaște cum se deplasează solidul în jurul punctului  $O$ . În acest fel, reducem studiul mișcării solidului cu un punct fix, la studiul mișcării figuri sferice pe suprafața sferei. Vedem, că am ajuns la problema complet analogă cu problema la care se reducea studiul mișcării plan-paralelă a unui solid, numai cu deosebirea ca în loc de a cerceta mișcarea unei figuri plane în planul ei, în cazul de față, trebuie să cercetăm mișcarea unei figuri sferice pe suprafața sferei. Toate deducțiile din § 81 pentru plan se repetă și aici fără modificări substanțiale.

În primul rînd, în loc să urmărim mișcarea unei figuri oarecare sferice mărginite de conturul  $(\gamma)$ , pe suprafața unei sfere, putem ca și în § 81, să urmărim deplasarea a două puncte oare-



care  $A$  și  $B$  ale acestei figuri, sau să urmărim mișcarea arcului  $\widehat{AB}$  al cercului mare, care unește aceste două puncte (fig. 199). Să presupunem că la început, în poziția  $I$  a corpului, acest arc al cercului mare ocupa poziția  $AB$ , iar apoi, după deplasarea solidului în poziția a  $II$ -a, el a venit în poziția  $A'B'$ . Unim punctele  $A$  și  $A'$  apoi punctele  $B$  și  $B'$  prin arcele de cercuri mari  $\widehat{AA'}$  și  $\widehat{BB'}$ , împărțim aceste arce în două părți egale prin punctele  $L$  și  $M$  și ducem prin punctele  $L$  și  $M$  arce de cercuri mari, perpendiculare pe  $\widehat{AA'}$  și  $\widehat{BB'}$ . Aceste arce se vor intersecta într-un punct carecace  $C$  de pe emisfera situată cu fața spre cititor și, în același timp, în punctul diametral opus  $C'$ , situat în cealaltă emisferă. Unim punctul  $C$  prin arcele cercurilor mari  $\widehat{CA}$ ,  $\widehat{CB}$ ,  $\widehat{CA'}$ ,  $\widehat{CB'}$ , cu punctele  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ , vom obține triunghiurile sferice egale între ele  $CAB$  și  $CA'B'$ . Vedem că este suficient a roti triunghiul sferic  $CAB$  în jurul vârfului  $C$  cu unghiul  $ACA'$ , pentru a face

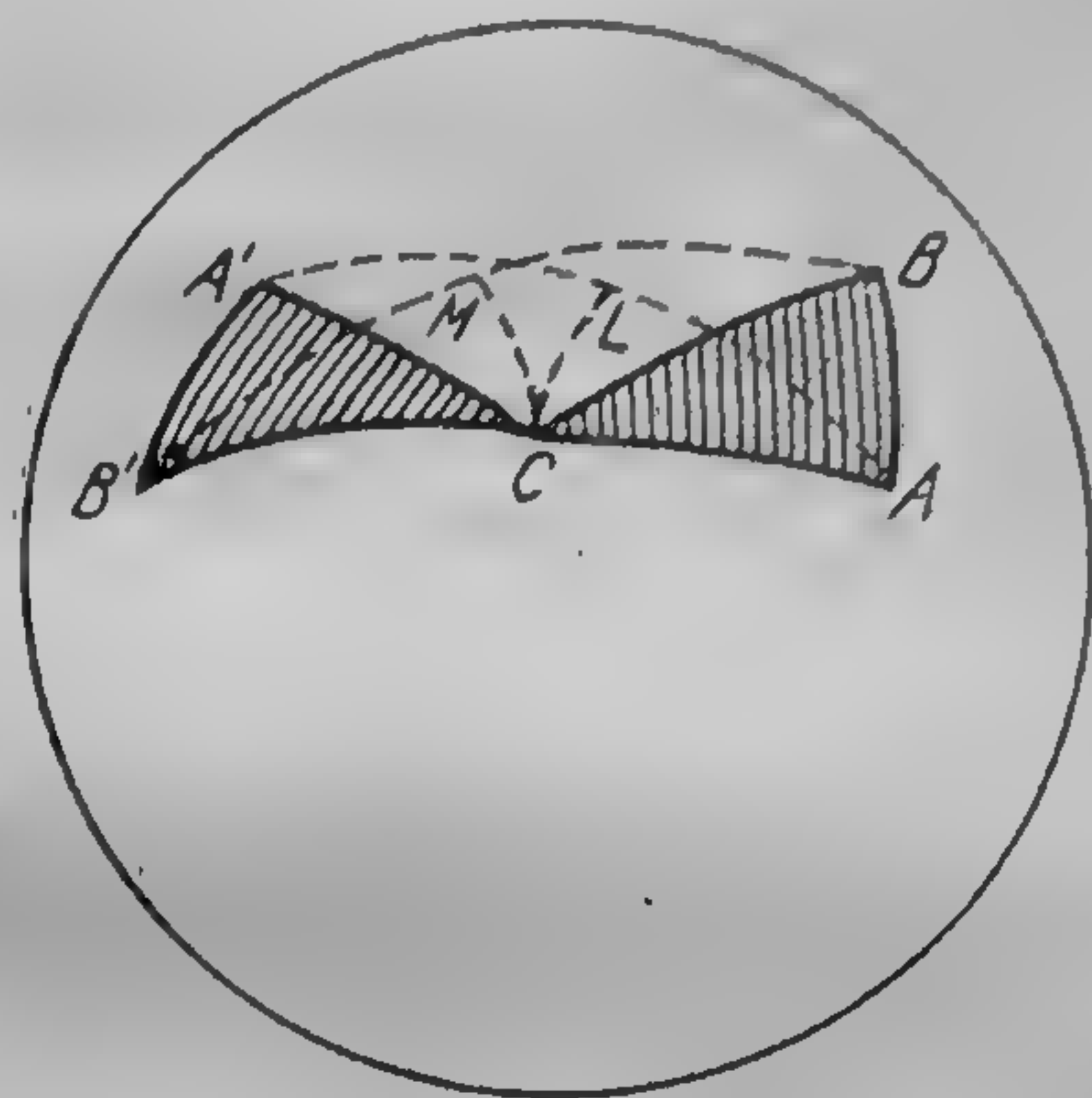


Fig. 199.

ca arcul  $\widehat{AB}$  să se suprapună pe arcul  $\widehat{A'B'}$ . De aici rezultă că putem muta solidul din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a, fixînd în corp, afară de punctul  $O$ , și punctul  $C$ , și, deci rotind corpul în jurul axei  $OC$ . În acest fel, ajungem la teorema lui d'Alembert:

*Orice solid, care are un punct fix, poate fi deplasat dintr-o poziție în alta, printr-o rotație în jurul unei axe care trece prin punctul fix. Să numim această axă, axă de rotație echivalentă.*

Observăm că am fi putut face ca triunghiul  $CAB$  să coincidă cu triunghiul  $CA'B'$  și prin rotația în jurul punctului  $C$  în sens opus; vom alege totdeauna cel mai mic unghi ca unghi de rotație, deoarece mai departe vom fi nevoiți să operăm numai cu unghiuri de rotație infinit mici. În ce privește semnul sensului de rotație, considerînd pe axa de rotație una dintre cele două direcții de rotație  $OC$  și  $OC'$  ca pozitivă, vom considera că rotația este pozitivă, dacă ea se produce pentru observatorul situat de-a lungul sensului pozitiv al axei, în sens opus acelor unui ceasornic și negativă, în caz contrar.



Evident, că o astfel de deplasare a solidului din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a, printr-o rotație în jurul unei axe oarecare, nu reprezintă în general deplasarea reală a corpului, dar, ca și în cazul problemei plane, vom reproduce cu atât mai exact deplasarea reală, cu cât poziția a  $II$ -a a solidului va fi mai apropiată de poziția  $I$ . Dacă poziția a  $II$ -a a solidului va fi infinit apropiată de poziția  $I$ , corpul trecând de la poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a, într-un timp infinit mic, atunci la limită vom obține o axă în jurul căreia solidul rotindu-se cu un unghi infinit mic va efectua o deplasare foarte apropiată de deplasarea reală infinit mică a solidului. Această axă se numește *axa instantanee de rotație*. De aici, ajungem la următoarea definiție:

*Se numește axă instantanee de rotație a solidului la un moment dat poziția limită a axei de rotație, în jurul căreia se deplasează solidul dintr-o poziție în alta, într-un interval de timp infinit mic.*

Din această definiție a axei instantanee de rotație, ținând seamă de proprietățile centrului instantaneu de rotație definit mai înainte (§ 81 și 82), concludem că punctele axei instantanee de rotație nu pot avea viteze. De aceea se mai poate da axei instantanee de rotație, următoarea definiție:

*Se numește axa instantanee de rotație a unui solid, dreapta care trece prin punctul fix al solidului, punctele ei având viteză egală cu zero în momentul considerat.*

Să examinăm acum o deplasare oarecare finită a solidului cu punct fix. Să împărțim această deplasare într-o serie de deplasări infinit mici și să construim pentru fiecare din aceste deplasări, câte o axă instantanee de rotație. *Locul geometric al axelor instantanee de rotație va reprezenta în spațiu o suprafață oarecare conică, care poartă numele de axoidă fixă.* Această suprafață conică are vârful în punctul fix al solidului și intersectează sfera fixă indicată mai înainte, după o curbă sferică ( $\Gamma$ ).

Să ne închipuim că notăm pozițiile succesive ale axelor instantanee de rotație și în corp. Pentru a ne imagina mai bine cum se petrece aceasta, vom recurge la următoarea imagine sugestivă. Fie  $OC$  axa instantanee de rotație a solidului, determinată pentru prima deplasare infinit mică a solidului. Să străpungem solidul cu o bară dreaptă de grosime neglijabilă ce coincide cu axa  $OC$ , și să rotim solidul în jurul acestei bare, cu un unghi infinit mic, astfel încât solidul să ocupe poziția a  $II$ -a, considerată infinit apropiată de poziția inițială; scoatem apoi din solid această bară și ca urmare, în corp rămâne un canal infinit



de îngust care trece prin punctul fix  $O$ . Mai departe vom roti solidul în jurul unei alte poziții infinit apropiate  $OC_1$ , a axei instantanee de rotație; pentru aceasta, vom străpunge corpul cu o bară, în lungul lui  $OC_1$  și vom roti solidul în jurul acestei bare cu un unghi infinit mic, astfel încât corpul să ocupe poziția a  $III$ -a considerată infinit apropiată de poziția a  $II$ -a. Evident, că prin această a doua rotație, canalul din solid format de axa  $OC$ , se va deplasa în spațiu față de dreapta  $OC$  care reprezintă poziția inițială a axei de rotație în spațiu. Scoatem apoi din solid această bară și va rezulta un al doilea canal în corp, infinit de îngust, care trece și el de asemenea prin punctul fix  $O$ . Mai departe, rotind solidul în jurul următoarei poziții infinit de apropiată a axei instantanee de rotație, vom străpunge corpul de-a lungul lui  $OC_2$  cu o bară și rotim corpul în jurul acestei bare cu un unghi infinit mic, astfel încât corpul să ocupe a  $IV$ -a poziție considerată, infinit de apropiată de poziția a  $III$ -a. Evident, că la această a treia rotație, canalul din corp format de axa  $OC_1$  se va deplasa față de dreapta fixă în spațiu  $OC_1$ , care reprezintă a  $II$ -a poziție a axei de rotație în spațiu, și primul canal în corp se va deplasa față de dreapta fixă în spațiu  $OC$ . Scoatem după aceea din corp aceea bară infinit de subțire, în urma căreia va rămâne în solid un al treilea canal infinit de îngust care trece prin punctul fix  $O$ , și așa mai departe. Dacă dimensiunile solidului sînt astfel încât axele instantanee nu întretaie corpul, atunci putem totdeauna să ne imaginăm dimensiunile solidului într-atîta mărite, încît axele să treacă prin solid. Continuînd aceste raționamente, vedem că locul geometric al canalelor din interiorul solidului, care reprezintă locul geometric al axelor instantanee de rotație, față de solid, reprezintă de asemenea o suprafață conică cu vîrful în punctul fix  $O$  al solidului. Prin urmare, *locul geometric al axelor instantanee de rotație, în solid, reprezintă o suprafață conică care se numește axoidă mobilă.*

Să ne imaginăm că sfera fixă, amintită mai înainte, pe care se află curba sferică  $(\Gamma)$ , este învăluită de o sferă mobilă fixată rigid de figura sferică mobilă limitată de conturul  $(\gamma)$ . Evident, că această sferă mobilă va fi solidar legată și de solid și aluncarea ei pe sfera fixă va determina mișcarea solidului. Această sferă mobilă, care învălule sfera fixă și alunecă pe ea, este perfect analogă cu planul mobil care alunecă pentru planul fix (§ 81). Locul geometric al axelor instantanee de rotație din solid, adică axoida mobilă, întretaie această sferă mobilă după



o curbă sferică oarecare ( $\Gamma'$ ). Aceste curbe sferice ( $\Gamma$ ) și ( $\Gamma'$ ) sînt perfect analoge cu baza și ruleta din problema plană.

Nu este greu de dovedit că determinînd curba ( $\Gamma$ ), adică urmele axelor instantanee de rotație pe suprafața sferei fixe, și unghiurile infinit mici de rotație ale solidului rigid, se pot găsi urmele axelor instantanee de rotație pe sfera mobilă, adică curba ( $\Gamma'$ ). Nu vom da aici aceste raționamente, deoarece acestea sînt

analoge cu raționamentele făcute în § 81, la fig. 178, cu singura deosebire că pretutindeni, în locul dreptelor, va trebui să considerăm arcele cercurilor mari. Ca și în § 81, va rezulta din acest raționament că prin rotația solidului în jurul unui punct fix, curba ( $\Gamma'$ ) se va rostogoli fără alunecare peste curba ( $\Gamma$ ). Deoarece aceste curbe sînt urmele axoidei mobile și ale celei fixe, care au vîrfurile comune în punctul fix al corpului, rezultă de aici următoarea teoremă:

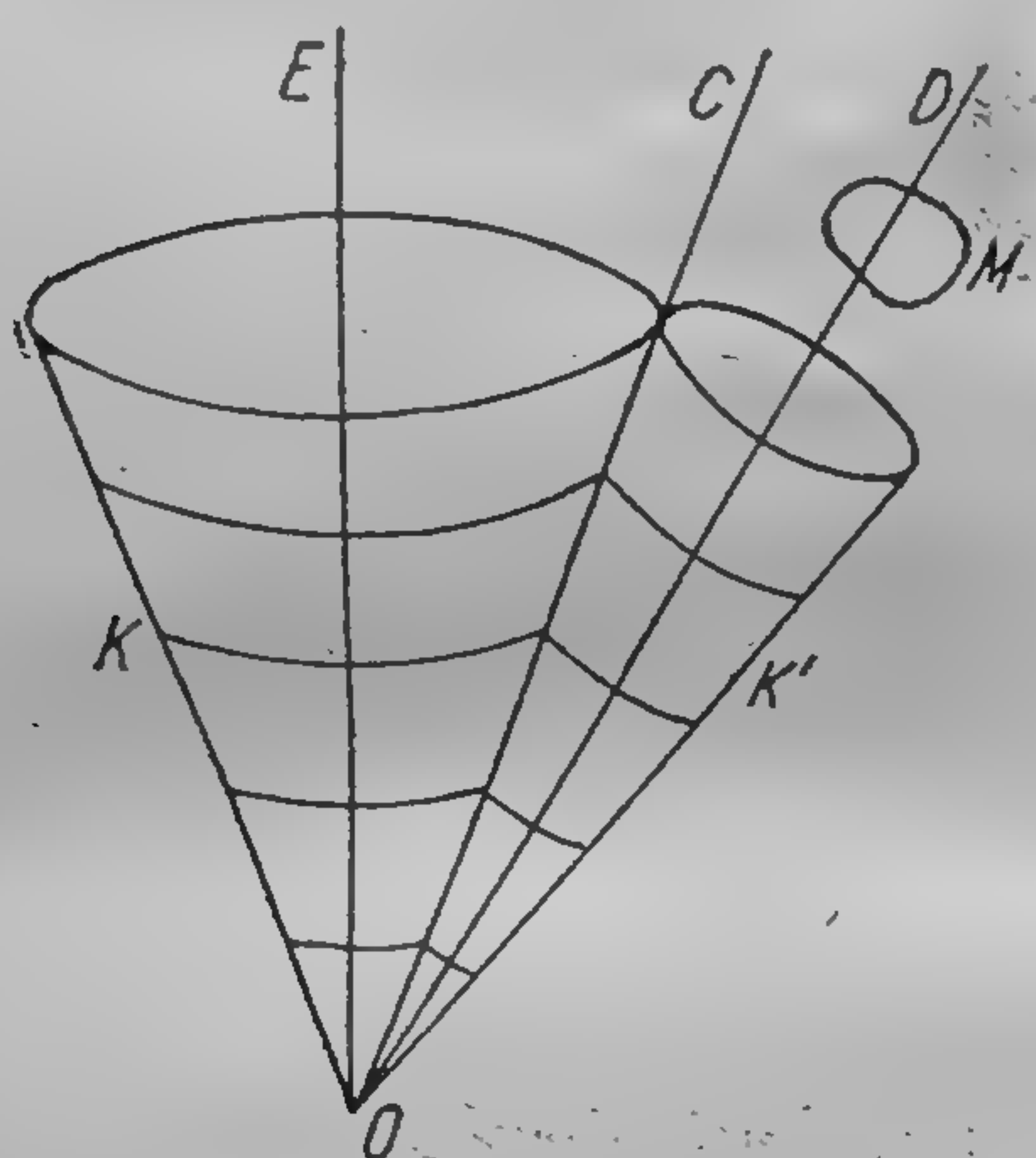


Fig. 200.

*Mișcarea solidului cu un punct fix, poate fi reprezentată*

*ca o rostogolire fără alunecare a unei axoide mobile peste una fixă. Generatoarea de-a lungul căreia la un moment dat sînt tangente ambele axoide, este pentru acel moment, axa instantanee de rotație a solidului.*

Ca și pentru mișcarea plană, vom sublinia că folosind axoidele, în cazul unei viteze arbitrare de rostogolire a axoidei mobile peste cea fixă, vom reproduce mișcarea solidului, numai geometric; pentru a reproduce mișcarea și mecanic, trebuie să rostogolim axoida mobilă peste cea fixă, astfel ca în orice moment să fie realizată o viteză de rostogolire, care să producă viteza mișcării reale.

Dacă ambele axoide sînt conuri circulare drepte, în acest caz mișcarea solidului se numește mișcare de precesie. În fig. 200 sînt reprezentate axoidele unei astfel de mișcări. Conul  $K$ , este axoida fixă, conul  $K'$  este axoida mobilă,  $M$  este solidul rigid. În fig. 200 este reprezentat cazul cînd punctul fix  $O$  nu se află în interiorul, ci în afara corpului  $M$ . Axa instantanee de



rotație se găsește pe generatora comună  $OC$ . Conul  $K$  este locul geometric al axelor instantanee în spațiu, iar conul  $K'$  este locul geometric al axelor instantanee de rotație în solid. Pentru a obține sfera fixă și sfera mobilă care o înfășoară, amintite mai sus, este suficient să se descrie în jurul punctului  $O$ , o suprafață sferică cu o astfel de rază, încât ea să întretaie solidul  $M$ ; la intersecția acestei suprafețe sferice cu solidul, vom obține figura sferică mărginită de conturul  $(\gamma)$ . Deoarece conurile circulare drepte cu vîrfurile în centrul sferei, intersectează suprafețele sferelor după cercuri, curbile  $(\Gamma)$  și  $(\Gamma')$ , în cazul considerat, sînt cercuri. Nu este greu de reprezentat mișcarea solidului  $M$  în acest caz; solidul  $M$  se va roti în jurul axei  $OD$  a conului  $K'$ ; iar axa  $OD$  se va roti în jurul axei  $OE$  a conului  $K$ , descriind un con circular drept, al cărui unghi la vîrf este egal cu dublul unghiului  $DOE$ . O astfel de mișcare o are pămîntul nostru, dacă se face abstracție de mișcarea lui în jurul soarelui; anume, pămîntul se rotește în jurul axei sale, în 24 ore siderale, iar axa pămîntului descrie conul în aproximativ 26 000 de ani. Acest fenomen a fost descoperit de astronomul grec Hipparc, cu aproape 2 080 de ani în urmă; urmarea acestui fenomen este avansul echinoxurilor sau *precesia*; de aceea, această mișcare a solidului a căpătat denumirea de mișcare de *precesie*.

§ 87. Studiul analitic al rotației solidului rigid în jurul unui punct fix. Viteză. Studiul analitic al rotației unui solid rigid în jurul unui punct fix nu prezintă nici un fel de dificultăți și se bazează complet pe deducțiile făcute în § 77—79. Fie un solid rigid care are un punct fix  $O$ . Să considerăm un sistem fix de axe de coordonate  $Ox_1y_1z_1$ , cu originea în punctul fix  $O$ , și un sistem mobil de axe de coordonate  $Oxyz$ , cu originea tot în punctul fix  $O$ , sistem invariabil legat de solidul mobil. Ca și în § 77—79, în loc să deducem separat vitezele și accelerațiile punctelor solidului rigid mai întîi pentru sistemul de axe fixe și apoi pentru sistemul de axe mobile, vom deduce înainte de toate expresiile vectoriale pentru vitezele și accelerațiile punctelor solidului, din care apoi se pot obține proiecțiile vitezei sau ale accelerației, pentru oricare sistem de axe de coordonate. În acest paragraf, ne vom ocupa cu determinarea vitezelor punctelor unui solid rigid cu un punct fix.

Să examinăm două poziții extrem de apropiate ale solidului rigid cu punct fix, corespunzătoare momentelor  $t$  și  $t + \Delta t$  și fie  $D$  dreapta în jurul căreia trebuie rotit solidul, cu un unghi infinit mic  $\Delta\theta$ , pentru a muta acest solid din poziția corespunzătoare



toare momentului  $t$  în poziția corespunzătoare momentului  $t + \Delta t$ ; atunci raportul  $\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$  va reprezenta viteza unghiulară medie a corpului în această rotație. Vom face ca intervalul de timp  $\Delta t$  să tindă către zero. Unghiul de rotație, va tinde în acest caz și el către zero, iar dreapta  $D$  va tinde către poziția sa limită, care este axa instantanee de rotație în momentul  $t$ . Valoarea limită a raportului  $\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$  se numește viteza unghiulară instantanee sau, mai frecvent, viteza unghiulară  $\omega$  a solidului rigid cu punct fix, în momentul  $t$ , așa că vom avea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right). \quad (20.1)$$

Este necesar să se aibă în vedere că formula (20.1) diferă în esență de formula (18.1). În adevăr, atunci când datorită imobilității axei de rotație există un unghi finit  $\Theta$  de rotație a corpului, care este în funcție de timpul  $t$ , astfel încât în formula (18.1) cantitatea  $d\Theta$  este diferențiala acestei funcții, în formula (20.1) mărimea  $\Delta \theta$  nu reprezintă creșterea funcției  $\Theta$ , care din cauza variației continue a poziției axei de rotație nici nu există, ci reprezintă unghiul mic de rotație a corpului, în jurul dreptei  $D$  de mai sus, într-un interval de timp  $\Delta t$ . Deși partea dreaptă a formulei (20.1) se reprezintă uneori prin  $\frac{d\theta}{dt}$  trebuie să se rețină totodată că  $\frac{d}{dt}$  nu este semnul derivatei, și  $d\theta$  nu reprezintă diferențiala unei funcții, ci un unghi de rotație infinit mic la fel cum în termodinamică  $dQ$  reprezintă o cantitate infinit mică de căldură, dar nu diferențiala funcției  $Q$ , care nu există.

Vom reprezenta viteza unghiulară a solidului cu punct fix, prin vectorul  $\omega$ , cum s-a arătat în § 77. Fie  $A$  un punct oarecare al solidului rigid. Notăm vectorul de poziție  $\overline{OA}$  al punctului  $A$  prin  $\vec{r}$ , vectorii unitari pe axele fixe de coordonate  $Ox_1y_1z_1$  prin  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ , vectorii unitari pe axele mobile de coordonate  $Oxyz$  prin  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; coordonatele punctului  $A$  în raport cu axele fixe de coordonate prin  $(x_1, y_1, z_1)$  și coordonatele punctului  $A$  în raport cu axele mobile de coordonate, prin  $(x, y, z)$ . Deoarece modulul  $r$  al vectorului  $\vec{r}$  este constant, rezultă că întreaga mișcare a punctului  $A$  se determină numai prin schimbarea direcției vectorului  $\vec{r}$ . Dacă în momentul considerat, dreapta  $\Delta$  este axa



instantanee de rotație a solidului, și  $\vec{\omega}$  vectorul viteză unghiulară, atunci, evident că viteza  $\vec{v}$  a punctului  $A$ , se poate calcula în baza raționamentelor din § 77, astfel, și aici se poate aplica formula (18.5) și vom obține pentru viteza  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  a punctului  $A$ , expresia:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (20.2)$$

Deosebirea dintre formula (20.2) și formula (18.5) constă numai în faptul că în (18.5) putea varia cu timpul numai modulul vectorului  $\vec{\omega}$ , direcția vectorului  $\vec{\omega}$  rămânând neschimbată, în timp ce în formula (20.2) vectorul  $\vec{\omega}$  poate varia și ca mărime și ca direcție. La fel ca și în § 77, din formula (20.2) rezultă că:

*Viteza unui punct al unui solid cu punct fix este egală cu produsul vectorial dintre vectorul viteză unghiulară instantanee de rotație a solidului și vectorul de poziție al acestui punct, dacă originea sistemelor de coordonate se alege în punctul fix.*

De aici, ca și în § 77, rezultă că:

*Viteza unui punct, al unui solid cu punct fix, este egală cu momentul vectorului viteză unghiulară în raport cu acest punct.*

Nu este greu de trecut de la formula vectorială (20.2) la formulele analitice, atât pentru sistemul axelor mobile cât și pentru cel al axelor fixe de coordonate. Pentru aceasta considerăm:

$$\vec{v} = \vec{i}_1 v_{x_1} + \vec{j}_1 v_{y_1} + \vec{k}_1 v_{z_1} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z,$$

$$\vec{\omega} = \vec{i}_1 \omega_{x_1} + \vec{j}_1 \omega_{y_1} + \vec{k}_1 \omega_{z_1} = \vec{i} \omega_x + \vec{j} \omega_y + \vec{k} \omega_z,$$

$$\vec{r} = \vec{i}_1 x_1 + \vec{j}_1 y_1 + \vec{k}_1 z_1 = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z.$$

Trebuie subliniat aici următoarele. Vectorii unitari  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ , măsurați pe axele fixe de coordonate, vor fi constanți ca modul, direcție și sens, și de aceea, derivatele lor în raport cu timpul vor fi egale cu zero. Nu tot așa va fi situația cu vectorii unitari  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ; modulele acestor vectori sînt constante și egale cu unitatea, dar direcțiile acestor vectori variază, deoarece ei sînt situați de-a lungul axelor mobile de coordonate  $Ox, Oy, Oz$ , care se mișcă împreună cu solidul; de aceea, derivatele acestor vectori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , în raport cu timpul nu vor fi egale cu zero. Mai departe, coordonatele  $(x_1, y_1, z_1)$  ale punctului  $A$  vor fi funcții de timp, deoarece în timpul mișcării solidului, punctul  $A$  se deplasează în raport cu axele fixe de coordonate  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ , coordonatele însă



$(x, y, z)$  ale punctului  $A$  vor fi constante, deoarece axele mobile de coordonate  $Oxyz$  se deplasează împreună cu solidul, punctul  $A$  aparține solidului, și, de aceea, poziția punctului  $A$  în raport cu axele de coordonate mobile  $Oxyz$ , nu va varia.

Din formula (20.2) avem:

$$\bar{i}_1 v_{x_1} + \bar{j}_1 v_{y_1} + \bar{k}_1 v_{z_1} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix};$$

Comparînd între ei coeficienții lui  $\bar{i}_1$ ,  $\bar{j}_1$  și  $\bar{k}_1$  în partea dreaptă și stîngă a acestei relații, vom ajunge la formulele lui Euler:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \\ v_{y_1} &= \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \\ v_{z_1} &= \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Vom găsi punctele solidului la căror viteză să fie în momentul dat egală cu zero; coordonatele  $(x_1, y_1, z_1)$  ale unuia din aceste puncte trebuie să satisfacă ecuațiile (20.3), în care părțile din stînga sînt egale cu zero, adică ecuațiile:

$$0 = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad 0 = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad 0 = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1.$$

Aceste trei ecuații sînt echivalente cu:

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \quad (20.4)$$

Prin urmare, toate punctele care au viteza nulă, se află pe dreapta, reprezentată prin ecuațiile (20.4), care trece prin punctul fix  $O$ . Conform definiției date în paragraful precedent, această dreaptă este axa instantanee de rotație. Astfel, ecuațiile (20.4) sînt ecuațiile axei instantanee de rotație în raport cu axele fixe de coordonate. Ecuațiile (20.4) pot fi reprezentate și în felul următor:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\omega_{y_1}}{\omega_{x_1}}, \quad \frac{z_1}{x_1} = \frac{\omega_{z_1}}{\omega_{x_1}}.$$

Deoarece vectorul  $\vec{\omega}$  variază în timp și ca modul și ca sens, atunci părțile din dreapta ultimelor două relații, vor fi funcții oarecare de timp, adică

$$\frac{y_1}{x_1} = f_1(t), \quad \frac{z_1}{x_1} = \varphi_1(t).$$



Eliminînd timpul  $t$ , vom obține o ecuație de forma:

$$F_1\left(\frac{y_1}{x_1}, \frac{z_1}{x_1}\right) = 0 \quad (20.5)$$

Din geometria analitică se știe, că o asemenea ecuație este ecuația unei suprafețe conice; astfel, am obținut ecuația unei suprafețe conice care reprezintă locul axelor instantanee de rotație în spațiu, adică ecuația axoidei fixe.

Trecînd de la formula vectorială (20.2) la relațiile analitice pentru sistemul mobil de axe coordonate, conform celor precedente, vom obține:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\} \quad (20.6)$$

Ecuația axei instantanee de rotație în raport cu axele mobile de coordonate, va avea forma:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (20.7)$$

De aici, vom avea:

$$\frac{y}{z} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = f(t), \quad \frac{z}{x} = \frac{\omega_z}{\omega_x} = \varphi(t),$$

și eliminînd timpul  $t$ , vom obține ecuația axoidei mobile sub forma:

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0. \quad (20.8)$$

Observăm că pentru axa instantanee de rotație se pot face aceleași raționamente, ca și pentru centrul instantaneu de rotație. Cu toate că vitezele punctelor axei instantanee în momentul cercetat sînt egale cu zero, nu putem concluda de aici că această axă este fixă; se poate doar confirma că deplasarea ei într-un interval de timp infinit mic, este un infinit mic de ordinul întâi, în comparație cu deplasările celorlalte drepte ale solidului care trec prin punctul fix.

**§ 88. Studiul analitic al rotației unui solid în jurul unui punct fix. Accelerația.** Pentru a găsi vectorul accelerație  $\vec{a}$ , al punctelor unui solid cu un punct fix, este suficient să derivăm în raport cu timpul expresia din formula (20.2). Vom avea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \vec{r} + \omega \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Deoarece derivata  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  reprezintă vectorul viteză  $\vec{v}$  al punctului  $A$ , care se determină din formula (20.2), vom obține:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r});$$

de aici, ținând seamă de formula (18.12), vom găsi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}. \quad (20.9)$$

Formula (20.9) diferă de formula (18.13) numai prin faptul că în formula (18.13) vectorul  $\vec{\omega}$  poate varia numai ca modul, în timp ce în formula (20.9) vectorul  $\vec{\omega}$  poate varia și ca modul și ca direcție.

Pentru a trece de la forma vectorială (20.9) a expresiei accelerației  $\vec{a}$  la expresiile proiecțiilor accelerației pe axele sistemului fix de coordonate  $Ox_1y_1z_1$ , este suficient să efectuăm toate calculele care au fost făcute în § 79 pentru trecerea de la formula (18.13) la formula (18.14); de aceea, vom obține:

$$\left. \begin{aligned} a_{x_1} &= \frac{d\omega_{y_1}}{dt} z_1 - \frac{d\omega_{z_1}}{dt} y_1 + \omega_{x_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 x_1, \\ a_{y_1} &= \frac{d\omega_{z_1}}{dt} x_1 - \frac{d\omega_{x_1}}{dt} z_1 + \omega_{y_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 y_1, \\ a_{z_1} &= \frac{d\omega_{x_1}}{dt} y_1 - \frac{d\omega_{y_1}}{dt} x_1 + \omega_{z_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 z_1. \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

Pentru a trece de la expresia vectorială (20.9) la expresiile proiecțiilor accelerației pe axele sistemului mobil de coordonate

$Oxyz$ , trebuie să urmărim calculul produsului vectorial  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ .

În § 83 am întâlnit un sistem mobil de axe de coordonate  $Ax_1y_1$ , la care însă axa  $Az$  rămânea paralelă la axa  $Oz_1$  a sistemului fix al axelor de coordonate. Deoarece vectorul  $\vec{\omega}$ , în cazul examinat în § 83 a fost tot timpul paralel la axa  $Az$  și deci și la axa  $Oz_1$ , atunci aveam  $\vec{\omega} = k_1 \omega$  și  $\omega = \bar{k} \omega$ , iar vectorul  $\bar{k}$  fiind egal cu vectorul  $k_1$ , rămânea constant și ca modul și ca direcție, adică  $\frac{d\bar{k}}{dt} = 0$  și, în acest fel, am avut:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \bar{k}_1 \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \bar{k} \frac{d\omega}{dt}.$$



Prin urmare, în §. 83 am avut cazul când derivata în raport cu timpul  $a$  al vectorului  $\bar{\omega}$  avea una și aceeași expresie, atât pentru axele  $Axy$ , cât și pentru axele  $Ox_1y_1$ . Dar, în cazul care se studiază în paragraful de față, toate cele trei axe ale sistemului mobil al axelor de coordonate  $Oxyz$ , schimbă direcția lor în spațiu; și toți cei trei vectori unitari  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , ai acestor axe mobile, vor fi funcții de timp. De aceea, pornind de la relația:

$$\bar{\omega} = \bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z,$$

vom obține:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{i} \frac{d\omega_x}{dt} + \bar{j} \frac{d\omega_y}{dt} + \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt} + \frac{d\bar{i}}{dt} \omega_x + \frac{d\bar{j}}{dt} \omega_y + \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_z.$$

Să calculăm derivatele  $\frac{d\bar{i}}{dt}$ ,  $\frac{d\bar{j}}{dt}$  și  $\frac{d\bar{k}}{dt}$ . Aceste derivate reprezintă vitezele extremităților vectorilor unitari  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , dirijați respectiv pe axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , și care participă la mișcarea generală a solidului. Prin urmare, pentru calculul acestor derivate se poate aplica formula (20.2), înlocuind în ea succesiv:  $\bar{r} = \bar{i}$ ,  $\bar{r} = \bar{j}$ ,  $\bar{r} = \bar{k}$ ; vom avea:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \quad (20.11)$$

De aici găsim:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} \omega_x + \frac{d\bar{j}}{dt} \omega_y + \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_z = (\bar{\omega} \times \bar{i}) \omega_x + (\bar{\omega} \times \bar{j}) \omega_y + (\bar{\omega} \times \bar{k}) \omega_z,$$

dar în baza proprietăților produsului vectorial, partea din dreapta a acestei relații se poate reprezenta sub forma:

$$(\bar{\omega} \times \bar{i}) \omega_x + (\bar{\omega} \times \bar{j}) \omega_y + (\bar{\omega} \times \bar{k}) \omega_z = \bar{\omega} \times (\bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z).$$

Deoarece  $\bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z = \bar{\omega}$ , vom obține:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} \omega_x + \frac{d\bar{j}}{dt} \omega_y + \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_z = \bar{\omega} \times \bar{\omega} = 0.$$

În acest fel, expresia derivatei  $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$  pentru axele mobile ale solidului, în cazul general, capătă aceeași formă, ca și pentru axele fixe, și anume:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{i} \frac{d\omega_x}{dt} + \bar{j} \frac{d\omega_y}{dt} + \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (20.12)$$



În același fel, coeficienții vectorilor unitari  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  și  $\bar{k}$  în derivata  $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$  sînt determinați, și pentru proiecțiile accelerației  $\bar{a}$  pe axele mobile  $Oxyz$  a coordonatelor, conform celor precedente, vom obține ușor:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ a_y &= \frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ a_z &= \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

§ 89. Exemple. 67. Să se găsească unghiul format de axa de rotație a unui solid care se află în mișcare de precesie, și axa instantanee, dacă perioada de precesie este de  $n$  ori mai mare decât perioada de rotație a solidului în jurul axei sale și unghiul de precesie, adică unghiul  $DOE$  (fig. 201), este egal cu  $\alpha$ . Construim conurile circulare drepte  $K$  și  $K'$  arătate în § 86, și fie  $OC$  generatoarea comună care reprezintă pentru momentul considerat, axa instantanee de rotație. Deoarece, potrivit enunțului problemei, știm că lungimea cercului  $(\Gamma)$  cu raza egală cu  $R_2$  a conului  $K$  trebuie să fie de  $n$  ori mai mare decât lungimea cercului  $(\Gamma')$  cu raza egală cu  $R_1$ , a conului  $K'$ , avem  $R_2 = nR_1$ . Mai departe vom avea:

$$\sin \alpha_2 = \frac{R_2}{OC}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{R_1}{OC},$$

adică

$$\sin \alpha_2 = n \sin \alpha_1.$$

Deoarece  $\angle DOE = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ , urmează:  
 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ ; de aici găsim:

$$\sin (\alpha - \alpha_1) = n \sin \alpha_1,$$

sau

$$\sin \alpha \cos \alpha_1 - \cos \alpha \sin \alpha_1 = n \sin \alpha_1.$$

Determinînd din această ecuație unghiul  $\alpha_1$ , vom avea succesiv:

$$\sin \alpha \cos \alpha_1 = (n + \cos \alpha) \sin \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \alpha}{n + \cos \alpha}.$$

Deoarece pămîntul efectuează rotația în jurul axei sale într-o zi solară, iar perioada precesiei sale este aproximativ egală cu 26 000 ani, vom avea:

$$n = 365,4 \times 26\,000 = 9\,500\,000.$$

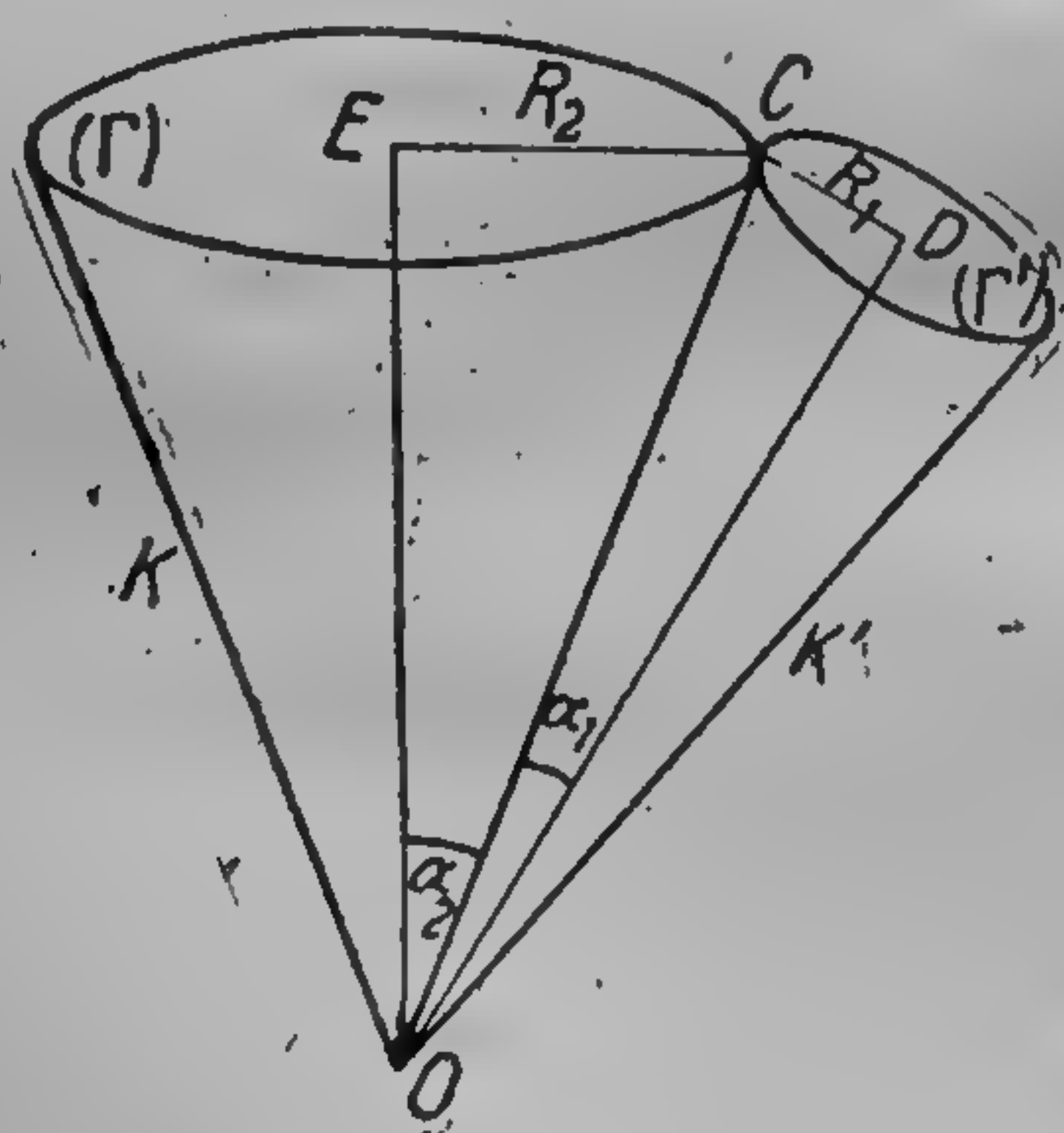


Fig. 201



Deoarece  $\alpha$  este egal cu  $23^\circ 30'$ , vom obține:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin 23^\circ 30'}{9\,500\,000 + \cos 23^\circ 30'}$$

sau  $\alpha_1 \approx 0''{,}01$ , adică axa instantanee de rotație coincide aproape cu axa  $OD$  a pământului.

68. Să se găsească expresia pătratului vitezei unui punct al unui solid cu un punct fix  $O$ , într-un sistem de coordonate legat invariabil de solid. Să luăm sistemul axelor de coordonate ortogonale  $Oxyz$ ; după formulele (20.6), vom obține:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

De aici vom găsi:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2,$$

sau

$$v^2 = \omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (z^2 + x^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) - 2\omega_y \omega_z yz - 2\omega_z \omega_x zx - 2\omega_x \omega_y xy.$$

Presupunând  $\omega_x = p$ ,  $\omega_y = q$ ,  $\omega_z = r$ , vom obține:

$$v^2 = p^2 (y^2 + z^2) + q^2 (z^2 + x^2) + r^2 (x^2 + y^2) - 2qryz - 2rpzx - 2pqxy$$

69. Se consideră un sistem de axe de coordonate mobile  $Oxyz$ , legate invariabil de un solid cu punct fix. Să se găsească relația dintre momentele vitezei unui punct al solidului, în raport cu aceste axe de coordonate și pătratul vitezei acestui punct. Notăm momentele vitezei unui punct al solidului, în raport cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , respectiv prin  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ , avem (§ 13):

$$Q_x = yv_z - zv_y, \quad Q_y = zv_x - xv_z, \quad Q_z = xv_y - yv_x.$$

Ținând seama de formulele (20.6), vom obține:

$$Q_x = y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z zx = \omega_x r^2 - x(\bar{\omega} \cdot \bar{r}).$$

De aici, folosind expresia lui  $v^2$  din problema precedentă, vom avea:

$$Q_x = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{r} \right)}{\partial \omega_x}, \quad Q_y = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{r} \right)}{\partial \omega_y}, \quad Q_z = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{r} \right)}{\partial \omega_z}.$$

Cu notațiile  $p$ ,  $q$ ,  $r$  vom avea:

$$Q_x = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{r} \right)}{\partial p}, \quad Q_y = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{r} \right)}{\partial q}, \quad Q_z = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{r} \right)}{\partial r}.$$



## CAPITOLUL XXI

### COMPUNEREA VITEZELOR UNGHIULARE. REDUCEREA VITEZELOR UNGHIULARE ȘI DE TRANSLAȚIE LA CEL MAI SIMPLU SISTEM

§ 90. Viteza unghiulară ca vector alunecător. În § 77 s-a demonstrat că viteza unghiulară este un vector alunecător; de aici rezultă că asupra vitezelor unghiulare se pot extinde o serie întreagă de teoreme valabile pentru forțe, deoarece și forța este de asemenea un vector alunecător. În § 66 am văzut că viteza liniară a unei mișcări compuse este egală cu suma geometrică a vitezelor liniare componente ale ei. Evident, că la fel ca pentru forțe (§ 3), formula (16.23) se poate extinde asupra unui număr arbitrar de viteze componente, și vom obține:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots = \sum_n \vec{v}_n. \quad (21.1)$$

Fie dat un sistem de viteze unghiulare situate arbitrar. Deoarece conform § 87 viteza liniară a unui punct, rezultată din fiecare viteză unghiulară instantanee este egală cu momentul vitezei unghiulare, în raport cu acest punct, iar conform formulei (21.1), pentru obținerea vitezei componente trebuie să adunăm geometric toate aceste viteze liniare, adică să adunăm geometric momentele tuturor vitezelor unghiulare, concludem de aici că viteza liniară compusă a punctului este egală cu momentul rezultat al vitezelor unghiulare, în raport cu acest punct. Dacă, afară de vitezele unghiulare, mai există și viteza de translație, atunci, pentru obținerea vitezei liniare compuse a punctului, trebuie să se adune geometric momentele vitezelor unghiulare și vectorii viteză de translație. În acest fel, în baza celor expuse, se poate găsi totdeauna viteza liniară a mișcării compuse a punctului, oricare ar fi vitezele mișcărilor componente. Totuși, în multe cazuri, obținerea vitezei mișcării compuse poate fi calculată mai simplu, și din rezultatul obținut se pot trage concluzii generale despre caracterul vitezei mișcării compuse chiar în cazurile cele mai



generale ale sistemelor de viteze. Aceste rezultate se pot obține extinzând la sistemele vitezelor unghiulare, teoria reducerii lor la cele mai simple sisteme, absolut identică cu teoria dezvoltată în statică pentru forțe.

Astfel, vom avea teoreme despre reducerea vitezelor unghiulare concurente, vitezelor unghiulare paralele, vitezelor unghiulare antiparalele, a cuplurilor de viteze unghiulare și așa mai departe. Aceste teoreme am putea să nu le dezvoltăm amănunțit, ci să ne bazăm pe rezultatele obținute pentru sistemele de forțe. Totuși, pentru a lămuri aceste probleme, ne vom opri la aceste teoreme și vom da descrierea aparatelor cu care putem verifica rezultatele teoriei.

**§ 91. Compunerea vitezelor unghiulare concurente.** Dacă axele instantanee de rotație au un punct comun  $O$ , atunci vitezele unghiulare instantanee de rotație în jurul acestor axe se numesc *concurente*, iar punctul  $O$  se numește *punct de concurență*.

Deoarece vitezele unghiulare sînt vectori alunecători, ei pot fi deplasați astfel ca originea lor comună să ajungă în punctul  $O$  și apoi să îi adunăm geometric; în acest fel, avem formula:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \dots = \sum \vec{\omega}_n. \quad (21.2)$$

Acum putem da nu numai o interpretare geometrică formală ci și o interpretare mecanică proiecțiilor  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  ale vitezei unghiulare  $\vec{\omega}$  pe axele de coordonate. Să considerăm aceste proiecții drept componente ale vectorului  $\vec{\omega}$ , așa că vom avea:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z.$$

În acest fel, în loc să calculăm viteza liniară a punctului provenită din viteza unghiulară  $\vec{\omega}$ , putem calcula viteza liniară a punctului, ce apare datorită sistemului celor trei viteze unghiulare concurente:  $\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z$ ; repetînd aceleași raționamente pe care le-am făcut în § 21 la găsirea expresiilor proiecțiilor momentului forței din teorema lui Varignon, putem obține din nou pe această cale, formulele cinematice ale lui Euler.

Nu este greu să ne imaginăm un aparat care ar produce mișcarea unui punct, rezultată din două mișcări de rotație avînd două viteze unghiulare concurente. Să ne imaginăm bara  $OB$ , care se poate roti în jurul axei sale cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_1$  (fig. 202). Pe această bară este fixată o altă bară  $OC$  în jurul căreia se poate roti un disc cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_2$ ; pe disc se



află punctul  $A$ . Dacă vom roti numai bara  $OB$  în jurul axei sale cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$ , punctul  $A$  va căpăta o viteză liniară provenită numai din rotația în jurul acestei bare cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$ . Dacă noi vom roti numai discul în jurul axei  $OC$  cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$ , atunci viteza liniară la punctului  $A$  va fi viteza de rotație în jurul axei  $OC$  cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$ . Vom roti apoi concomitent și bara  $OB$  cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$  și discul cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$ . Punctul  $A$  va căpăta atunci, con-

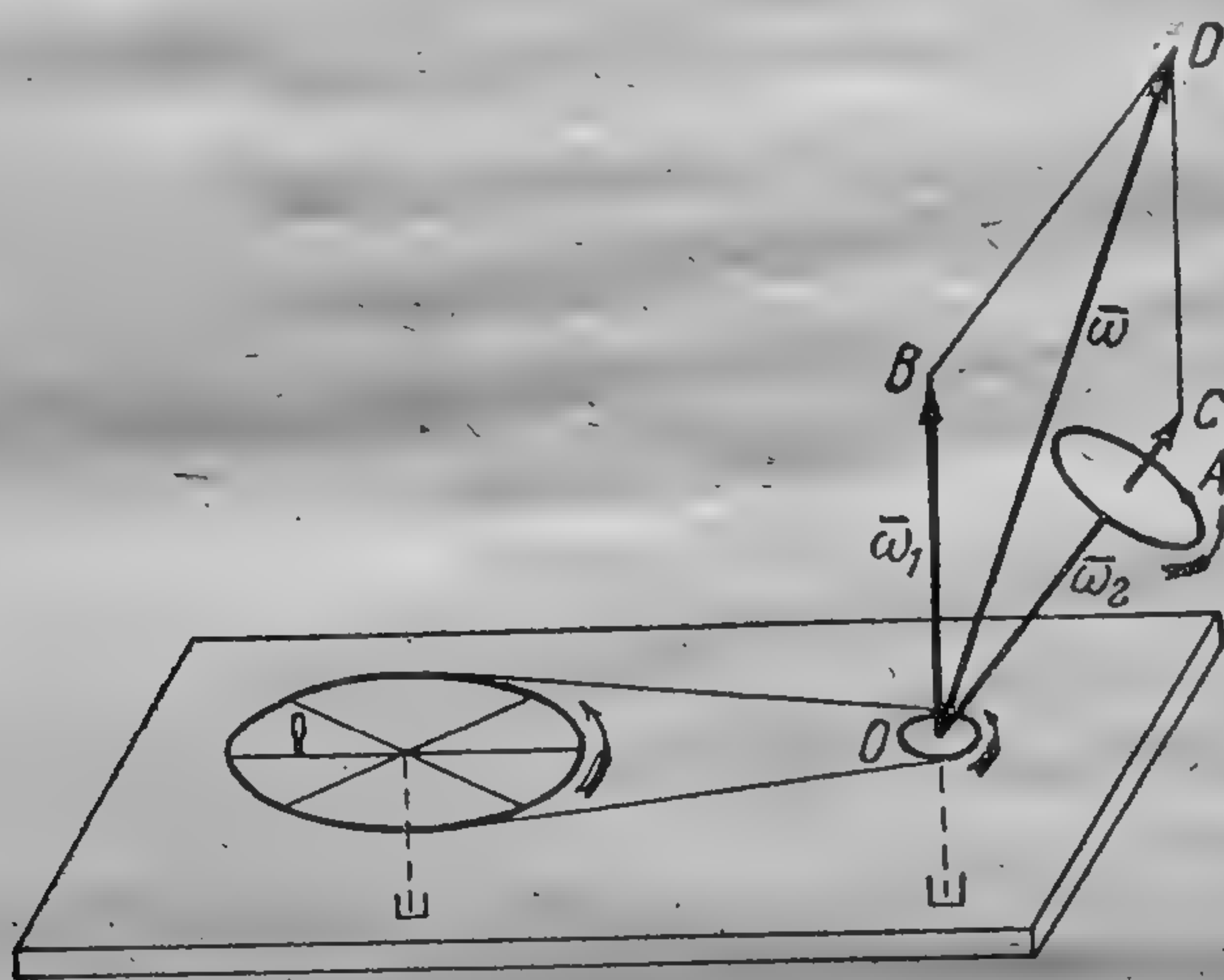


Fig. 202

form celor expuse mai sus, o viteză liniară egală cu cea rezultată din rotirea punctului  $A$  în jurul axei  $OD$ , cu viteza unghiulară  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ . Vom observa că  $OD$  este axa instantanee de rotație, deoarece, dacă, de exemplu, în momentul inițial paralelogramul  $OCDB$ , ar fi așezat în planul desenului, atunci, în momentul următor, el va ieși din planul desenului, depărtându-se cu latura sa  $OC$  de observator. Evident, că locul geometric al axelor instantanee de rotație  $OD$  (cu condiția ca raportul  $\frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1}$  să rămână constant) este un con circular drept, cu axa  $OB$ ; avem aici cazul unei mișcări de precesie cercetată în § 86.

**§ 92. Compunerea vitezelor unghiulare paralele. Cuplu de viteze unghiulare.** Pentru a deduce regula compunerii vitezelor unghiulare de rotație în jurul unor axe paralele, ne vom folosi de



faptul că viteza unghiulară este un vector alunecător. Fie date două viteze unghiulare paralele  $\bar{\omega}_1$  și  $\bar{\omega}_2$  cu originile  $B_1$  și  $B_2$  (fig. 203), și să se găsească viteza liniară rezultantă  $\bar{v}$  a punctu-

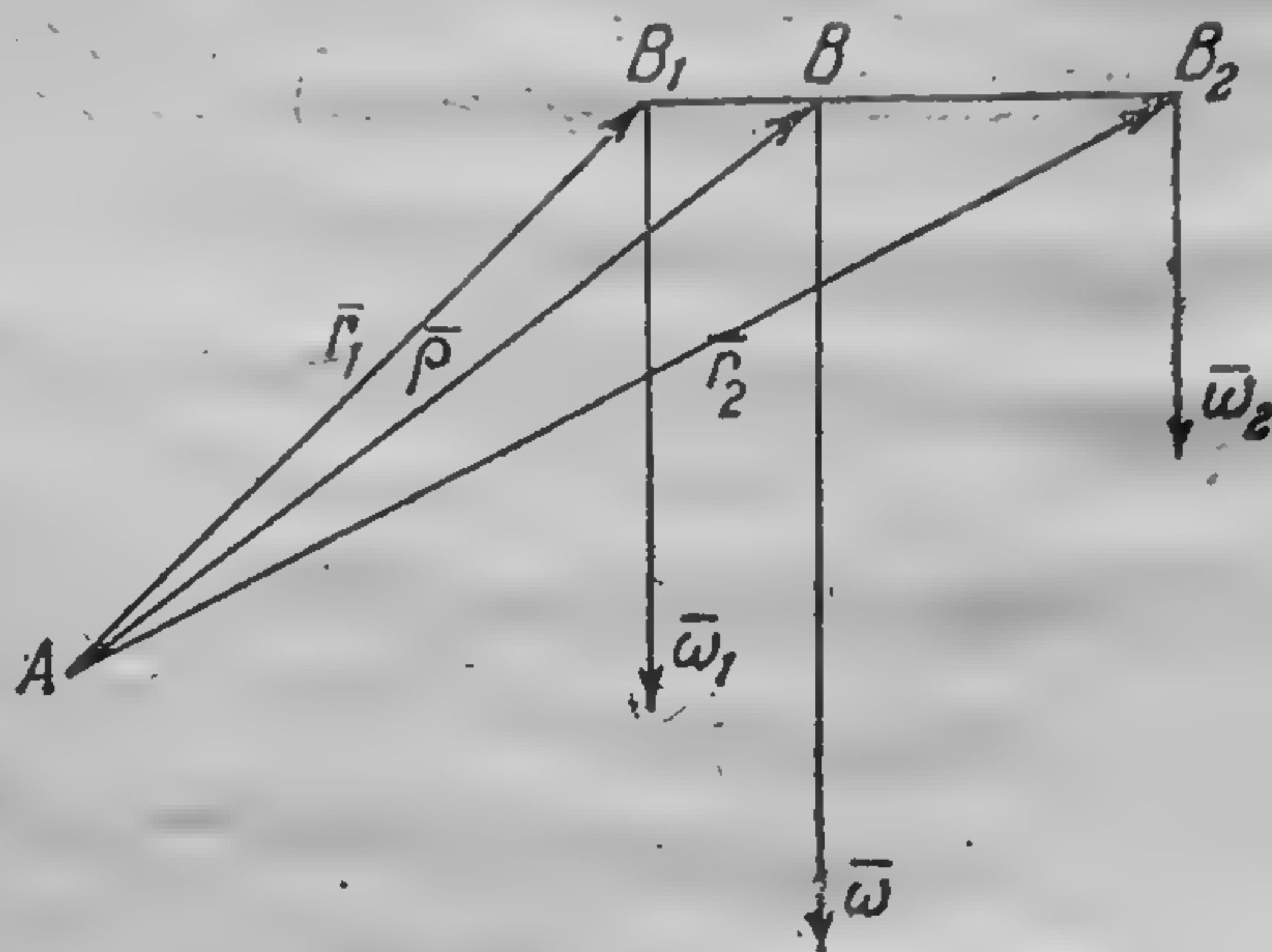


Fig. 203

lui A, datorită mișcărilor de rotație cu aceste viteze unghiulare. Presupunem:

$$\bar{r}_1 = \overline{AB_1}, \quad \bar{r}_2 = \overline{AB_2}.$$

Deoarece viteza liniară a punctului A este egală cu momentul în raport cu punctul A al vitezei unghiulare (§ 77, 87), rezultă:

$$\bar{v}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{\omega}_1, \quad \bar{v}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{\omega}_2,$$

unde  $\bar{v}_1$  și  $\bar{v}_2$  sînt vitezele componente ale punctului A; prin urmare, viteza  $\bar{v}$  a mișcării compuse a punctului A, va fi egală cu:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{r}_1 \times \bar{\omega}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{\omega}_2.$$

Deoarece partea din dreapta este suma momentelor vectorilor paraleli  $\bar{\omega}_1$  și  $\bar{\omega}_2$  în raport cu punctul A, rezultă că i se poate aplica teorema lui Varignon (§ 23) și vom obține:

$$\bar{v} = \bar{\rho} \times \bar{\omega},$$

unde  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$  și  $\bar{\rho} = \frac{\bar{r}_1 \bar{\omega}_1 + \bar{r}_2 \bar{\omega}_2}{\bar{\omega}}$ ;

vectorul  $\bar{\rho}$  este vectorul de poziție al punctului de aplicație B, al vitezei rezultante, determinat prin relația:

$$\frac{B_1 B}{B_2 B} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$



Dacă vor fi date nu două, ci un număr oarecare de viteze unghiulare paralele și antiparalele  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots$ , atunci viteza  $\bar{v}$  a punctului  $A$  va fi egală cu:

$$\bar{v} = \bar{r}_1 \times \bar{\omega}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{\omega}_2 + \bar{r}_3 \times \bar{\omega}_3 + \dots = \sum_n \bar{r}_n \times \bar{\omega}_n.$$

Vom folosi teorema lui Varignon în acest caz general (§ 24); vom obține:

$$\bar{v} = \bar{\rho} \times \bar{\omega},$$

unde

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \dots = \sum_n \bar{\omega}_n, \\ \bar{\rho} &= \frac{\bar{r}_1 \bar{\omega}_1 + \bar{r}_2 \bar{\omega}_2 + \bar{r}_3 \bar{\omega}_3 + \dots}{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \dots} = \frac{\sum_n \bar{r}_n \bar{\omega}_n}{\bar{\omega}} \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

Presupunind:

$$\bar{\rho} = \bar{i}\xi + \bar{j}\eta + \bar{k}\zeta, \quad \bar{r}_n = \bar{i}x_n + \bar{j}y_n + \bar{k}z_n,$$

vom avea:

$$\xi = \frac{\sum_n x_n \bar{\omega}_n}{\bar{\omega}}, \quad \eta = \frac{\sum_n y_n \bar{\omega}_n}{\bar{\omega}}, \quad \zeta = \frac{\sum_n z_n \bar{\omega}_n}{\bar{\omega}} \quad (21.4)$$

Evident, că punctul cu coordonatele  $(\xi, \eta, \zeta)$  este perfect analog cu centrul forțelor paralele, studiat în § 24.

Nu este greu să ne imaginăm un aparat care ar realiza mișcarea unui punct, condiționată de două viteze unghiulare paralele. Să presupunem că avem o bară  $B_1D_1$ , care se poate roti în jurul axei sale cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$ . De ea este fixată bara  $B_1B_2$  iar de aceasta o altă bară  $B_2D_2$  paralelă la bara  $B_1D_1$ . Pe bara  $B_2D_2$  se află un disc care se poate roti în jurul barei  $B_2D_2$  cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$ ; pe disc se află punctul  $A$ . Să presupunem că inițial rotim numai bara  $B_1D_1$  în jurul axei sale cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$ ; punctul  $A$  va căpăta atunci viteza de rotație în jurul barei  $B_1D_1$  provenită de la viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$ . Să presupunem apoi că rotim numai discul cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$ ; atunci punctul  $A$  va căpăta viteza de rotație în jurul barei  $B_2D_2$  provenită de la viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$ . În sfârșit, să presupunem că rotim și bara  $B_1D_1$  și discul respectiv cu vitezele unghiulare  $\bar{\omega}_1$  și  $\bar{\omega}_2$ ; atunci, după cum s-a dovedit mai sus, punctul  $A$  va căpăta o viteză liniară, care ar fi rezultat dacă el



s-ar fi rotit în jurul axei  $BD$  cu viteza unghiulară  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ , și vom avea:

$$\frac{B_1B}{B_2B} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Vom observa că axa  $BD$  este axa instantanee de rotație. Dacă, de exemplu, în momentul inițial, toate cele trei axe  $B_1D_1$ ,  $BD$ ,  $B_2D_2$  sînt situate în planul desenului, atunci, în momentul următor,

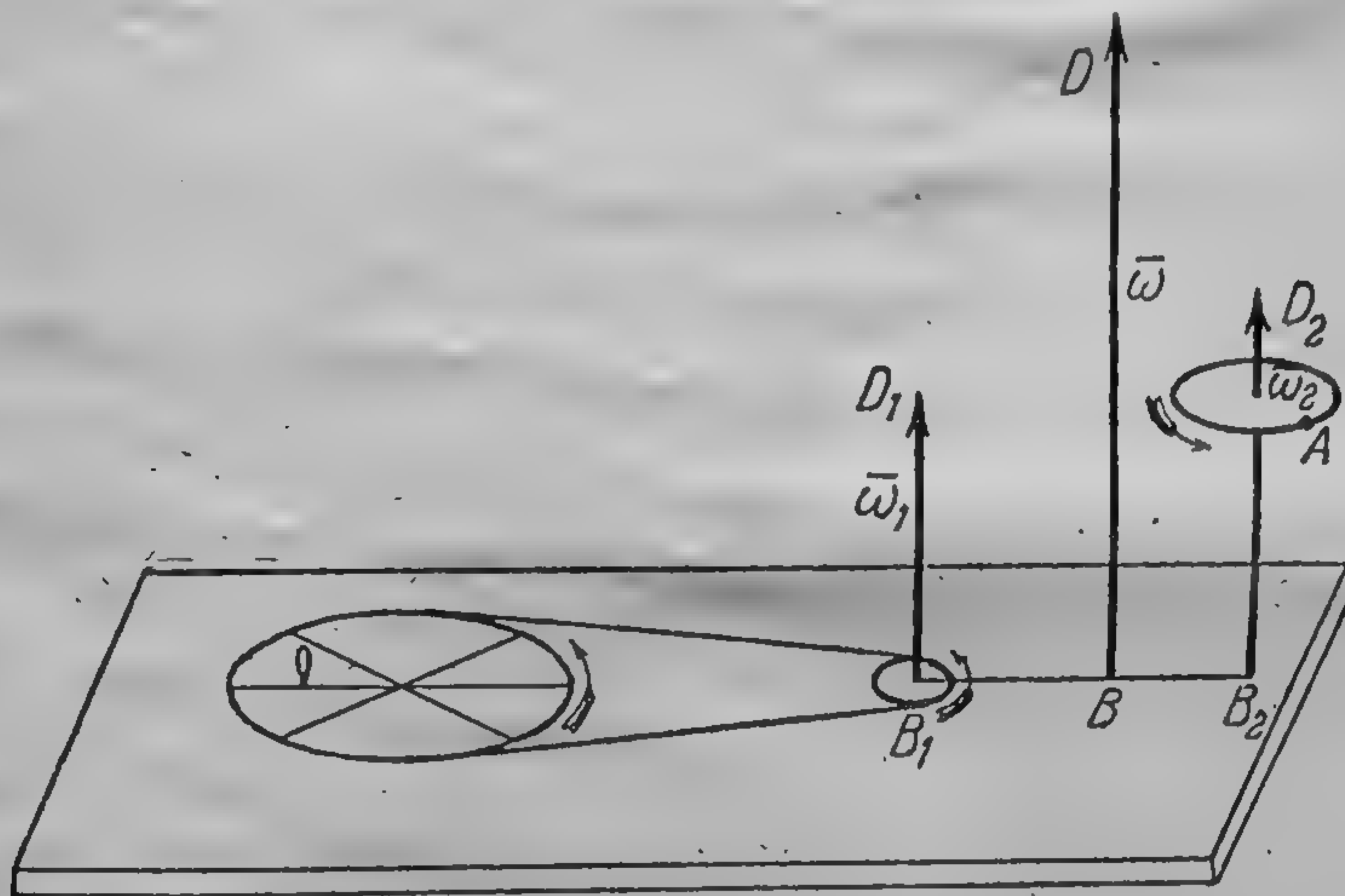


Fig. 204

axa  $BD$  va ieși din planul desenului, îndepărtîndu-se de la observator. Evident, că axa  $BD$  (cu condiția ca raportul  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  să rămînă constant) va descrie un cilindru circular drept, care are dreapta  $B_1D_1$  drept axă geometrică.

Formulele (21.3) și (21.4) încetează a fi aplicabile, dacă:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \dots = \sum_n \bar{\omega}_n = 0,$$

deoarece în acest caz, teorema lui Varignon nu se mai poate aplica. În acest caz, sîntem nevoiți să calculăm separat vitezele componente:

$$\bar{v}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{\omega}_1, \quad \bar{v}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{\omega}_2, \quad \bar{v}_3 = \bar{r}_3 \times \bar{\omega}_3, \dots,$$

și să le adunăm vectorial.

Din cele expuse în § 23 rezultă că, dacă  $\bar{\omega} = \sum_n \bar{\omega}_n = 0$ , viteza

$\bar{v}$  a mișcării compuse a punctului egală cu momentul resultant



al vectorilor paraleli  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \dots$  în raport cu acest punct, trebuie să fie constantă pentru toate punctele din spațiu, adică obținem *mișcarea instantanee de translație* (§ 76). Cazul cel mai simplu, îl reprezintă două viteze unghiulare, egale ca mărime și antiparalele,  $\vec{\omega}$  și  $-\vec{\omega}$  (fig. 205). Vom introduce următoarea definiție:

*Sistemul de două viteze unghiulare, egale ca mărime și antiparalele se numește cuplu de viteze unghiulare.* Prin raționamente elementare, ne vom convinge că în acest caz avem de-a



Fig. 205

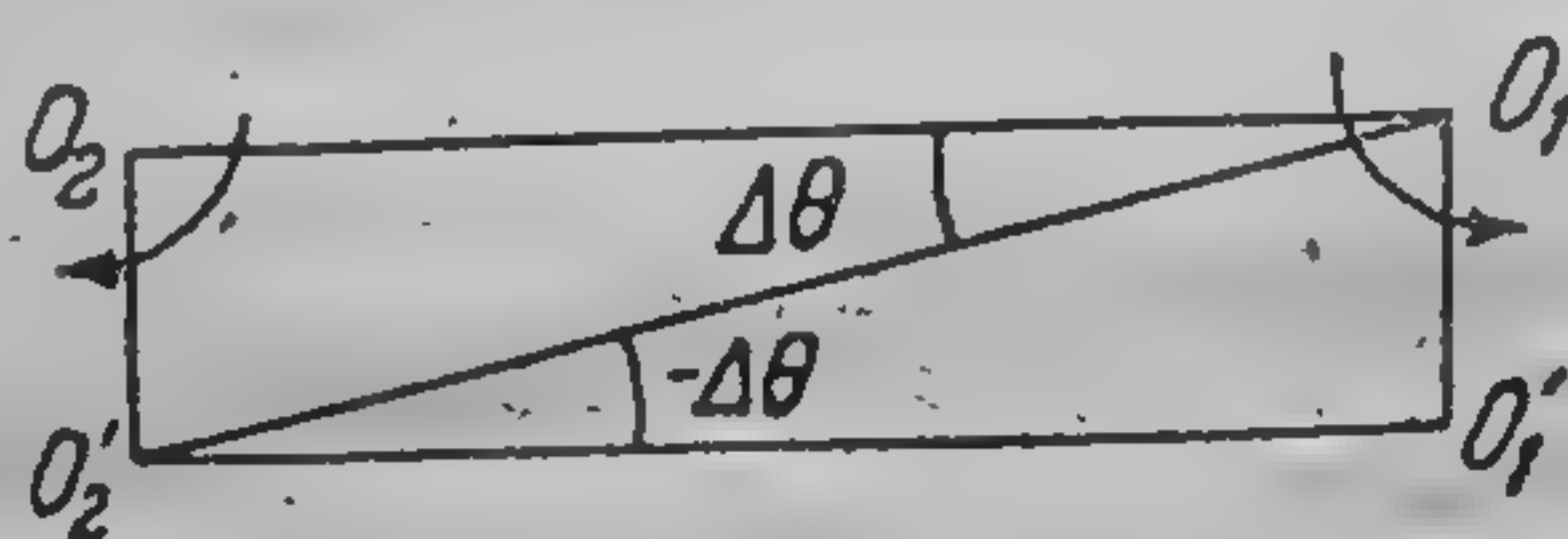


Fig. 206

face cu o mișcare de translație. Să presupunem că vectorii viteză unghiulară  $\vec{\omega}$  și  $-\vec{\omega}$ , sînt perpendiculari pe planul desenului; fie  $O_1$  respectiv  $O_2$  urmele acestor viteze unghiulare pe planul desenului (fig. 206). Într-un interval de timp infinit mic  $\Delta t$ , unghiurile de rotație în jurul acestor axe  $O_1, O_2$  vor fi respectiv egale cu  $\Delta\theta = \omega \Delta t$ ,  $-\Delta\theta = -\omega \Delta t$ . Datorită faptului că unghiurile  $\Delta\theta$  sînt foarte mici deplasările  $O_1O_1'$  și  $O_2O_2'$  ale punctelor  $O_1$  și  $O_2$  pot fi considerate identice cu arcele  $\widehat{O_1O_1'}$  și  $\widehat{O_2O_2'}$  descrise respectiv din punctele  $O_2'$  și  $O_1$  cu razele egale cu  $O_1O_2$  și vom avea  $\widehat{O_1O_1'} = \widehat{O_2O_2'}$ . De aceea, deplasarea dreptei  $O_1O_2$  va fi de translație și va fi egală cu:

$$\Delta s = \widehat{O_1O_1'} = \widehat{O_2O_2'} = O_1O_2 \cdot \Delta\theta.$$

Pentru a găsi valoarea vitezei de translație a dreptei  $O_1O_2$ , vom împărți ambele părți ale ultimei relații cu  $\Delta t$  și vom trece la limită; vom obține:

$$v = \frac{ds}{dt} = O_1O_2 \frac{d\theta}{dt} = O_1O_2 \cdot \omega. \quad (21.5)$$

Dar  $O_1O_2 \cdot \omega$  este modulul momentului cuplului  $(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$ . Astfel vedem că cuplul de viteze unghiulare duce în adevăr la mișcări de translație; modulul vitezei acestei mișcări de translație este egal cu modulul momentului cuplului vitezelor unghiulare, iar sensul vitezei de translație, după cum se vede din fig. 205 și 206,



coincide cu sensul momentului cuplului. De aici ajungem la următoarea teoremă.

*Cuplul vitezelor unghiulare produce o viteză de translație a cărui vector este egal cu vectorul momentului acestui cuplu.*

Cilitorul își poate ușor imagina această mișcare, întorcându-se cu același unghi mic dar în sens opus, succesiv pe piciorul drept și pe piciorul stâng.

§ 93. Observații asupra rotațiilor finite. Toate demonstrațiile precedente se refereau la vitezele unghiulare. Deoarece  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  și, prin urmare,  $d\theta = \omega dt$ , rezultă că ele pot fi aplicate și unor rotații infinit mici; dar, ar fi greșit să se creadă că aceste deducții se pot aplica și la rotații finite. Exemplele următoare vor ilustra acest lucru.

Să examinăm triedrul drept  $Oxyz$  (fig. 207). Rotindu-l în sens pozitiv cu două unghiuri drepte în jurul axei  $Ox$ , îl vom muta din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a; apoi, rotindu-l în sens pozitiv cu două unghiuri drepte în jurul axei  $Oy$  îl vom muta din poziția a  $II$ -a în poziția a  $III$ -a. Dar se vede ușor că triedrul  $Oxyz$  poate

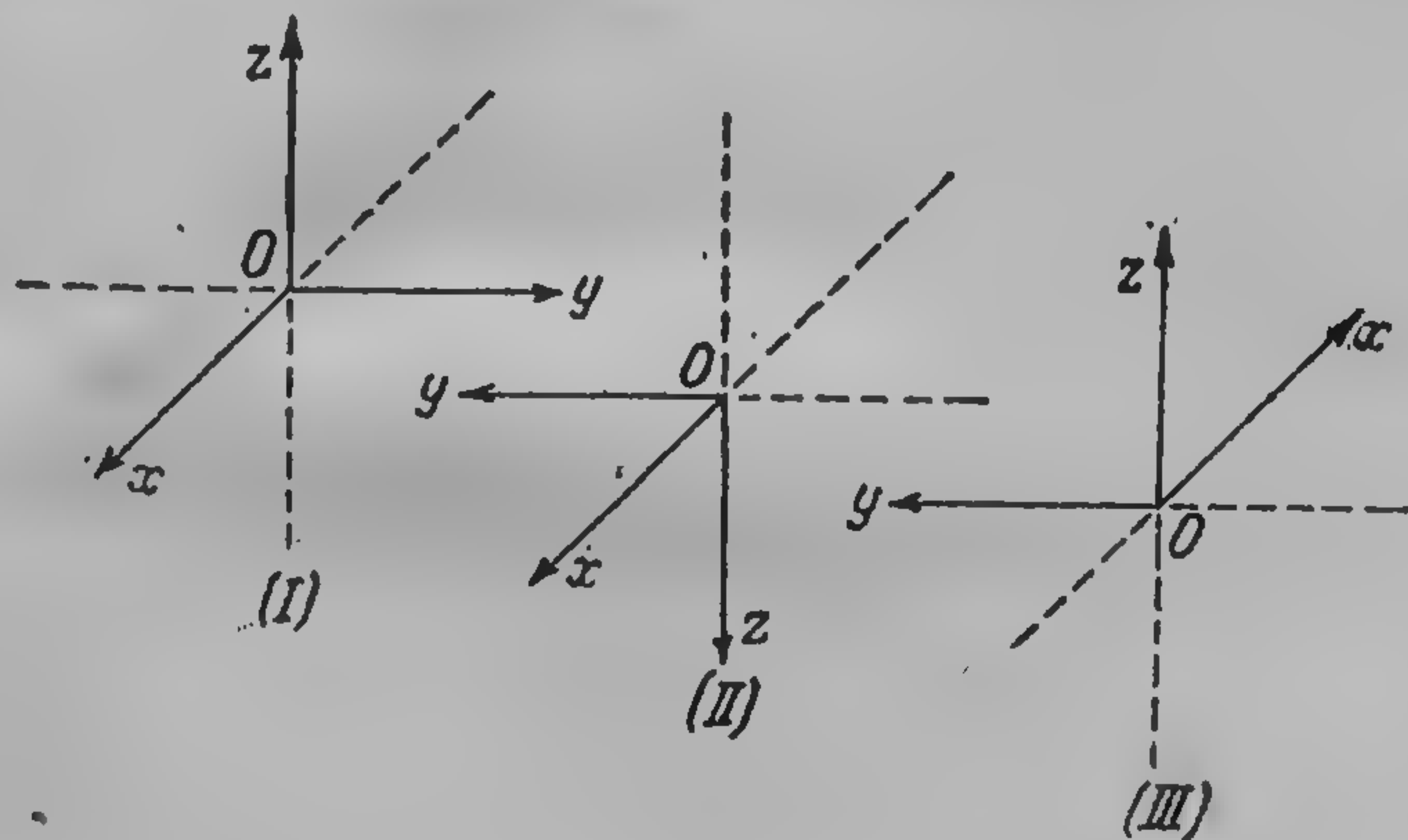


Fig. 207

fi mutat dintr-o dată din poziția  $I$  în poziția a  $III$ -a prin rotirea în sens opus cu două unghiuri drepte în jurul axei  $Oz$ . În acest fel, cele două rotații finite, și anume fiecare cu două unghiuri drepte în sens pozitiv în jurul axei  $Ox$  și  $Oy$ , sînt echivalente cu o singură rotație finită în sens negativ cu două unghiuri drepte, în jurul axei  $Oz$ , adică două rotații finite în jurul unor axe



concurrente, puteau să fie înlocuite printr-o singură rotație finită, dar în acest caz nu este valabilă legea paralelogramului.

Vom presupune apoi, că avem două axe paralele, ale căror urme pe planul desenului vor fi punctele  $O_1$  și  $O_2$  (fig. 208). Presupunem că în jurul acestor axe se fac rotații cu unghiurile finite  $\Theta_1$  și  $\Theta_2$ , și anume mai întâi rotația în jurul axei  $O_1$  cu unghiul  $\Theta_1$ , iar apoi în jurul axei  $O_2$  cu unghiul  $\Theta_2$ . După prima rotație, vom muta dreapta  $O_1O_2$  în poziția  $O_1O'_2$ , iar după a doua rotație vom muta dreapta  $O_1O'_2$  în poziția  $O'_1O'_2$ ; în acest fel, ca rezultat al acestor două rotații, segmentul  $O_1O_2$  va ocupa poziția  $O'_1O'_2$ . Deoarece mișcarea segmentului  $O_1O_2$  se face în același plan, putem să mutăm dintr-o dată segmentul  $O_1O_2$  în poziția  $O'_1O'_2$  prin rotirea în jurul unui centru (§ 81). Pentru a găsi punctul  $C$ , unim printr-o dreaptă punctele  $O_1$  și  $O'_1$ , unim printr-o dreaptă punctele  $O_2$  și  $O'_2$  împărțim segmentele  $O_1O'_1$  și  $O_2O'_2$  în două părți egale și în mijloacele  $L$  și  $M$  ale acestor segmente, ridicăm perpendicularele  $LC$  și  $MC$ ; punctul de intersecție  $C$  al acestor perpendiculare va fi chiar centrul de rotație căutat. Unind prin drepte punctul  $C$  cu punctele  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O'_2$ , și observînd că  $CO_2 = CO'_2$ , concludem că triunghiul  $CO_1O_2 =$  triunghiul  $CO_1O'_2$ .

Dar, dreapta  $OCM$  împarte unghiul  $\Theta_1$  în două părți egale, iar dreapta  $O'_2CL$  împarte unghiul  $\Theta_2$  în două părți egale. Dar din

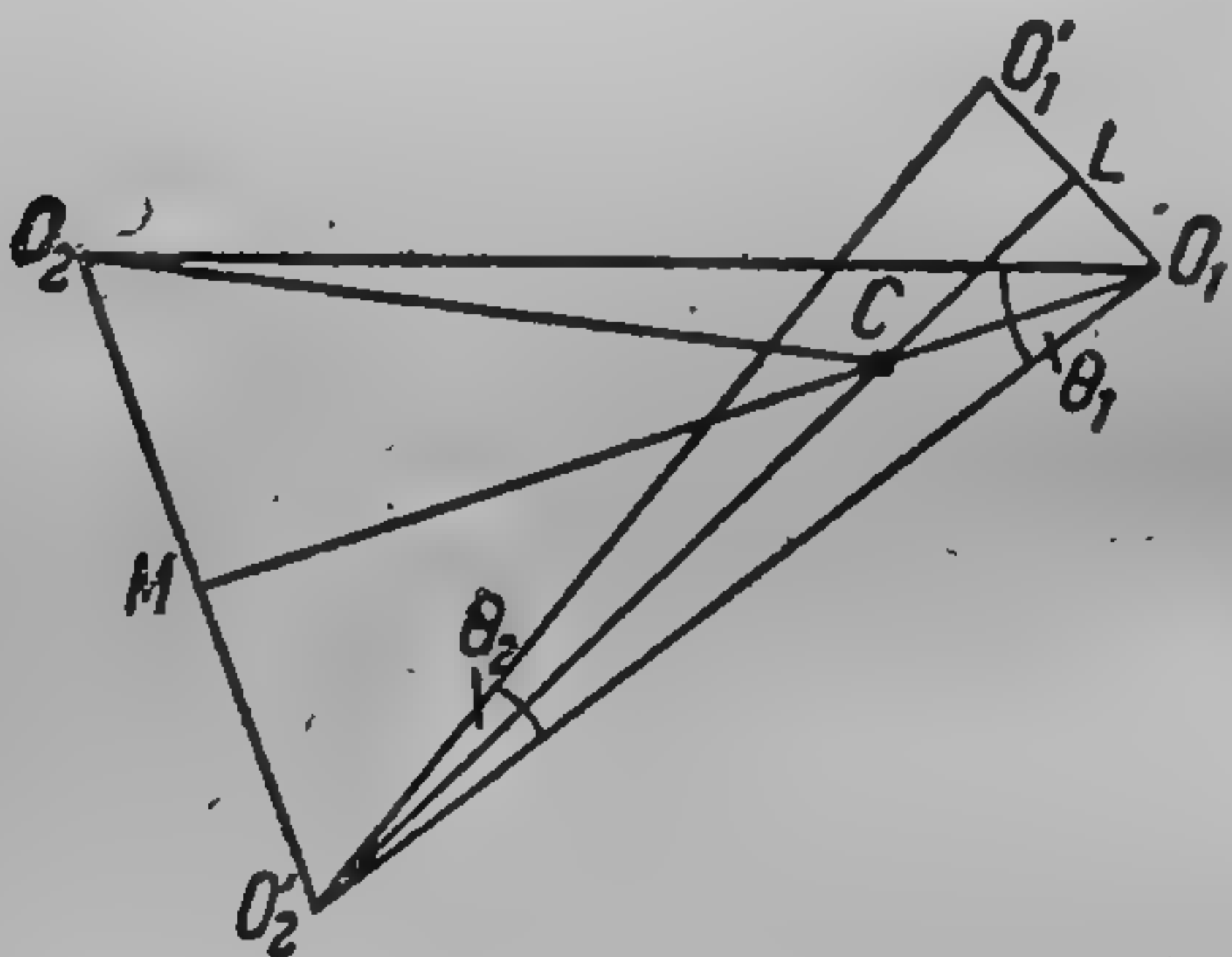


Fig. 208

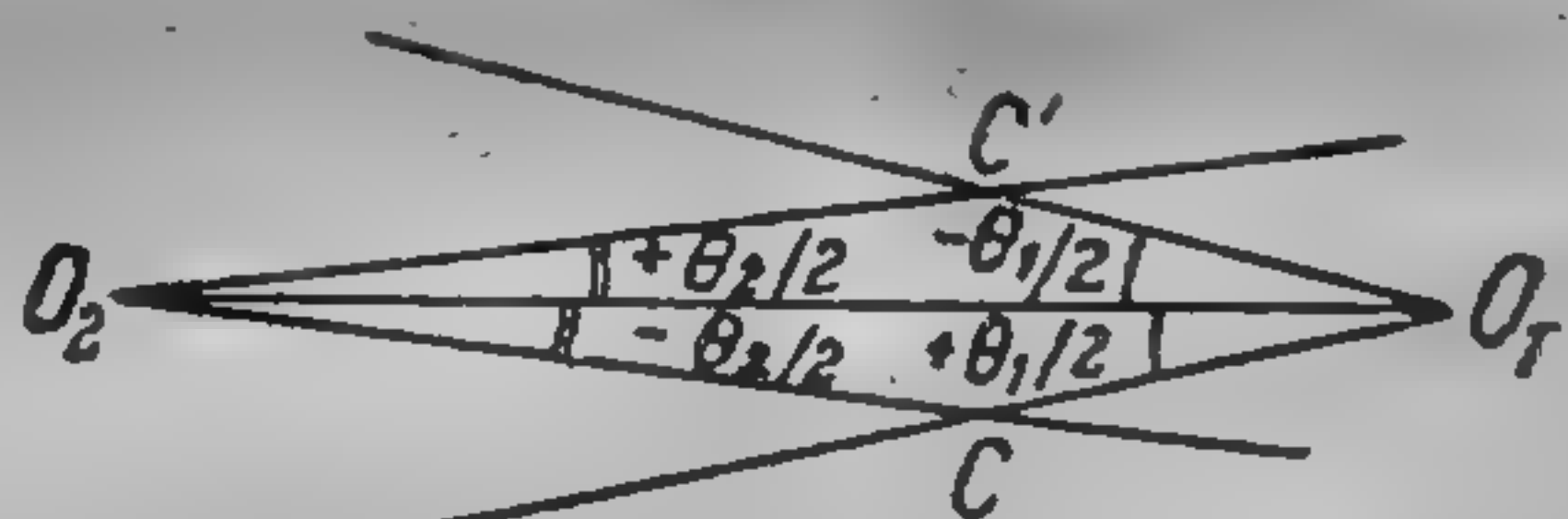


Fig. 209

egalitatea triunghiurilor  $CO_1O_2$  și  $CO_1O'_2$  rezultă că  $\angle CO_2O_1 = \angle CO'_2O_1 = \frac{\Theta_2}{2}$ . În acest fel, obținem următoarea regulă pentru obținerea punctului  $C$ : trebuie dusă de la prima axă de rotație  $O_1$  dreapta  $O_1C$  sub unghiul  $\frac{\Theta_1}{2}$  în sensul rotației cu unghiul  $\Theta_1$ , iar de la a doua axă de rotație  $O_2$  trebuie dusă dreapta  $O_2C$  sub unghiul  $\frac{\Theta_2}{2}$  în sens opus rotației cu unghiul  $\Theta_2$ ; punctul de inter-



secție al dreptelor  $O_1C$  și  $O_2C$  determină centrul de rotație căutat (fig. 209). Să presupunem apoi, că prima rotație este rotația în jurul axei  $O_2$ , iar cea de-a doua rotație este rotația în jurul axei  $O_1$ ; în acest caz, trebuie măsurat unghiul  $\frac{\theta_2}{2}$  în sensul rotației cu unghiul  $\theta_2$  și unghiul  $\frac{\theta_1}{2}$  în sens opus rotației cu unghiul  $\theta_2$ , și vom obține un alt punct  $C'$ , simetric cu punctul  $C$ , în raport cu dreapta  $O_1O_2$ . Vedem, că spre deosebire de compunerea vitezelor unghiulare și a rotațiilor lor infinit mici, unde ordinea rotațiilor era indiferentă, *la rotații finite ordinea efectuării rotațiilor contează*. Evident, că la micșorarea nelimitată a unghiurilor de rotație  $\theta_1$  și  $\theta_2$ , punctele  $C$  și  $C'$  se vor apropia unul de altul și la limită se vor contopi între ele pe dreapta  $O_1O_2$ , astfel că la compunerea rotațiilor infinit mici  $d\theta_1$  și  $d\theta_2$  și deci a vitezelor unghiulare  $\omega_1$  și  $\omega_2$ , ordinea efectuării rotațiilor nu va mai avea importanță.

§ 94. Reducerea vitezei unghiulare și vitezei de translație perpendiculare pe ea, la o singură viteză unghiulară. Presupunem că avem un solid care se rotește în jurul unei axe oarecare cu viteza unghiulară  $\omega$  și care se află în același timp în mișcare de translație cu viteza  $\vec{v}$ , iar vectorul  $\vec{v}$  este perpendicular pe vectorul  $\omega$ . Presupunem că planul desenului va fi perpendicular pe axa de rotație  $\Delta$ , care întretaie planul desenului într-un punct oarecare  $O$  (fig. 210). Ducem în planul desenului prin punctul  $O$  o dreaptă perpendiculară pe viteza  $\vec{v}$  și vom examina acea parte a acestei drepte, în care viteza liniară produsă de viteza unghiulară  $\omega$  va fi dirijată în sens opus vitezei  $\vec{v}$ . Viteza liniară, provenită din viteza unghiulară  $\omega$  pentru punctul  $O_1$  va fi egală ca modul cu produsul  $\omega \cdot OO_1$  și dirijată perpendicular pe dreapta  $OO_1$ ; evident, că se poate alege totdeauna punctul  $O_1$  astfel ca să avem  $\omega \cdot OO_1 = v$ , adică  $OO_1 = \frac{v}{\omega}$ . Prin urmare, acest punct  $O_1$  în momentul dat nu va avea viteză și, de aceea, dreapta

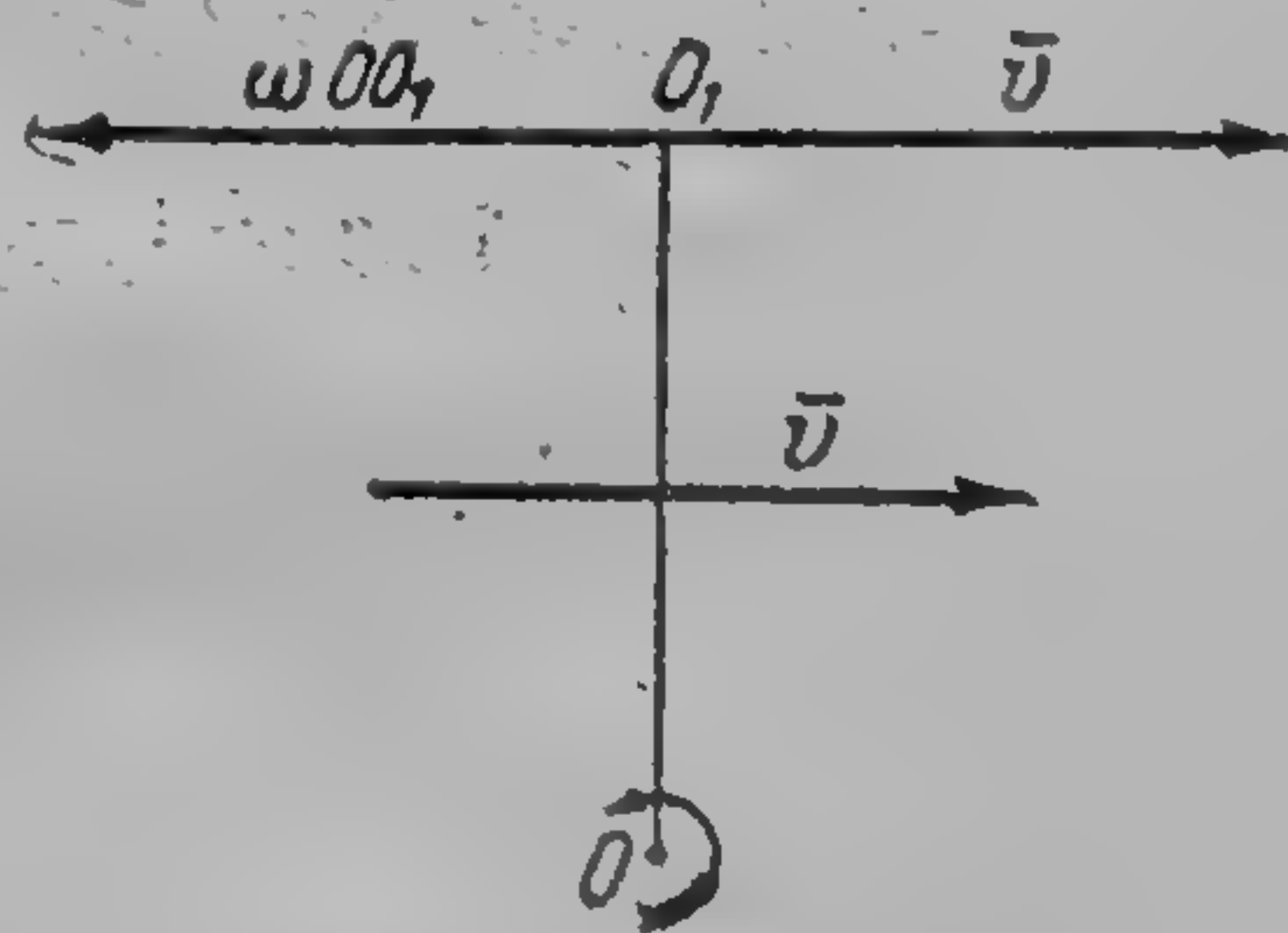


Fig. 210



$\Delta_1$  care trece prin punctul  $O_1$  și este perpendiculară pe planul desenului, va fi axa instantanee de rotație. Să găsim modulul vitezei unghiulare  $\bar{\omega}_1$  în jurul axei instantanee de rotație  $\Delta$ . Pentru aceasta vom examina punctul  $O$ . Pe de o parte, punctul  $O$  se află pe axa de rotație  $\Delta$  și de aceea nu are viteză liniară datorită vitezei unghiulare  $\bar{\omega}$ ; prin urmare, viteza totală a punctului  $O$ , depinde doar de viteza de translație și este egală cu  $\bar{v}$ . Pe de altă parte, viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$  și viteza de translație  $\bar{v}$ , după cum am văzut anterior, pot fi înlocuite printr-o singură viteză unghiulară  $\bar{\omega}_1$  în jurul axei  $\Delta_1$ ; deci, modulul vitezei punctului  $O$  poate fi reprezentat și în forma:  $\omega_1 \cdot O_1O$ . Egalând între ale ambele expresii ale modulului vitezei punctului  $O$ , vom obține:

$$\bar{v} = \omega_1 \cdot O_1O;$$

de aici vom avea:

$$\omega_1 = \frac{\bar{v}}{O_1O}.$$

Dar, din expresia precedentă pentru distanța  $OO_1$ , avem:

$$\omega = \frac{\bar{v}}{OC_1}.$$

Prin urmare, obținem:

$$\omega_1 = \omega,$$

și este evident că sensul rotației  $\bar{\omega}_1$ , coincide cu sensul rotației  $\omega$ . Astfel, ajungem la următoarea teoremă. *Ansamblul format de o viteză liniară și o viteză unghiulară perpendiculară pe viteza liniară se reduce la o viteză unghiulară cu același modul și sens de rotație ca și viteza unghiulară dată, iar axa instantanee de rotație va fi o dreaptă paralelă la axa de rotație dată.*

Nu este greu să ne imaginăm un aparat care reproduce această mișcare:

Să ne închipuim un cărucior care merge pe șine cu viteza liniară  $\bar{v}$  (fig. 211). Pe acest cărucior este fixată o bară  $\Delta$  în jurul căreia se poate roti un disc  $S$  cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$ . Dacă discul nu se rotește, iar căruciorul înaintează, atunci punctul  $A$  situat pe discul  $S$  va avea viteza  $\bar{v}$ . Când căruciorul stă dar se rotește discul  $S$  cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$ , atunci punctul  $A$  va lua parte la mișcarea de rotație cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  în jurul axei  $\Delta$ . Dacă însă vor avea loc ambele mișcări, atunci la momen-



tul dat, viteza punctului  $A$  va fi aceeași ca în cazul cînd discul  $S$ , căruia îi aparține punctul  $A$ , s-ar roti cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  în jurul axei instantanee  $\Delta_1$ , paralelă la axa  $\Delta$ , unde  $OO_1 = \frac{v}{\omega}$  și  $OO_1 \perp \bar{v}$ . Posibilitatea înlocuirii în acest caz a vitezei de translație și a celei unghiulare, printr-o singură viteză unghiulară,

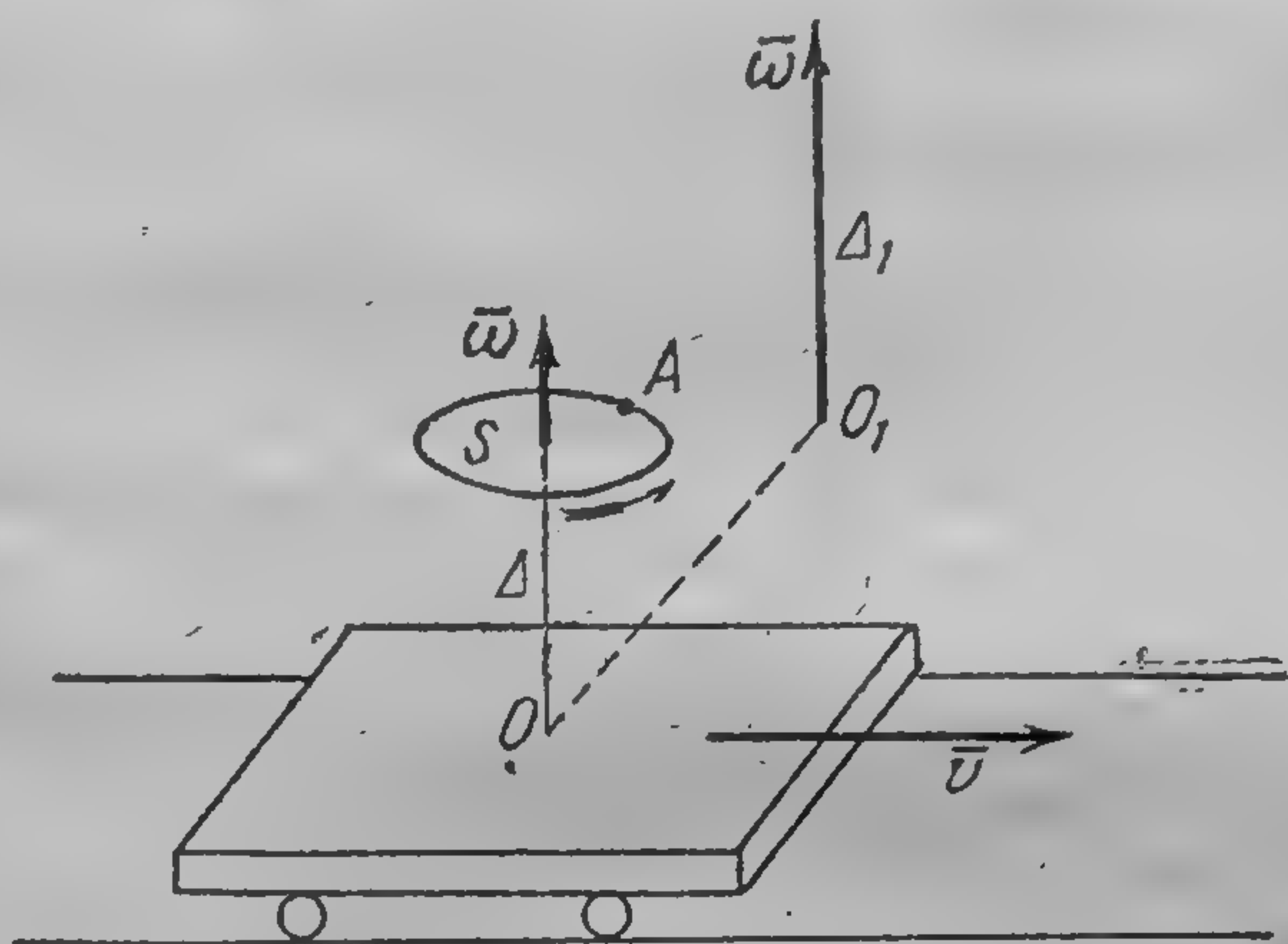


Fig. 211

concordă perfect cu rezultatele expuse în § 81. În adevăr, datorită celor două viteze  $\bar{v}$  și  $\bar{\omega}$  mișcarea discului  $S$  și a oricărui solid legat de el va fi plan paralelă, iar noi am văzut că mișcarea plan paralelă în orice moment poate fi reprezentată ca o rotație în jurul unei axe instantanee de rotație. Nu este greu de prevăzut că locul geometric al axelor instantanee de rotație  $\Delta_1$  (cu condiția ca raportul  $\frac{v}{\omega}$  să rămână constant), va fi un plan, paralel cu vectorul viteză  $\bar{v}$ .

§ 95. Reducerea la cel mai simplu sistem a sistemului format dintr-o viteză unghiulară și o viteză de translație cu direcții arbitrare. Presupunem că avem viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  și viteza de translație  $\bar{v}$ , ale căror direcții sînt arbitrare. Deoarece vectorul viteză de translație  $\bar{v}$  este un vector liber, pentru ușurința reprezentării îl vom presupune cu originea în originea vectorului  $\bar{\omega}$ . Descompunem vectorul  $\bar{v}$  al vitezei în doi vectori  $\bar{v}'$  și  $\bar{v}''$ , astfel încît vectorul  $\bar{v}'$  să fie perpendicular pe vectorul  $\bar{\omega}$  iar vectorul  $\bar{v}''$



să fie așezat de-a lungul vectorului  $\bar{\omega}$ . Conform celor expuse în paragraful precedent, vitezele  $\bar{v}$  și  $\bar{\omega}$  se reduc la o singură viteză unghiulară  $\bar{\omega}$ , care trece prin punctul  $O_1$ , astfel încît  $OO_1 = \frac{v'}{\omega}$ , și  $OO_1 \perp \bar{v}'$ . Deoarece vectorul  $\bar{v}'$ , vector viteză de translație, este vector liber, el poate fi mutat în punctul  $O_1$  și în acest fel obținem în punctul  $O_1$  viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  și viteza de translație  $\bar{v}'$  dirijată de-a lungul vitezei unghiulare, adică vectorul viteză al unei mișcări elicoidale. Vom introduce următoarea definiție:

*Mișcarea rezultând dintr-o viteză unghiulară și o viteză de translație paralelă la cea unghiulară se numește rototranslație.*

Prin urmare, ajungem la teorema:

*Mișcarea rezultând dintr-o viteză unghiulară și o viteză de translație dirijate arbitrar, se reduce în general la o rototranslație.*

Cuvîntul „în general” este utilizat datorită faptului că în cazul cînd  $\bar{v} \perp \bar{\omega}$  nu vom avea o rototranslație, ci va avea loc numai o mișcare de rotație.

§ 96. Reducerea unui sistem de viteze unghiulare și de translație, dirijate arbitrar, la cel mai simplu sistem. Raționamentele și rezultatele care vor fi obținute în acest paragraf, sînt perfect analoge cu raționamentele și rezultatele obținute în § 47 și 48, la cercetarea cazului general de reducere a forțelor.

Vom demonstra în primul rînd următoarea lema:

*Vectorul viteză unghiulară se poate muta totdeauna paralel cu el însuși, într-un punct oarecare din spațiu, adăugînd la el vectorul vitezei de translație egal cu momentul vitezei unghiulare în raport cu punctul considerat.*

În adevăr, să presupunem că ni se dă vectorul viteză unghiulară  $\bar{\omega}$  cu originea într-un punct oarecare  $A$ ; se cere ca el să fie mutat într-un punct oarecare din spațiu  $O$  (fig. 212). Vom construi în punctul  $O$  doi vectori  $\bar{\omega}$  și  $-\bar{\omega}$ . Vectorul  $-\bar{\omega}$  în punctul  $O$  și vectorul  $\bar{\omega}$  în punctul  $A$ , vor forma un cuplu de viteze unghiulare, iar noi am văzut în § 92 că cuplul de viteze unghiulare dă o viteză de translație al cărei vector este egal cu vectorul moment al acestui cuplu. Să unim punctul  $O$  cu punctul  $A$  prin vectorul  $\bar{r}$ ;

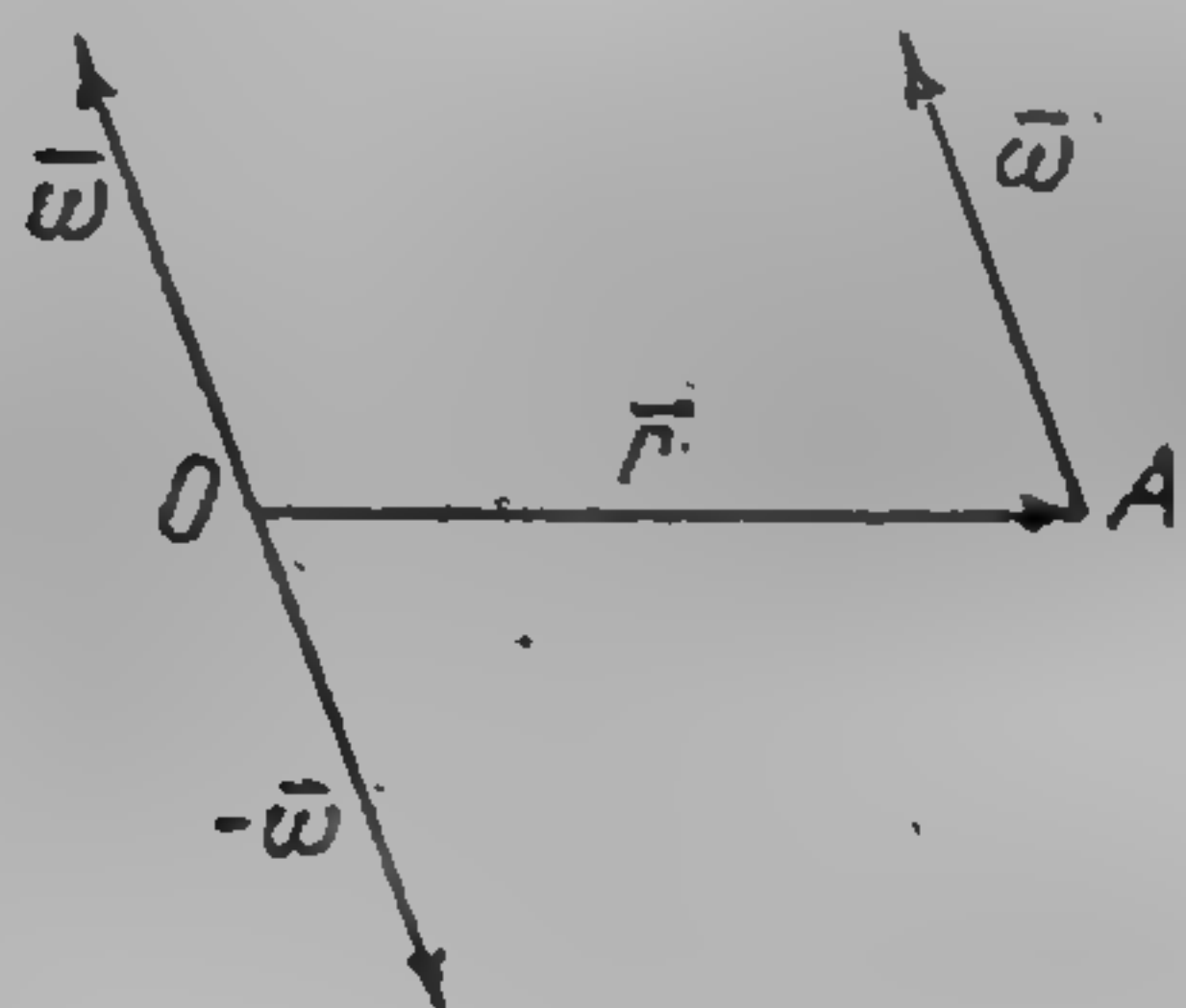


Fig. 212



atunci momentul cuplului considerat  $(\bar{\omega}, -\bar{\omega})$  va fi egal cu produsul vectorial  $\bar{r} \times \bar{\omega}$ . În acest fel, vedem că drept rezultat obținem vectorul viteză unghiulară  $\bar{\omega}$ , care are originea în punctul  $O$ , și vectorul viteză de translație  $\bar{v}$ , unde  $\bar{v} = \bar{r} \times \bar{\omega}$ .

Ca și în cazul reducerii unui sistem de forțe arbitrare, reducerea unui sistem arbitrar de viteze unghiulare și de translație dirijate arbitrar, poate fi efectuată și vectorial și analitic. Vom începe cu expunerea procedurii vectorial.

Fie dat sistemul de viteze unghiulare  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots$  care au originea respectiv în punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots$  și sistemul de viteze de translație  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots$ .

Nu este greu să ne imaginăm mișcarea produsă de sistemul vitezelor unghiulare  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots$ . În adevăr, să examinăm un punct oarecare  $A$  care se rotește cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$  în jurul axei  $\Delta_1$ , care trece prin punctul  $A_1$ . Mai departe axa  $\Delta_1$  se rotește cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$  în jurul axei  $\Delta_2$ , care trece prin punctul  $A_2$ . Apoi axa  $\Delta_2$  se rotește cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_3$  în jurul axei  $\Delta_3$  care trece prin punctul  $A_3$  etc. Noi examinăm aici o poziție oarecare instantanee a tuturor axelor de rotație și valoarea instantanee corespunzătoare a tuturor vitezelor unghiulare. Să luăm un punct arbitrar  $O$  în spațiu și să-l numim *punct de reducere*. Mutăm toți vectorii  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots$  în punctul  $O$ ; atunci, conform § 91, toți vectorii  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots$  concurenți în punctul  $O$ , se pot înlocui printr-un singur vector  $\bar{\omega}$  egal cu suma vectorială a vectorilor precedenți:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \dots = \sum_n \bar{\omega}_n. \quad (21.6)$$

Cu ocazia mutării vectorilor  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots$  în punctul  $O$ , am obținut conform lemei expuse la începutul acestui paragraf vitezele suplimentare de translație:

$$\bar{v}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{\omega}_1, \quad \bar{v}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{\omega}_2, \quad \bar{v}_3 = \bar{r}_3 \times \bar{\omega}_3, \dots \quad (21.7)$$

unde:

$$\bar{r}_1 = \overline{OA}_1, \quad \bar{r}_2 = \overline{OA}_2, \quad \bar{r}_3 = \overline{OA}_3, \dots$$

Toate vitezele de translație ca vectorii liberi se pot muta în punctul  $O$  și aduna geometric; vom obține viteza de translație rezultantă  $\bar{v}$ , unde:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \dots + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \dots \quad (21.8)$$



În acest fel, în punctul  $O$  vom avea viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  și viteza de translație  $\bar{v}$ , dar conform celor expuse în § 95, un asemenea sistem de viteză  $\bar{\omega}$  și  $\bar{v}$  se poate reduce la o rototranslație.

În acest fel, putem exprima rezultatul obținut în felul următor:

*Un sistem arbitrar de viteze unghiulare și de translație dirijate arbitrar, se poate reduce în general la o rototranslație.*

Evident, că aici apar de asemenea și cazuri particulare ca și la compunerea unui sistem arbitrar de forțe; anume, în cazuri particulare se pot obține fie o singură viteză unghiulară, fie o singură viteză de translație, fie sistemul vitezelor echivalent cu zero.

Deoarece viteza unghiulară este un vector alunecător, iar cea de translație este un vector liber, găsind rototranslația pentru un punct din spațiu, ea va fi determinată pentru toate punctele suportului vectorului viteză unghiulară. Această dreaptă, ca și în cazul reducerii forțelor, poartă numele de *axă centrală* a sistemului de viteze.

Nu este greu de realizat procedeul analitic de reducere a sistemului vitezelor de translație și unghiulare repetând raționamentele din § 48. Pentru aceasta luăm un punct oarecare  $O$  din spațiu ca punct de reducere și construim în el, un sistem de axe ortogonale  $Oxyz$ . Folosindu-ne de proiecțiile vitezelor unghiulare pe axele de coordonate considerate  $Oxyz$ , din formula (21.6) vom avea:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= (\omega_1)_x + (\omega_2)_x + (\omega_3)_x + \dots = \sum_n (\omega_n)_x, \\ \omega_y &= (\omega_1)_y + (\omega_2)_y + (\omega_3)_y + \dots = \sum_n (\omega_n)_y, \\ \omega_z &= (\omega_1)_z + (\omega_2)_z + (\omega_3)_z + \dots = \sum_n (\omega_n)_z. \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

Mai departe, proiectând vectorul  $\bar{v}$  din relația (21.8) și ținând seamă de relația (21.7), vom obține:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \sum_n [y_n(\omega_n)_z - z_n(\omega_n)_y] + (u_1)_x + (u_2)_x + (u_3)_x + \dots \\ v_y &= \sum_n [z_n(\omega_n)_x - x_n(\omega_n)_z] + (u_1)_y + (u_2)_y + (u_3)_y + \dots \\ v_z &= \sum_n [x_n(\omega_n)_y - y_n(\omega_n)_x] + (u_1)_z + (u_2)_z + (u_3)_z + \dots \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$



Din raționamentele expuse în § 48, rezultă că, pentru ca în punctul  $O$  să apară rototranslația trebuie să avem:

$$\frac{v_x}{\omega_x} = \frac{v_y}{\omega_y} = \frac{v_z}{\omega_z}.$$

În general aceste relații nu vor fi satisfăcute pentru punctul  $O$ ; de aceea, vom lua ca punct de reducere un alt punct  $O'$ ,

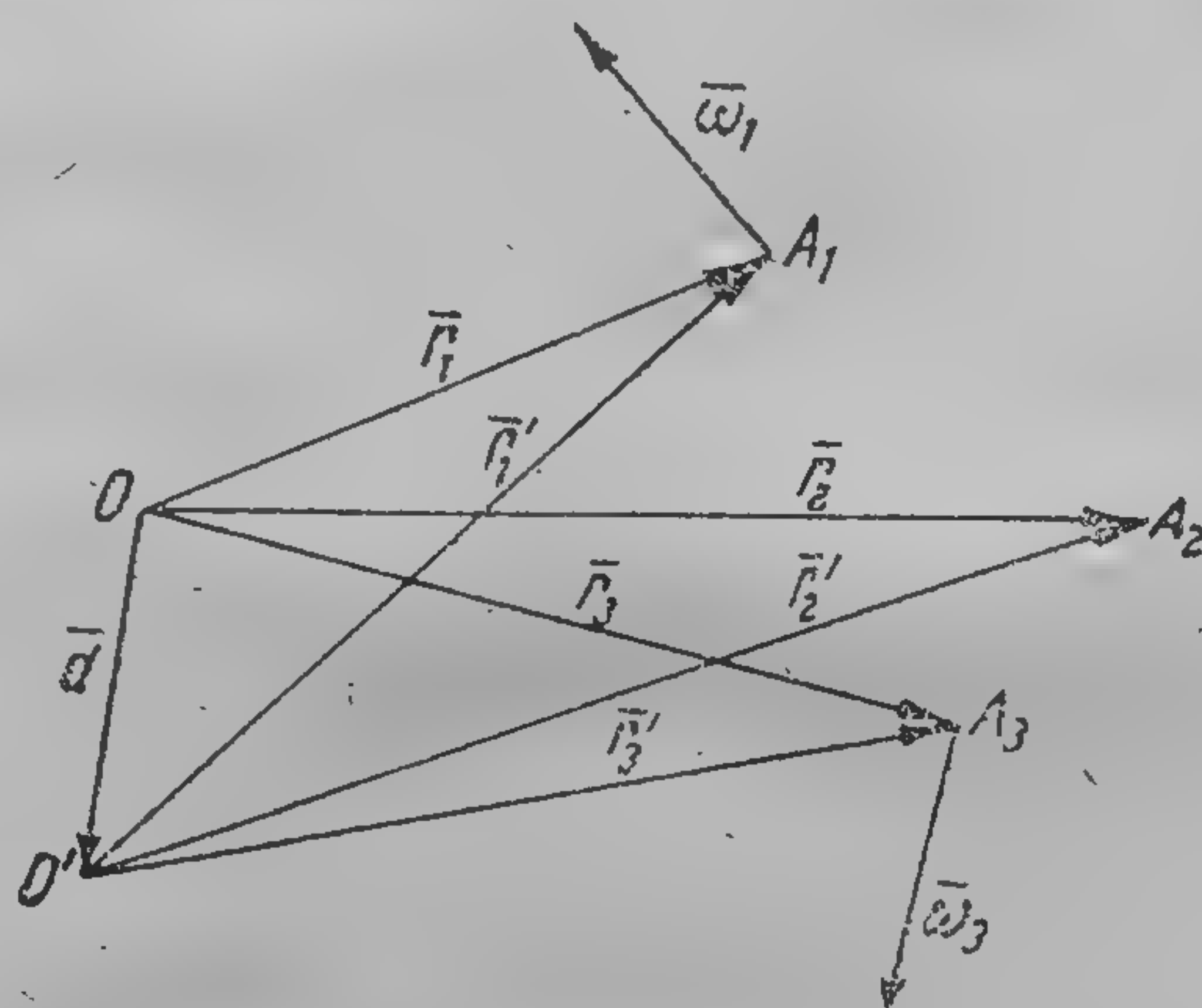


Fig. 213

astfel încât în el să se producă rototranslația; din cauza schimbării punctului de reducere, mărimile  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  nu variază, însă mărimile  $v_x, v_y, v_z$  trebuie să varieze.

În adevăr, fie  $(x', y', z')$  coordonatele punctului  $O'$ ; în locul formulelor (21.7) vom avea:

$$\bar{v}'_1 = \bar{r}'_1 \times \bar{\omega}_1, \quad \bar{v}'_2 = \bar{r}'_2 \times \bar{\omega}_2, \quad \bar{v}'_3 = \bar{r}'_3 \times \bar{\omega}_3, \dots \quad (21.11)$$

unde vom avea:

$$\bar{r}'_1 = \bar{O}'A_1, \quad \bar{r}'_2 = \bar{O}'A_2, \quad \bar{r}'_3 = \bar{O}'A_3, \dots$$

Din fig. 213 vom obține:

$$\bar{r}'_1 = \bar{r}_1 - \bar{d}, \quad \bar{r}'_2 = \bar{r}_2 - \bar{d}, \quad \bar{r}'_3 = \bar{r}_3 - \bar{d}, \dots$$

unde  $\bar{d} = \bar{OO}'$ .



De aceea, formulele (21.11) se pot reprezenta sub forma:

$$\bar{v}'_1 = (\bar{r}_1 - \bar{d}) \times \bar{\omega}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{\omega}_1 - \bar{d} \times \bar{\omega}_1 = \bar{v}_1 - \bar{d} \times \bar{\omega}_1,$$

$$\bar{v}'_2 = (\bar{r}_2 - \bar{d}) \times \bar{\omega}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{\omega}_2 - \bar{d} \times \bar{\omega}_2 = \bar{v}_2 - \bar{d} \times \bar{\omega}_2,$$

$$\bar{v}'_3 = (\bar{r}_3 - \bar{d}) \times \bar{\omega}_3 = \bar{r}_3 \times \bar{\omega}_3 - \bar{d} \times \bar{\omega}_3 = \bar{v}_3 - \bar{d} \times \bar{\omega}_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

Prin urmare, vom avea:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_1 + \bar{v}'_2 + \bar{v}'_3 + \dots &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \dots - \bar{d} \times \bar{\omega}_1 - \bar{d} \times \bar{\omega}_2 - \bar{d} \times \bar{\omega}_3 \dots = \\ &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \dots - \bar{d} \times (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \dots) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \dots - \bar{d} \times \bar{\omega}. \end{aligned}$$

În acest fel, vom găsi:

$$\begin{aligned} \bar{v}' &= \bar{v}'_1 + \bar{v}'_2 + \bar{v}'_3 + \dots + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \dots = \\ &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \dots + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \dots - \bar{d} \times \bar{\omega} = \bar{v} - \bar{d} \times \bar{\omega}. \end{aligned}$$

De aici vom obține ecuația axei centrale sub forma:

$$\frac{v'_x}{\omega_x} = \frac{v'_y}{\omega_y} = \frac{v'_z}{\omega_z},$$

sau:

$$\frac{v_x - (y'\omega_z - z'\omega_y)}{\omega_x} = \frac{v_y - (z'\omega_x - x'\omega_z)}{\omega_y} = \frac{v_z - (x'\omega_y - y'\omega_x)}{\omega_z} \quad (21.12)$$

unde  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sînt coordonate curente. Ca și în § 48 această ecuație a axei centrale se poate aduce la forma canonică:

Și aici avem doi invarianti:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\omega} = \text{const}), \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 &= \text{const}; \\ \bar{\omega} \cdot \bar{v} &= \omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

Viteza minimă de translație  $v_{min}$  se va produce de-a lungul axei centrale (§ 48) și valoarea ei algebrică va fi egală:

$$v_{min} = v \cos(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}).$$

Vom introduce raportul:

$$p = \frac{v_{min}}{\omega} = \frac{\bar{\omega} \cdot \bar{v}}{\omega^2}; \quad (21.14)$$



mărimea  $p$  se numește *parametrul* rototranslației, evident, că  $p$ , la fel ca și  $v_{mtn}$ , este o mărime algebrică.

§ 97. Exemple. 70. Se dă un sistem ortogonal de coordonate fix  $Oxyz$ . Un sistem oarecare de referință  $I$  se rotește uniform în jurul axei  $Ox$ , efectuând o rotație completă în 2 s. În raport cu sistemul  $I$ , un alt sistem  $II$  se rotește uniform în jurul axei, care coincide în momentul dat cu axa  $y$ , efectuând o rotație completă în 4 s. În sfârșit, un al treilea sistem se rotește uniform în raport cu sistemul  $II$  în jurul axei  $\Delta$ , înclinată în momentul dat față de axa  $Oz$  sub unghiul de  $45^\circ$  și față de axele  $Ox$  și  $Oy$  sub unghiuri egale; în această din urmă mișcare, sistemul material face o rotație completă în  $\frac{1}{2}$  s. Să se găsească viteza unghiulară instantanee  $\bar{\omega}$ , a sistemului al treilea în raport cu sistemul fix  $Oxyz$  și poziția axei instantanee de rotație.

Vom găsi mai întâi vitezele unghiulare de rotație în jurul axelor  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $\Delta$ ; aceste viteze unghiulare vor fi respectiv egale cu:

$$\frac{2\pi}{2} = \pi, \quad \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Proiecțiile vitezei unghiulare  $4\pi$  pe axa  $Oz$  și pe planul  $Oxy$  vor fi egale cu  $4\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\pi$ ; de aceea proiecțiile acestei viteze unghiulare pe axele  $Ox$  și  $Oy$  vor fi egale cu  $2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\pi$ . În acest fel, avem:

$$\omega_x = \pi + 2\pi = 3\pi, \quad \omega_y = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5}{2}\pi, \quad \omega_z = 2\sqrt{2}\pi.$$

De aici obținem:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{9\pi^2 + \frac{25}{4}\pi^2 + 8\pi^2} = \frac{\sqrt{93}}{2}\pi \text{ s}^{-1}.$$

Notînd prin  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  unghiurile axei instantanee de rotație cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  de coordonate, vom avea:

$$\cos \alpha = 3\pi : \frac{\sqrt{93}}{2}\pi = \frac{6}{\sqrt{93}},$$

$$\cos \beta = \frac{5}{2}\pi : \frac{\sqrt{93}}{2}\pi = \frac{5}{\sqrt{93}},$$

$$\cos \gamma = 2\sqrt{2}\pi : \frac{\sqrt{93}}{2}\pi = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{93}}.$$

71. Se dă un sistem de zece axe de rotație, paralele între ele, în jurul cărora vitezele unghiulare sînt egale cu  $\bar{\omega}'$ ,  $2\bar{\omega}'$ ,  $3\bar{\omega}'$ , ...,  $10\bar{\omega}'$ ; toate



aceste axe întretaie una și aceeași dreaptă, iar distanța între punctele de întretaie este egală cu  $a$ . Să se găsească viteza unghiulară instantanee  $\omega$  echivalentă cu sistemul dat de viteze unghiulare și poziția axei instantanee de rotație. Pentru rezolvarea acestei probleme folosind formulele (21.4) și (21.5); vom obține:

$$\omega = \omega' + 2\omega' + 3\omega' + \dots + 10\omega' = \frac{\omega'(1+10)10}{2},$$

adică

$$\omega = 55\omega'.$$

Considerînd dreapta pe care o întretaie toate axele de rotație, drept axa  $Ox$  și luînd originea  $O$  în punctul de intersecție al dreptei cu suportul vitezei unghiulare  $\omega'$ , după prima din formulele (21.5) vom avea:

$$\xi = \frac{O \cdot \omega' + a \cdot 2\omega' + 2a \cdot 3\omega' + 3a \cdot 4\omega' + \dots + 9a \cdot 10\omega'}{55\omega'}$$

sau

$$\xi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 9 \cdot 10}{55} a.$$

Efectuînd calculele, vom găsi:

$$\xi = \frac{2+6+12+20+30+42+56+72+90}{55} a,$$

adică

$$\xi = 6a.$$

În acest fel, axa instantanee de rotație va întretaia axa  $Ox$  la distanța de  $6a$  de la originea coordonatelor și va fi paralelă cu celelalte axe, iar viteza unghiulară instantanee de rotație în jurul ei va fi egală cu  $55\omega'$ .

72. Se dau trei viteze unghiulare  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  și viteza liniară  $\vec{u}$ . Să se reducă acest sistem de viteze la cel mai simplu sistem, dacă cu unitățile de măsură metrul și secunda, proiecțiile vitezelor unghiulare pe axele dreptunghiulare de coordonate  $Oxyz$  vor fi:  $\omega_1 (4, 6, 7)$ ,  $\omega_2 (2, 4, 5)$ ,  $\omega_3 (-5, -6, -7)$ ; originile  $A_1, A_2, A_3$  ale vectorilor  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  au coordonatele:  $A_1 (2, 3, 8)$ ,  $A_2 (1, -2, -3)$ ,  $A_3 (2, 2, 1)$  și proiecțiile vitezei  $\vec{u}$  sînt egale cu  $u_x=8$ ,  $u_y=7$ ,  $u_z=6$ . Folosind formulele (21.9), obținem:

$$\omega_x = 4 + 2 - 5 = +1,$$

$$\omega_y = 6 + 4 - 6 = +4,$$

$$\omega_z = 7 + 5 - 7 = +5.$$

De aici vom avea:

$$\omega = \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{42}.$$

Utilizînd formulele (21.10), vom găsi:

$$v_x = 3 \cdot 7 - 8 \cdot 6 + (-2) \cdot 5 - (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-7) - 1 \cdot (-6) + 8 = -33 + 8 = -25,$$

$$v_y = 8 \cdot 4 - 2 \cdot 7 + (-3) \cdot 2 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-5) - 2 \cdot (-7) + 7 = +16 + 7 = +23,$$

$$v_z = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-6) - 2 \cdot (-5) + 6 = 6 + 6 = +12.$$



Putem alcătui acum ecuațiile axei centrale după formulele (21.12):

$$\frac{-25-(5y'-4z')}{1} = \frac{23-(z'-5x')}{4} = \frac{12-(4x'-y')}{5}.$$

Pentru a aduce aceste ecuații ale axei centrale la forma canonică, vom găsi coordonatele punctului de intersecție al axei centrale cu planul  $Oxy$ , adică vom lua  $x'=0$ .

Vom obține:

$$\frac{-25-(5y'-4z')}{1} = \frac{23-z'}{4} = \frac{12+y'}{5}$$

de aici vom avea:

$$4y'+5z'=67,$$

$$-20y'+17z'=123.$$

Rezolvând aceste ecuații, vom găsi:

$$y' = \frac{131}{42}, \quad z' = \frac{229}{21}.$$

Prin urmare, ecuațiile axei centrale se pot aduce la următoarea formă canonică:

$$\frac{x'}{1} = \frac{y' - \frac{131}{42}}{4} = \frac{z' - \frac{229}{21}}{5},$$

sau:

$$\frac{42x'}{1} = \frac{42y' - 131}{4} = \frac{42z' - 458}{5}.$$

Pentru al doilea invariant  $\omega \cdot v = \omega_x \cdot v_x + \omega_y \cdot v_y + \omega_z \cdot v_z$  avem:

$$\omega \cdot v = 1 \cdot (-25) + 4 \cdot 23 + 5 \cdot 12 = 127.$$

De aici pentru parametrul  $p$  al rototranslației după formula (21.14), vom găsi:

$$p = \frac{127}{42}.$$

Deoarece din formula (21.14) rezultă că trebuie să avem  $v_{min} = p\omega$ , vom avea:

$$v_{min} = \frac{127}{42} \sqrt{42} = \frac{127}{\sqrt{42}}.$$

În acest fel, sistemul considerat al vitezelor se reduce la rototranslație a cărei viteză liniară este egală cu  $\frac{127}{\sqrt{42}}$  m/s, iar viteza unghiulară este egală cu  $\sqrt{42}$  s<sup>-1</sup>, axa centrală a sistemului intersectează planul  $Oxy$  în punctul



cu coordonatele  $y = \frac{131}{42}$ ,  $z = \frac{229}{21}$  și formează cu axele de coordonate unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ , ai căror cosinusi sînt:

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{42}}, \quad \cos \beta = \frac{\omega_y}{\omega} = \frac{4}{\sqrt{42}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\omega_z}{\omega} = \frac{5}{\sqrt{42}}.$$



## CAPITOLUL XXII

### CAZUL GENERAL DE MIȘCARE A SOLIDULUI LIBER

§ 98. Studiul geometric al mișcării solidului liber. După cele expuse în capitolele precedente putem trece la studiul cazului general de mișcare a solidului liber. Fie dat un solid liber oarecare. Considerăm în el trei puncte oarecare  $A, B, C$ , necoliniare. Unind aceste trei puncte între ele vom obține triunghiul  $ABC$ . Evident că vom cunoaște poziția solidului dacă vom cunoaște poziția acestui triunghi  $ABC$ .

Presupunem că la trecerea solidului din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a, triunghiul  $ABC$  se va deplasa în poziția  $A'B'C'$  (fig. 214). Luăm unul din punctele  $A'', B'', C''$ , de exemplu  $C''$  și îl unim cu punctul  $C$  printr-o dreaptă; vom obține segmentul de dreaptă  $CC''$ . Ducem segmentele de dreaptă  $B'B_1$  și  $A'A_1$  astfel încât să avem:  $B'B_1 \parallel C''C$  și  $A'A_1 \parallel C''C$  și unim între ele prin drepte punctele  $A_1, B_1, C$ ; vom obține triunghiul  $CA_1B_1$ , egal cu triunghiul  $C'A'B''$  și situat într-un plan paralel la planul triunghiului  $C'A'B''$ . Vedem că se poate deplasa triunghiul  $CAB$  în poziția  $C'A'B'$ , deplasând mai întâi triunghiul  $CAB$  în poziția  $CA_1B_1$ , iar apoi deplasând triunghiul  $CA_1B_1$  în poziția  $C'A'B'$ .

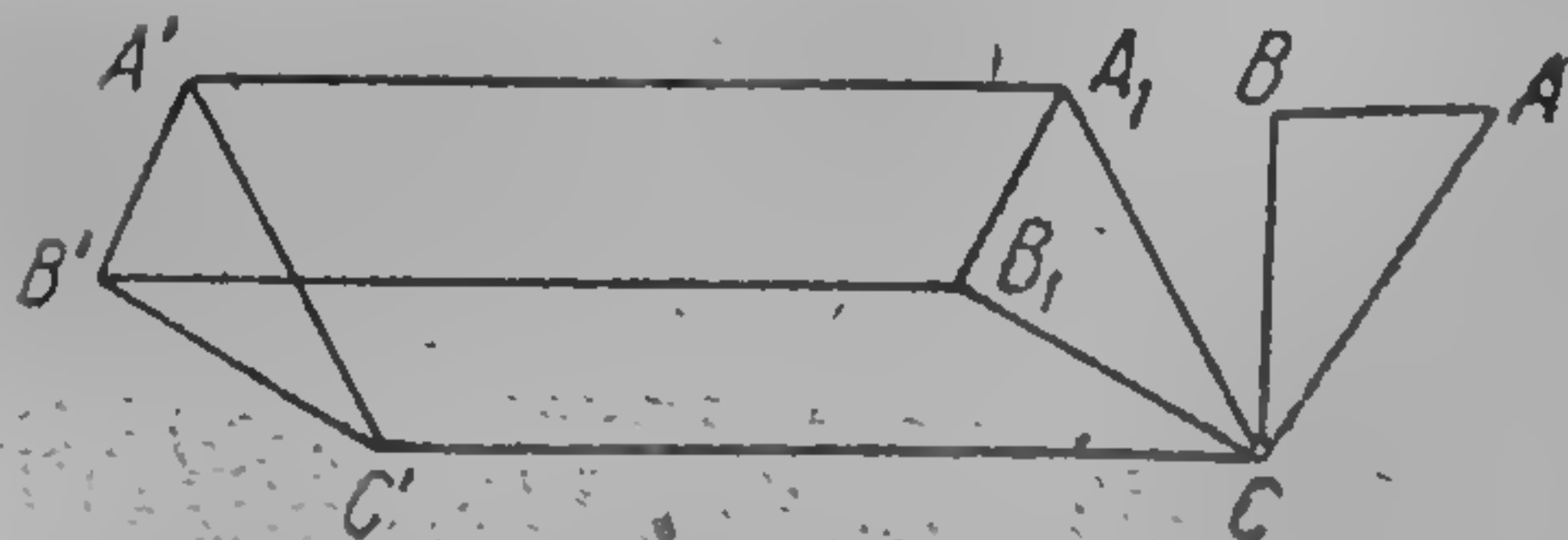


Fig. 214

Prin deplasarea triunghiului  $CAB$  în poziția  $CA_1B_1$  vom avea cazul mișcării solidului care are un punct fix  $C$ ; după teorema lui d'Alembert (§ 86), această mișcare se poate obține printr-o rotație a solidului în jurul unei axe oarecare  $\Delta$  care trece prin punctul  $C$ . Deplasarea însă a triunghiului  $CA_1B_1$  în poziția  $C'A'B'$  este o translație  $CC''$  a solidului. Astfel, am demonstrat următoarea teoremă:

*Orice mișcare a unui solid se poate obține printr-o rotație și o translație.*



Observăm că la fel ca și mai înainte în cazuri analoge, nu descriem aici prin aceste mișcări de rotație și de translație, deplasările reale ale solidului; ne interesează doar poziția inițială  $I$  a solidului și poziția lui finală  $II$ , însă trecerea reală din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a a solidului poate fi foarte diferită de mișcările

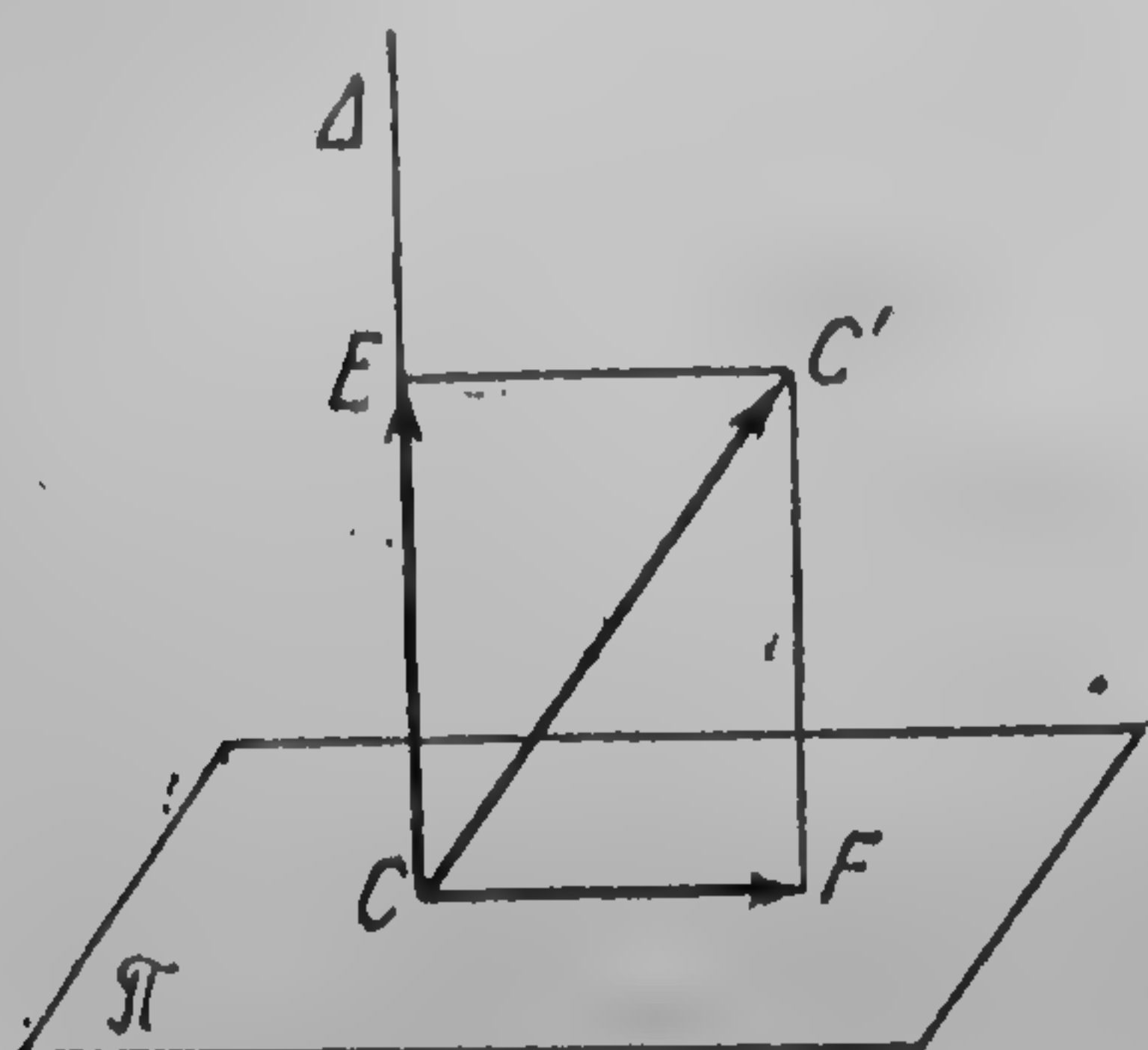


Fig. 215

de rotație și translație studiate de noi. Este evident, că succesiunea în care se fac aceste două deplasări nu interesează; se poate da solidului întâi deplasarea  $CC'$  și apoi să se rotească solidul în jurul axei care trece prin punctul  $C'$ , astfel încât triunghiul considerat să coincidă cu triunghiul  $C'A'B'$ , de asemenea se pot face ambele deplasări concomitent adică să se mute solidul în mișcare de translație, și în același timp să se rotească solidul

în jurul axei care trece prin punctul  $C$ . Să demonstrăm acum următoarea teoremă care aparține lui Châsles:

*Orice deplasare a unui solid liber dintr-o poziție în alta se poate obține printr-o mișcare elicoidală.*

În adevăr, să presupunem că am deplasat solidul din poziția  $I$  în poziția a  $II$ -a printr-o mișcare de translație  $CC'$  și printr-o mișcare de rotație în jurul unei axe oarecare  $\Delta$  care trece prin punctul  $C$ . Pentru ușurința desenului să presupunem că am dus planul desenului prin vectorul  $\overline{CC'}$  a mișcării de translație și prin axa  $\Delta$  a mișcării de rotație (fig. 215). Descompunem vectorul  $\overline{CC'}$  în doi vectori  $\overline{CE}$  și  $\overline{CF}$ , astfel încât vectorul  $\overline{CE}$  să fie situat pe axa  $\Delta$  iar vectorul  $\overline{CF}$  să fie perpendicular pe axa  $\Delta$ . Astfel, putem înlocui translația  $\overline{CC'}$  prin translația  $\overline{CF}$  și translația  $\overline{CE}$ . Rotirea solidului în jurul axei  $\Delta$  și translația  $\overline{CF}$ , dau corpului o deplasare paralelă cu planul  $\pi$  perpendicular pe axa  $\Delta$ , dar noi știm că o deplasare plan paralelă a solidului, se poate totdeauna face printr-o rotație a acestui solid în jurul unei axe oarecare perpendiculară pe planul  $\pi$  (§ 81). În acest fel, am redus deplasarea solidului liber la o rotație în jurul unei axe oarecare  $\Delta'$  perpendiculară pe planul  $\pi$  și la o translație  $\overline{CE}$ , de asemenea perpendiculară pe planul  $\pi$ . Evident, că din ambele aceste mișcări rezultă o mișcare elicoidală și deci teorema este demonstrată. De aici



rezultă că toldeauna putem să ne imaginăm un astfel de șurub și o astfel de piuliță de care fixînd solidul să putem muta solidul dintr-o poziție în alta prin mișcarea piuliței pe șurub.

Această mișcare elicoidală nu va descrie desigur mișcarea reală a solidului. Împărțim mișcarea reală a solidului într-o serie de mișcări infinit mici, și pentru fiecare din ele construim mișcarea elicoidală corespunzătoare. Evident, că ne vom apropia cu atît mai mult de mișcarea reală a solidului prin totalitatea acestor mișcări elicoidale, cu cît pozițiile succesive considerate din mișcarea reală a solidului vor fi mai apropiate una de alta. Dacă aceste poziții succesive ale solidului vor fi infinit de apropiate între ele, atunci și mișcările elicoidale infinit mici se vor apropia infinit de mult de mișcarea reală a acestui solid. Observăm că în acest fel reprezentăm numai mișcarea reală a solidului, adică mișcarea lui din punct de vedere geometric; pentru a reproduce și mecanic mișcarea reală, este necesar ca să fie luate în mod corespunzător vitezele tuturor mișcărilor elicoidale componente infinit mici. Din cele expuse rezultă că:

*În orice moment mișcarea solidului liber poate fi reprezentată ca o mișcare elicoidală infinit mică.*

Axa centrală a acestei mișcări elicoidale infinit mici, se numește *axă elicoidală instantanee*.

**§ 99. Studiul analitic al mișcării solidului liber.** Nu este greu, pe baza celor expuse în paragrafele precedente, să studiem distribuția vitezelor și accelerațiilor punctelor unui solid liber. Să examinăm solidul liber  $M$ . Fie  $A$  și  $B$  două puncte oarecare date ale solidului  $M$  (fig. 216). Vom lua un sistem de axe de coordonate fixe  $O_1x_1y_1z_1$  și vom construi un alt sistem de axe de coordonate  $Axyz$ , invariabil legate de solidul  $M$  și cu originea în punctul dat  $A$  al solidului. Vom uni între ele prin drepte punctele  $O_1$ ,  $A$ ,  $B$ , și vom introduce notațiile:

$$\bar{\rho}_A = \overline{O_1A}, \quad \bar{\rho} = \overline{O_1B}, \quad \bar{r} = \overline{AB}.$$

Obținem relația de bază:

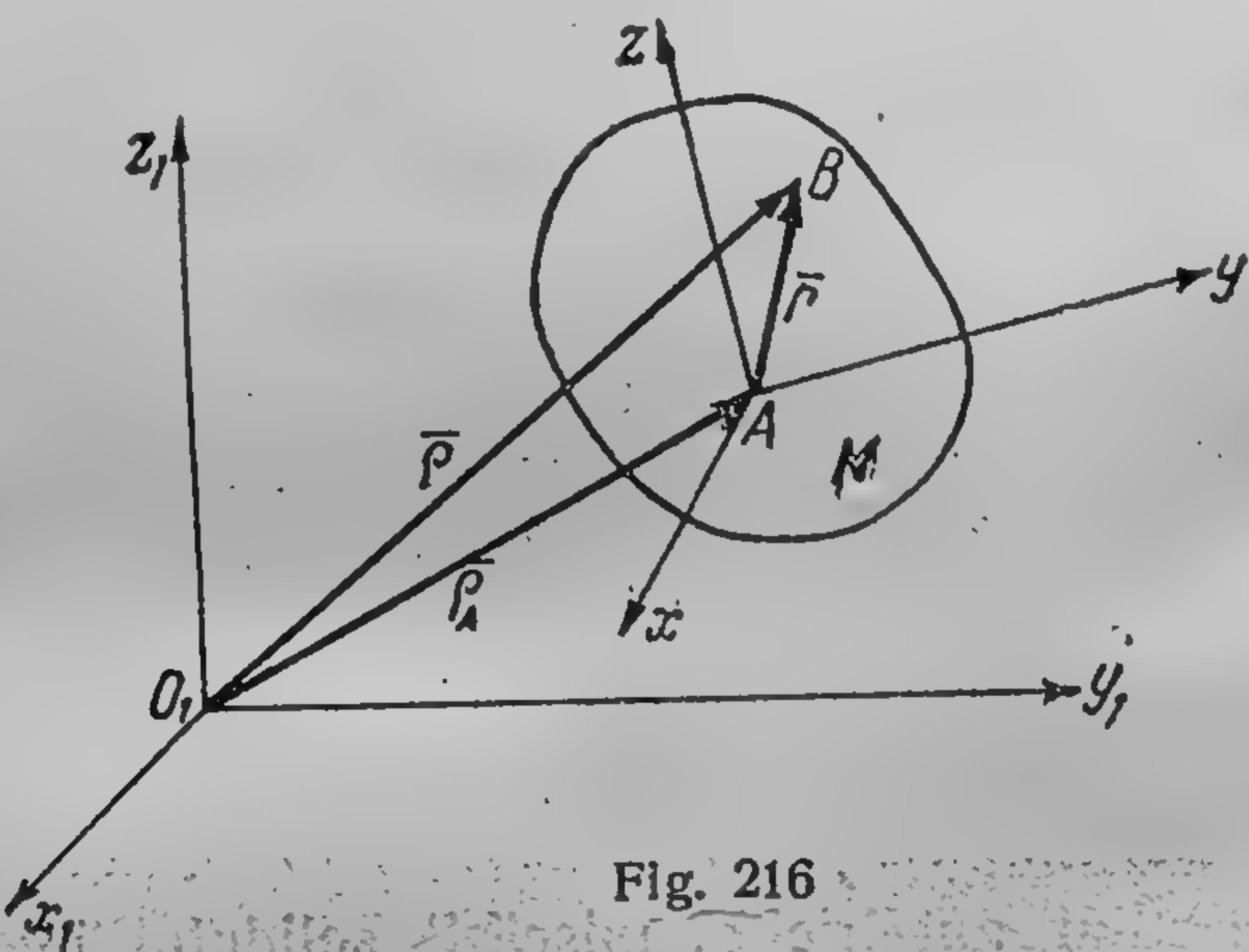
$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_A + \bar{r},$$

pe care am folosit-o frecvent (16.20). Pentru a avea vectorul viteză  $\bar{v}$  al punctului  $B$ , trebuie să derivăm în raport cu timpul  $t$ , vectorul  $\bar{\rho}$ ; vom obține:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$



Dar derivata  $\frac{d\vec{p}_A}{dt}$  este egală cu vectorul viteză al punctului A, pe care îl vom nota prin  $\vec{v}_A$ . În ce privește derivata  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ , deoarece modulul vectorului  $r$  este constant, această derivată reprezintă viteza mișcării de rotație a punctului B în raport cu punctul A, adică ea este egală cu  $\vec{\omega} \times r$ , unde  $\vec{\omega}$  este vectorul viteză unghi-



**Fig. 216**

lară instantanee dirijată pe axa instantanee de rotație, care trece prin punctul  $A$ . În acest fel, obținem formula (19.2), care ne este cunoscută din paragrafele precedente:

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad (22.1)$$

formula (19.2) diferă de formula (22.1) prin faptul că în formula (19.2) vectorul  $\bar{\omega}$  este perpendicular pe planul în care se produce mișcarea figurii plane, în timp ce în formula (22.1) vectorul  $\bar{\omega}$  poate avea o direcție arbitrară în spațiu.

Pentru a găsi accelerația  $\vec{a}$ , să calculăm derivatele vectoriale în raport cu timpul ambilor membri ai relației (22.1); vom avea:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

sau, notînd derivata  $\frac{d\bar{v}_A}{dt}$  prin  $\bar{a}_A$  și ținînd cont de formula (18.12), vom obține:

$$\bar{a} = \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + (\bar{\omega} \cdot \bar{r})\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}. \quad (22.2)$$



Nu este greu de trecut la formulele (22.1) și (22.2) la expresiile proiecțiilor pentru sistemele axelor de coordonate mobile și fixe. Notăm coordonatele punctelor  $A$  și  $B$  în raport cu axele  $O_1x_1y_1z_1$  prin  $(l, m, n)$  și  $(x_1, y_1, z_1)$ ; vom avea:

$$\bar{\rho} = \bar{i}_1 x_1 + \bar{j}_1 y_1 + \bar{k}_1 z_1; \quad \bar{\rho}_A = \bar{i}_1 l + \bar{j}_1 m + \bar{k}_1 n,$$

unde  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  sînt vectori unitari ai axelor sistemului fix de coordonate  $O_1x_1y_1z_1$ . De aici rezultă:

$$\bar{r} = \bar{i}_1 (x_1 - l) + \bar{j}_1 (y_1 - m) + \bar{k}_1 (z_1 - n);$$

apoi, introducînd proiecțiile vectorilor  $\bar{v}_A, \bar{a}_A, \bar{v}$  și  $\bar{a}$  pe axele  $O_1x_1y_1z_1$  de coordonate, vom obține:

$$\bar{v}_A = \bar{i}_1 (v_A)_{x_1} + \bar{j}_1 (v_A)_{y_1} + \bar{k}_1 (v_A)_{z_1}, \quad \bar{v} = \bar{i}_1 v_{x_1} + \bar{j}_1 v_{y_1} + \bar{k}_1 v_{z_1},$$

$$\bar{a}_A = \bar{i}_1 (a_A)_{x_1} + \bar{j}_1 (a_A)_{y_1} + \bar{k}_1 (a_A)_{z_1}, \quad \bar{a} = \bar{i}_1 a_{x_1} + \bar{j}_1 a_{y_1} + \bar{k}_1 a_{z_1}.$$

După aceasta putem scrie formula (22.1) sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{i}_1 v_{x_1} + \bar{j}_1 v_{y_1} + \bar{k}_1 v_{z_1} = \\ = \bar{i}_1 (v_A)_{x_1} + \bar{j}_1 (v_A)_{y_1} + \bar{k}_1 (v_A)_{z_1} + \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 - l & y_1 - m & z_1 - n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

sau

$$\left. \begin{aligned} v_{x_1} &= (v_A)_{x_1} + \omega_{y_1} (z_1 - n) - \omega_{z_1} (y_1 - m), \\ v_{y_1} &= (v_A)_{y_1} + \omega_{z_1} (x_1 - l) - \omega_{x_1} (z_1 - n), \\ v_{z_1} &= (v_A)_{z_1} + \omega_{x_1} (y_1 - m) - \omega_{y_1} (x_1 - l). \end{aligned} \right\} \quad (22.3)$$

Din formula (22.2) vom avea:

$$\begin{aligned} \bar{i}_1 a_{x_1} + \bar{j}_1 a_{y_1} + \bar{k}_1 a_{z_1} = \\ = \bar{i}_1 (a_A)_{x_1} + \bar{j}_1 (a_A)_{y_1} + \bar{k}_1 (a_A)_{z_1} + \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \frac{d\omega_{x_1}}{dt} & \frac{d\omega_{y_1}}{dt} & \frac{d\omega_{z_1}}{dt} \\ x_1 - l & y_1 - m & z_1 - n \end{vmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ [\omega_{x_1} (x_1 - l) + \omega_{y_1} (y_1 - m) + \omega_{z_1} (z_1 - n)] (\bar{i}_1 \omega_{x_1} + \bar{j}_1 \omega_{y_1} + \bar{k}_1 \omega_{z_1}) -$$

$$- \omega^2 [\bar{i}_1 (x_1 - l) + \bar{j}_1 (y_1 - m) + \bar{k}_1 (z_1 - n)];$$



de aici vom obține pentru proiecțiile accelerației pe axele fixe de coordonate, următoarele formule:

$$\left. \begin{aligned} a_{x_1} &= (a_A)_{x_1} + \frac{d\omega_{x_1}}{dt}(z_1 - n) - \frac{d\omega_{z_1}}{dt}(y_1 - m) + \\ &+ [\omega_{x_1}(x_1 - l) + \omega_{y_1}(y_1 - m) + \omega_{z_1}(z_1 - n)] \omega_{x_1} - \omega^2(x_1 - l), \\ a_{y_1} &= (a_A)_{y_1} + \frac{d\omega_{z_1}}{dt}(x_1 - l) - \frac{d\omega_{x_1}}{dt}(z_1 - n) + \\ &+ [\omega_{x_1}(x_1 - l) + \omega_{y_1}(y_1 - m) + \omega_{z_1}(z_1 - n)] \omega_{y_1} - \omega^2(y_1 - m), \\ a_{z_1} &= (a_A)_{z_1} + \frac{d\omega_{x_1}}{dt}(y_1 - m) - \frac{d\omega_{y_1}}{dt}(x_1 - l) + \\ &+ [\omega_{x_1}(x_1 - l) + \omega_{y_1}(y_1 - m) + \omega_{z_1}(z_1 - n)] \omega_{z_1} - \omega^2(z_1 - n). \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

Trecînd la axele mobile de coordonate  $Ax_1y_1z_1$ , vom nota prin  $(x, y, z)$  coordonatele punctului  $B$  și prin  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  vectorii unitari ai axelor mobile de coordonate. Deoarece:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z,$$

vom obține din formulele (22.1):

$$\bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z = \bar{i}(v_A)_x + \bar{j}(v_A)_y + \bar{k}(v_A)_z + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

sau

$$\left. \begin{aligned} v_x &= (v_A)_x + \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= (v_A)_y + \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= (v_A)_z + \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

La calculul proiecțiilor accelerației  $\bar{a}$  pe axele mobile de coordonate, este necesar să se țină seamă că:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{i} \frac{d\omega_x}{dt} + \bar{j} \frac{d\omega_y}{dt} + \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt},$$

deși vectorii unitari  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  vor fi și ei funcții de timp; aceasta s-a



demonstrat în § 88, cu ocazia deducerii formulei (20,12). Ținând seamă de acestea, vom obține:

$$\begin{aligned} \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z = & \bar{i}(a_A)_x + \bar{j}(a_A)_y + \bar{k}(a_A)_z + \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \frac{d\omega_x}{dt} & \frac{d\omega_y}{dt} & \frac{d\omega_z}{dt} \\ x & y & z \end{array} \right| + \\ & + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)(\bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z) - \omega^2(\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z), \end{aligned}$$

sau

$$\left. \begin{aligned} a_x &= (a_A)_x + \frac{d\omega_y}{dt}x - \frac{d\omega_z}{dt}y + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\omega_x - \omega^2 x, \\ a_y &= (a_A)_y + \frac{d\omega_z}{dt}x - \frac{d\omega_x}{dt}z + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\omega_y - \omega^2 y, \\ a_z &= (a_A)_z + \frac{d\omega_x}{dt}y - \frac{d\omega_y}{dt}x + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\omega_z - \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (22.6)$$

**Observație.** La deducția unei serii de formule din acest paragraf și din paragrafele precedente, găseam proiecțiile unui și aceluiași vector pe axele a două sisteme de coordonate — fix și mobil. Nu este greu de dovedit că, cunoscând proiecțiile unui vector oarecare, de exemplu, pe axele fixe de coordonate  $O_1x_1y_1z_1$ , se pot găsi proiecțiile acestui vector pe axele mobile de coordonate  $Axyz$  în funcție de cosinuzii unghiurilor dintre axele de coordonate. Vom nota prin  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ , cei nouă cosinuzi ai unghiurilor dintre axele de coordonate, conform tabelului cunoscut din geometria analitică:

	$O_1x_1$	$O_1y_1$	$O_1z_1$
$Ax$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$Ay$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$
$Az$	$\alpha''$	$\beta''$	$\gamma''$

Proiecțiile vectorilor unitari  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ai axelor  $Ax, Ay, Az$ , pe axele fixe  $O_1x_1y_1z_1$  sînt:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i} &= \bar{i}_1\alpha + \bar{j}_1\beta + \bar{k}_1\gamma, \\ \bar{j} &= \bar{i}_1\alpha' + \bar{j}_1\beta' + \bar{k}_1\gamma', \\ \bar{k} &= \bar{i}_1\alpha'' + \bar{j}_1\beta'' + \bar{k}_1\gamma''. \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$



Proiecțiile vectorului  $\bar{v}$  pe axele  $Axyz$  vor fi:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos(\bar{v}, Ax) = v \cos(\bar{v}, \bar{i}) = \bar{v} \cdot \bar{i} = v_{x_1}\alpha + v_{y_1}\beta + v_{z_1}\gamma, \\ v_y &= v \cos(\bar{v}, Ay) = v \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \bar{v} \cdot \bar{j} = v_{x_1}\alpha' + v_{y_1}\beta' + v_{z_1}\gamma', \\ v_z &= v \cos(\bar{v}, Az) = v \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \bar{v} \cdot \bar{k} = v_{x_1}\alpha'' + v_{y_1}\beta'' + v_{z_1}\gamma''. \end{aligned} \right\} \quad (22.8)$$

În același mod proiecțiile vectorului  $\bar{a}$  pe axele  $Axyz$ , vor avea următoarele expresii:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_{x_1}\alpha + a_{y_1}\beta + a_{z_1}\gamma, \\ a_y &= a_{x_1}\alpha' + a_{y_1}\beta' + a_{z_1}\gamma', \\ a_z &= a_{x_1}\alpha'' + a_{y_1}\beta'' + a_{z_1}\gamma''. \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

Vedem că am putea, cunoscînd, de exemplu, proiecțiile  $a_{x_1}$ ,  $a_{y_1}$ ,  $a_{z_1}$ , din formulele (22.4), să obținem proiecțiile  $a_x$ ,  $a_y$  și  $a_z$  nu pe calea pe care le-am obținut pînă acum, ci prin folosirea formulelor (22.9), care ar fi însă o cale mult mai dificilă.

Cu toate acestea, în acest fel trebuie procedat în majoritatea cazurilor la calculul proiecțiilor vitezei și accelerației punctului  $A$  pe axele mobile de coordonate  $Axyz$  prin folosirea formulelor (22.5) și (22.6). În adevăr, aceste proiecții pe axele fixe de coordonate  $O_1x_1y_1z_1$ , se vor obține direct prin diferențiere, și anume:

$$\begin{aligned} (v_A)_{x_1} &= \frac{dl}{dt}, & (v_A)_{y_1} &= \frac{dm}{dt}, & (v_A)_{z_1} &= \frac{dn}{dt}; \\ (a_A)_{x_1} &= \frac{d^2l}{dt^2}, & (a_A)_{y_1} &= \frac{d^2m}{dt^2}, & (a_A)_{z_1} &= \frac{d^2n}{dt^2}. \end{aligned}$$

De aici vom obține, folosind formulele (22.8) și (22.9), proiecțiile  $(v_A)_x$ ,  $(v_A)_y$ ,  $(v_A)_z$ ,  $(a_A)_x$ ,  $(a_A)_y$ ,  $(a_A)_z$ , pe care le vom introduce în formulele (22.5) și (22.6).

§ 100. Exemple. 73. Un solid execută două mișcări elicoidale. Axa elicoidală instantanee a primei mișcări coincide, în momentul considerat, cu axa fixă  $O_1x_1$ , iar axa elicoidală a celei de-a doua mișcări, coincide în același moment cu axa fixă  $O_1y_1$ . Prima mișcare are viteza unghiulară  $\omega_1$  și parametrul  $p_1$ , iar a doua mișcare are viteza unghiulară  $\omega_2$  și parametrul  $p_2$ . Să se găsească rototranslația rezultantă.

Noînd vitezele mișcărilor de translație în prima și a doua roto-translație prin  $\bar{v}_1$  și  $\bar{v}_2$ , vom avea:

$$\bar{v}_1 = p_1 \bar{\omega}_1, \quad \bar{v}_2 = p_2 \bar{\omega}_2.$$



Vom scrie ecuațiile axei centrale a sistemului, după formulele (21.10). Deoarece avem:

$$v_{x1} = v_1, \quad v_{y1} = v_2, \quad v_{z1} = 0,$$

$$\omega_{x1} = \omega_1, \quad \omega_{y1} = \omega_2, \quad \omega_{z1} = 0,$$

urmează că ecuațiile axei centrale, vor avea forma:

$$\frac{v_1 + z'_1 \omega_2}{\omega_1} = \frac{v_2 - z'_1 \omega_1}{\omega_2} = \frac{y'_1 \omega_1 - x'_1 \omega_2}{3}.$$

De aici găsim:

$$z'_1 = \frac{v_2 \omega_1 - v_1 \omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = (p_2 - p_1) \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

$$y'_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} x'_1.$$

Vedem că rototranslația rezultantă are axa mișcării elicoidale instantanee paralelă cu planul  $O_1 x_1 y_1$ , distanța între axă și plan fiind egală cu  $z'_1$ , axa fiind așezată în planul  $y'_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} x'_1$ . Viteza unghiulară instantanee este egală cu

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Cît privește viteza instantanee de translație, valoarea ei se determină prin formula:

$$v^2 = (v_1 + z'_1 \omega_2)^2 + (v_2 - z'_1 \omega_1)^2,$$

sau

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + z_1'^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2 z'_1 (v_1 \omega_2 - v_2 \omega_1).$$

De aici vom avea:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + (p_2 - p_1)^2 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + 2 (p_2 - p_1) \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} (p_1 - p_2) \omega_1 \omega_2,$$

adică

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - (p_2 - p_1)^2 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

74. Să se găsească proiecțiile pe axele de coordonate fixe și pe cele mobile ale vitezelor și accelerațiilor punctelor unui solid aflat în mișcare elicoidală; axa mișcării elicoidale coincide cu axa fixă  $O_1 z_1$ . Să examinăm sistemul fix de axe de coordonate  $O_1 x_1 y_1 z_1$  și sistemul mobil de axe de coordonate  $Axyz$ , la care punctul  $A$  rămîne pe axa  $O_1 z_1$ . Fie  $(O, O', c)$  coordonatele punctului  $A$ . Avem:

$$(v_A)_{x1} = 0, \quad (v_A)_{y1} = 0, \quad (v_A)_{z1} = v,$$

$$(a_A)_{x1} = 0, \quad (a_A)_{y1} = 0, \quad (a_A)_{z1} = a,$$

$$\omega_{x1} = \omega_x = 0, \quad \omega_{y1} = \omega_y = 0, \quad \omega_{z1} = \omega_z = \omega.$$



Notînd coordonatele unui punct oarecare  $B$  al solidului în raport cu axele  $O_1x_1y_1z_1$  prin  $(x_1, y_1, z_1)$ , din formulele (22.3) vom avea:

$$v_{x1} = -\omega y_1, \quad v_{y1} = \omega x_1, \quad v_{z1} = v,$$

iar din formulele (22.4), vom obține:

$$a_{x1} = -\frac{d\omega}{dt}y_1 - \omega^2x_1, \quad a_{y1} = \frac{d\omega}{dt}x_1 - \omega^2y_1, \quad a_{z1} = a$$

Prin urmare, pătratul vitezei punctului  $B$  va fi:

$$v^2 + \omega^2(x_1^2 + y_1^2),$$

iar pătratul accelerației punctului  $B$  va fi:

$$\left[ \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + \omega^4 \right] (x_1^2 + y_1^2) + a^2.$$

Aplicînd formulele (22.5) și (22.6), vom găsi:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = v$$

și

$$a_x = -\frac{d\omega}{dt}y - \omega^2x, \quad a_y = \frac{d\omega}{dt}x - \omega^2y, \quad a_z = a.$$

Pentru pătratul vitezei și pătratul accelerației punctului  $B$  în axele mobile de coordonate considerate vom avea:

$$v^2 + \omega^2(x^2 + y^2), \quad \left[ \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + \omega^4 \right] (x^2 + y^2) + a^2.$$

Evident, că:

$$v = \frac{dc}{dt}, \quad a = \frac{d^2c}{dt^2}.$$



## CAPITOLUL XXIII

### VITEZA ȘI ACCELERAȚIA UNUI PUNCT ÎN MIȘCARE RELATIVĂ. AXE MOBILE DE COORDONATE

§ 101. **Observații generale.** În capitolele precedente am examinat mai multe cazuri în care punctul se mișcă în raport cu sistemul mobil de referință, care se mișcă și el în raport cu un sistem de referință fix. Pentru prima dată ne-am întâlnit cu acest caz la sfârșitul § 64; apoi ne-am ocupat de el în §§ 66, 70, 90 etc. Am demonstrat și geometric și analitic regula paralelogramului vitezelor, din care rezultă că viteza mișcării compuse este suma vectorială a vitezelor mișcărilor componente. În acest capitol, vom adânci puțin problema obținerii vitezei mișcării compuse și vom studia amănunțit problema obținerii accelerației mișcării compuse; această din urmă problemă prezintă oarecare particularități al căror caracter a fost deja indicat în § 70. Deși numărul mișcărilor componente poate fi oarecare, totuși este suficient să se studieze mișcarea compusă formată din două mișcări componente, ca să avem apoi posibilitatea să rezolvăm problemele cu orice număr de mișcări componente. De aceea, vom studia în acest capitol numai cazul a două mișcări componente, iar în acest caz una din mișcărilor componente va fi *relativă*, iar cealaltă va fi o mișcare de *transport*. De exemplu, dacă punctul  $B$  se mișcă în sistemul  $S$ , iar sistemul  $S$  este de asemenea în mișcare, atunci mișcarea sistemului  $S$  va fi de transport, iar mișcarea punctului  $B$  în raport cu sistemul  $S$  va fi mișcare relativă.

În capitolele precedente ale cinematiei am studiat vitezele și accelerațiile, atât pentru puncte izolate cât și pentru punctele unui solid, și am găsit proiecțiile acestor viteze și accelerații, atât pe axe fixe de coordonate, cât și pe axe de coordonate mobile, dar aceste axe de coordonate mobile nu au avut mișcări arbitrare. Astfel, în cazul unui sistem de coordonate polare (§ 67, 71) și al triedrului fundamental (§ 72), mișcarea de translație a acestor axe de coordonate mobile și mișcarea lor de rotație se



determină complet prin caracterul traiectoriei punctului și prin mișcarea punctului pe această traiectorie, iar punctul mobil se găsește totdeauna în originea coordonatelor. În cazul studierii mișcării punctelor unui solid, axele de coordonate erau invariabil legate de solidul în mișcare, și de aceea, punctele solidului aveau coordonate constante în raport cu aceste axe. Totuși, trebuie lucrat și cu sisteme de coordonate mobile, în raport cu care punctele se deplasează sin-

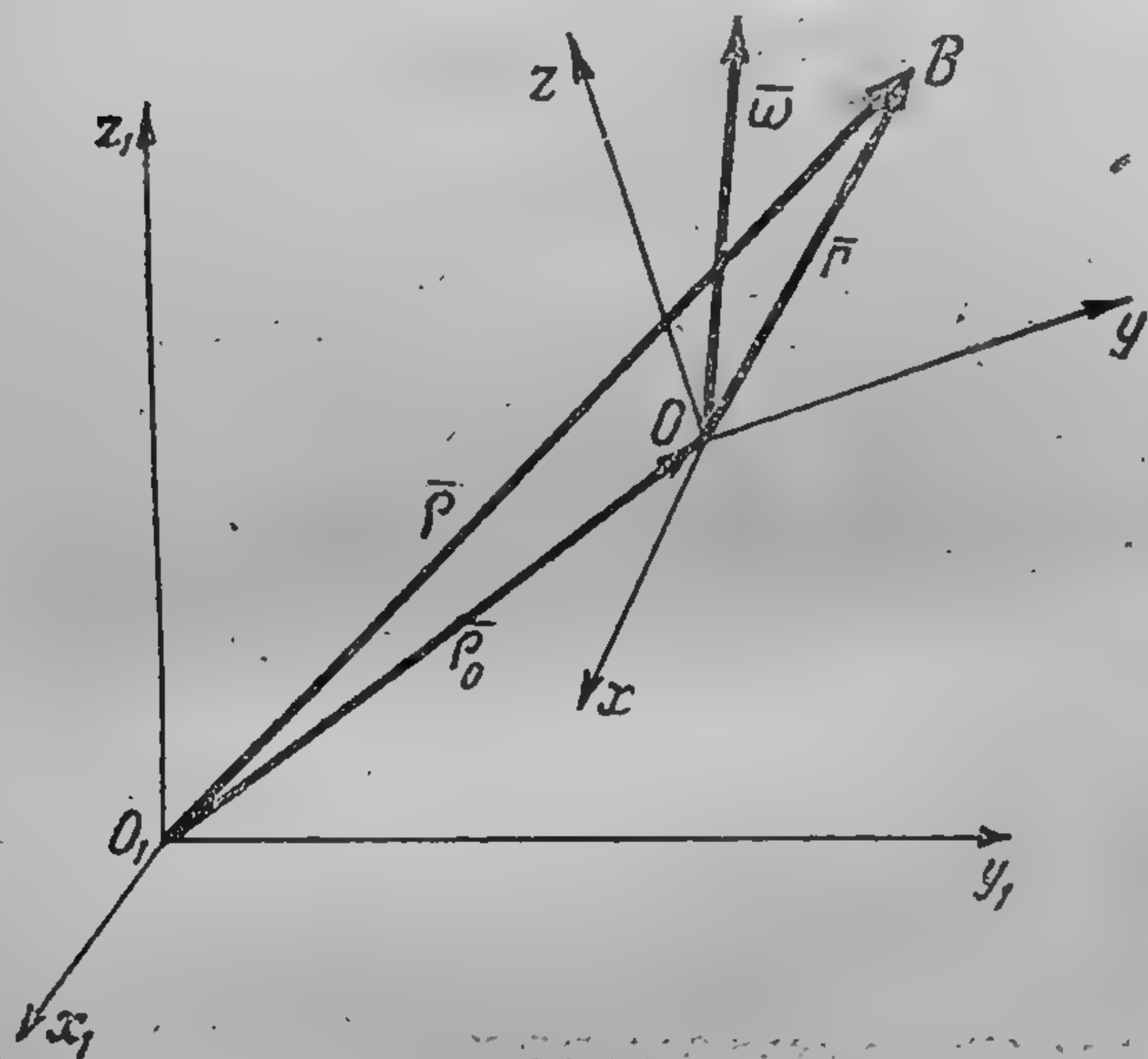


Fig. 217

gure, adică au în raport cu axele acestor sisteme, viteze și accelerații. În acest caz, mișcarea punctului poate fi privită ca o mișcare compusă, care constă din mișcarea de transport pe care ar avea-o punctul dacă l-am considera solidar legat de axele de coordonate mobile, și mișcarea relativă pe care o are punctul în raport cu axele mobile, considerate fixe. În acest fel, problema introducerii axelor de coordonate mobile nu este altceva decât problema mișcării compuse a punctului; din această cauză, capitolul de față poate fi denumit compunerea mișcărilor sau mișcarea relativă.

**§ 102. Viteza unui punct în mișcare absolută.** Fie dat sistemul  $O_1x_1y_1z_1$  de axe de coordonate fixe și sistemul  $Oxyz$  de axe de coordonate mobile. Mișcarea axelor  $Oxyz$  în orice moment se determină prin viteza  $\vec{v}_0$  a originii lor  $O$  și prin viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  a axelor mobile în jurul axei instantanee  $\Delta$ , care trece prin punctul  $O$ . Să examinăm un punct oarecare  $B$ , care are o mișcare arbitrară; ducem vectorii (fig. 217):

$$\overrightarrow{O_1B} = \vec{\rho}, \quad \overrightarrow{O_1O} = \vec{\rho}_0, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{r}.$$

Avem:

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}.$$



Pentru a găsi viteza punctului  $B$ , vom deriva vectorial în raport cu timpul ambele părți ale acestei relații; vom obține:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Dar derivata  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  reprezintă viteza  $\bar{v}$  a punctului  $B$  în mișcarea compusă; derivata  $\frac{d\bar{r}_0}{dt}$  reprezintă viteza  $\bar{v}_0$  a originii  $O$  a coordonatelor  $Oxyz$  în raport cu sistemul  $O_1x_1y_1z_1$ ; de aceea vom avea:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Pentru a descoperi semnificația derivatei  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  vom introduce coordonatele  $(x, y, z)$  ale punctului  $B$ , în raport cu axele de coordonate mobile  $Oxyz$ . Deoarece:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z,$$

unde  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  sînt vectorii unitari ai axelor de coordonate mobile, atunci vom avea:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt} + \frac{d\bar{i}}{dt}x + \frac{d\bar{j}}{dt}y + \frac{d\bar{k}}{dt}z.$$

Aplicînd formula (20.11), vom obține:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{i})x + (\bar{\omega} + \bar{j})y \times (\bar{\omega} \times \bar{k})z,$$

sau:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt} + \bar{\omega} \times (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z),$$

adică

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Introducem notațiile:

$$\tilde{\frac{d\bar{r}}{dt}} = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}. \quad (23.1)$$

Vectorul  $\tilde{\frac{d\bar{r}}{dt}}$  se numește *derivata locală* a vectorului  $\bar{r}$ . Vom avea:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \tilde{\frac{d\bar{r}}{dt}} + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (23.2)$$



În acest fel, vom obține:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (23.3)$$

Nu este greu de interpretat această expresie. Primii doi termeni sînt identici cu formula (22.1), adică ei reprezintă viteza punctului  $B$ , în ipoteza că punctul  $B$  este solidar legat cu axele de coordonate mobile; astfel, acești doi termeni reprezintă viteza de transport  $\bar{v}_{tr}$  a punctului  $B$ . Ultimul termen al formulei (23.3) reprezintă viteza punctului  $B$  în raport cu axele  $Oxyz$ , care se consideră fixe, adică acest termen reprezintă viteza relativă  $\bar{v}_{rel}$  a punctului  $B$ . În acest fel, avem:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{tr} &= \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}, \\ \bar{v}_{rel} &= \frac{d\bar{r}}{dt}, \\ \bar{v} &= \bar{v}_{tr} + \bar{v}_{rel}. \end{aligned} \right\} \quad (23.4)$$

Pentru a găsi proiecțiile vitezei  $\bar{v}$  pe axele de coordonate mobile  $Oxyz$ , vom introduce vectorii unitari  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ ; din formula (23.3) vom obține următoarea expresie:

$$\begin{aligned} \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z &= \bar{i}(v_0)_x + \bar{j}(v_0)_y + \bar{k}(v_0)_z + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \\ &+ \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Egalînd între ei coeficienții aceluiași vectori unitari din partea dreaptă și stîngă a ultimei expresii, vom ajunge la formulele căutate:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= (v_0)_x + \omega_y z - \omega_z y + \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= (v_0)_y + \omega_z x - \omega_x z + \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= (v_0)_z + \omega_x y - \omega_y x + \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

Conform celor indicate în paragraful precedent, aceste formule (23.5) rezolvînd problema proiecțiilor vitezelor mișcării compuse a punctului, rezolvă totodată și problema găsirii proiecțiilor vitezei punctului pe axele de coordonate mobile.



§ 103. Accelerația unui punct în mișcare absolută. Ca să obținem accelerația  $\vec{a}$  a punctului în mișcare absolută, vom deriva vectorial în raport cu timpul ambele părți ale ultimei formule (23.4). Vom obține:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt}.$$

La calculul derivatelor  $\frac{d\vec{v}_{tr}}{dt}$  și  $\frac{d\vec{v}_{rel}}{dt}$  vom întâlni acea particularitate despre care s-a vorbit în § 70; și anume, deoarece viteza mișcării relative influențează asupra variației vitezei de transport a punctului și viteza mișcării de transport influențează asupra variației vitezei relative a punctului, suma derivatelor vectoriale ale vitezelor de transport și relativă, va fi egală nu numai cu suma accelerațiilor datorită mișcării de transport și mișcării relative, ci, la această sumă de două accelerații, în general trebuie să se adauge și o a treia accelerație suplimentară, care se numește *accelerația lui Coriolis* (1792—1843). Pentru a lămurii mai bine această problemă, vom calcula accelerația unui punct, mai întâi pentru următorul caz particular foarte simplu al mișcării sale absolute.

Presupunem că în planul  $\pi$  se află semidreapta  $\Delta$  care trece printr-un punct fix  $O$  al acestui plan  $\pi$ , iar această semidreaptă  $\Delta$  se rotește în planul  $\pi$  în jurul punctului  $O$  cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . Pe semidreapta  $\Delta$  se află punctul material  $B$ , care are o mișcare accelerată față de semidreapta  $\Delta$  îndepărându-se de punctul  $O$ . Notăm prin  $r$  distanța dintre punctul  $B$  și punctul  $O$ . Dacă punctul  $B$  va fi fixat pe semidreapta  $\Delta$  atunci punctul  $B$  va descrie în mișcare uniformă un cerc cu raza egală cu  $r$ , și cu centrul în punctul  $O$ ; aceasta este mișcarea instantanee de transport a punctului  $B$ . În orice moment  $t$  punctul  $B$  în această mișcare de transport, va avea viteza  $v_{tr} = r\omega$  și accelerația  $a_{tr} = r\omega^2$ , dirijată către punctul  $O$  (§ 73). Dacă rotația semidreptei  $\Delta$  încetează și se lasă punctul  $B$  să se miște de-a lungul acestei semidrepte, atunci punctul  $B$  va avea o mișcare relativă; în orice moment  $t$ , în această mișcare relativă, punctul  $B$  va avea viteza  $v_{rel} = v$  și accelerația  $a_{rel} = \frac{dv}{dt}$ , dirijată de-a lungul semidreptei  $\Delta$  dinspre punctul  $O$ . Dacă, însă, concomitent semidreapta  $\Delta$  se va roti, iar punctul  $B$  se va mișca de-a lungul semidreptei  $\Delta$ , atunci punctul  $B$  va participa la o mișcare com-



pusă și, în acest caz, afară de accelerațiile  $a_{tr} = r\omega^2$  și  $a_{rel} = \frac{dv}{dt}$ , punctul  $B$  va avea și o accelerație Coriolis. În adevăr, să presupunem că în momentul  $t$ , punctul  $B$  se află în  $B_1$ , iar în momentul  $t + \Delta t$ , punctul  $B$  se află în  $B_2$ , așa cum se vede în fig. 218. Pentru a găsi creșterea vitezei relative în mișcarea compusă, vom muta vectorii vitezei relative  $\bar{v}_{rel}$  și  $\bar{v}'_{rel}$  corespunzători momentelor  $t$  și  $t + \Delta t$  în punctul comun  $K$ . Din fig. 219,  $a$ , se vede că vectorul  $\bar{v}'_{rel}$  se obține din vectorul  $\bar{v}_{rel}$  prin două creșteri geometrice  $v\Delta\theta$  și  $\Delta v$ . Împărțind aceste creșteri cu  $\Delta t$  și trecând la limită, vom obține doi vectori:  $v \frac{d\theta}{dt} = v\omega$  și  $\frac{dv}{dt}$ , vectorul  $v\omega$  este dirijat perpendicular pe semidreapta  $\Delta$  iar vectorul  $\frac{dv}{dt}$  este dirijat de-a lungul acestei semidrepte; evident, că mărimea  $\frac{dv}{dt}$  este accelerația relativă  $a_{rel}$  a punctului  $B$ . Pentru a găsi crește-

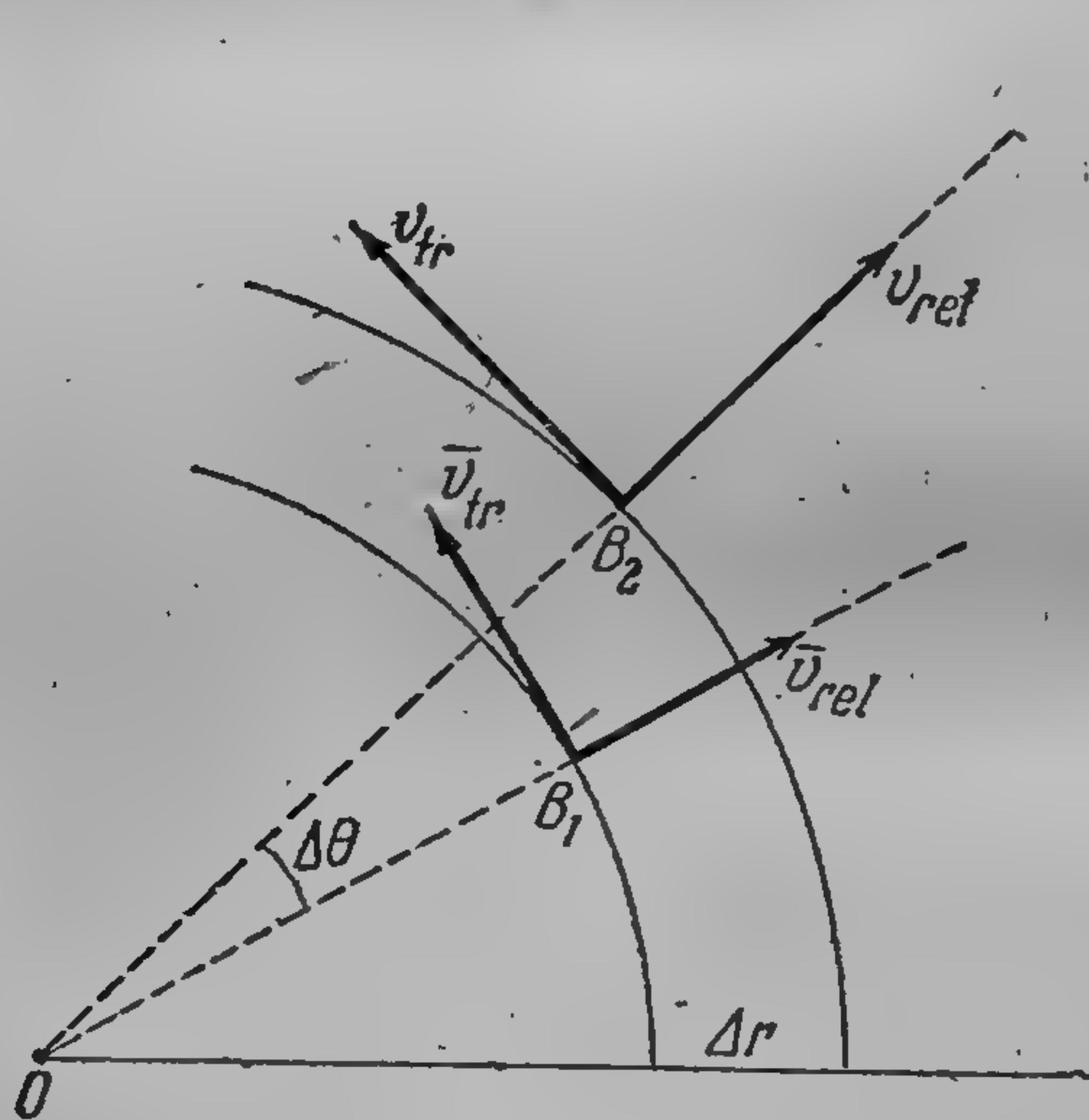


Fig. 218

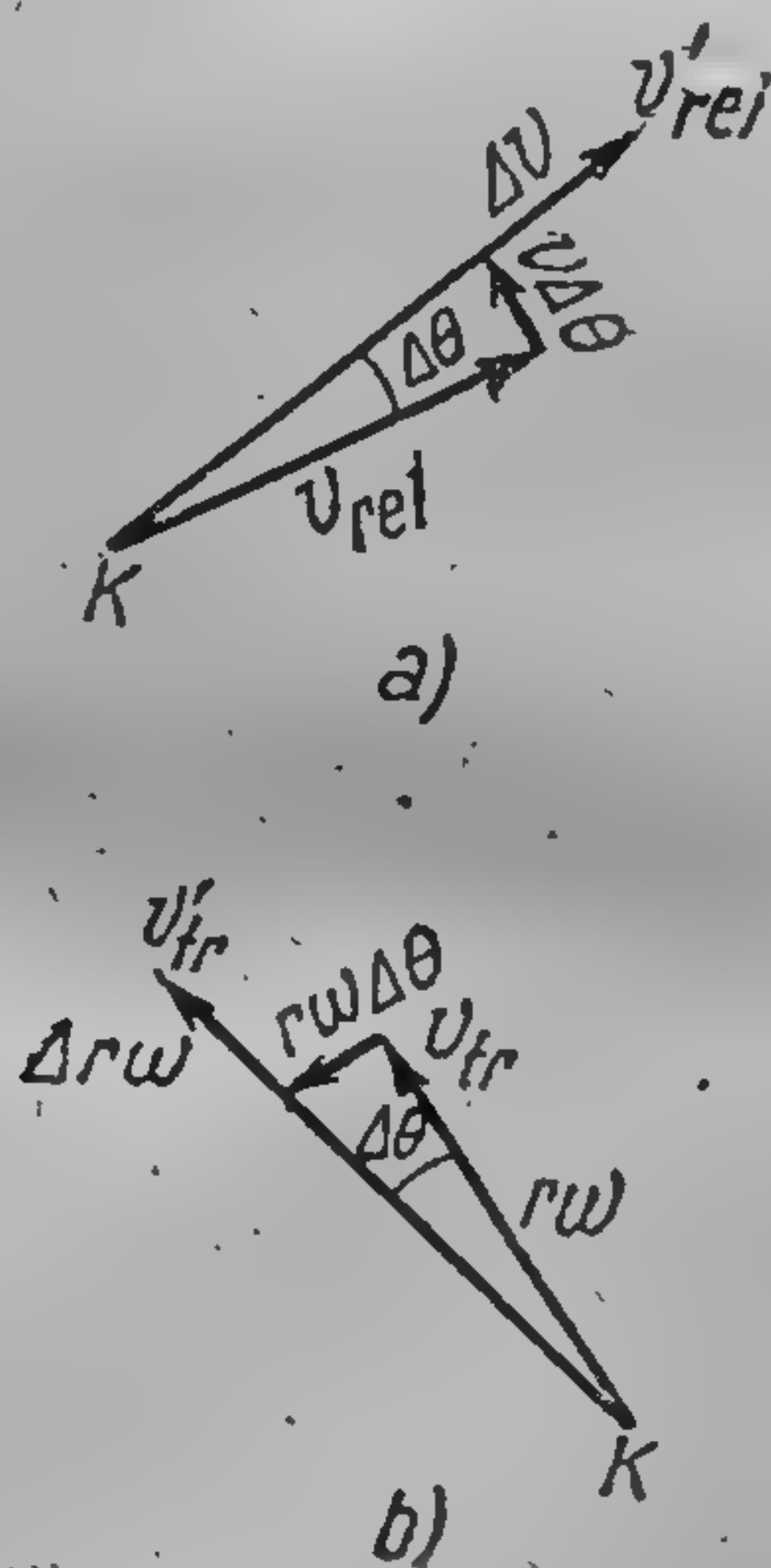


Fig. 219

rea vitezei de transport în mișcarea compusă, vom muta vectorii vitezei de transport  $v_{tr}$  și  $v'_{tr}$ , corespunzători momentelor  $t$  și  $t + \Delta t$ , în punctul comun  $K$ . Din fig. 219,  $b$ , se vede că vectorul  $v'_{tr}$  se obține din vectorul  $v_{tr}$  prin două creșteri geometrice  $r\omega\Delta\theta$  și  $\Delta r\omega$ . Împărțind aceste creșteri cu  $\Delta t$  și trecând la limită, vom obține doi vectori:  $r\omega \frac{d\theta}{dt} = r\omega^2$  și  $\frac{dr}{dt}\omega = v\omega$ , dintre care vec-



torul  $r\omega^2$  este dirijat de-a lungul semidreptei  $\Delta$  spre punctul  $O$ , iar vectorul  $v\omega$  este dirijat perpendicular pe semidreapta  $\Delta$ ; este evident, că mărimea  $r\omega^2$  este accelerația de transport. În acest fel, în cazul considerat al mișcării absolute punctului  $B$ , afară de accelerațiile  $a_{tr} = r\omega^2$  și  $a_{rel} = \frac{dv}{dt}$  îi mai apar încă două accelerații egale între ele ca mărime, direcție și sens,  $\omega v$ , una datorită vitezei relative și cealaltă datorită vitezei de transport, suma acestor accelerații dau o accelerație complementară  $2\omega v$ ; aceasta este accelerația lui Coriolis. Prin urmare, accelerația  $\bar{a}$  a punctului considerat este suma geometrică a trei accelerații: de transport, relativă și a lui Coriolis, adică:

$$\bar{a} = \bar{a}_{tr} + \bar{a}_{rel} + \bar{a}_{cor}.$$

Prima accelerație este dirijată de-a lungul lui  $\Delta$  spre punctul  $O$ , a doua accelerație este dirijată de-a lungul lui  $\Delta$  dinspre punctul  $O$ , a treia accelerație este dirijată perpendicular pe  $\Delta$  în sensul de rotire al acestei semidrepte.

După cazul particular cercetat, să trecem la deducția formulei generale, a accelerației punctului în mișcare absolută. La începutul paragrafului de față am dedus formula:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{rel}}{dt},$$

să calculăm ambele derivate ale părții din dreapta, bazându-ne pe primele două formule (23.4) și pe formula (23.2). Repetând raționamentele de la deducția formulei (23.2), vom obține ușor:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{tr}}{dt} &= \frac{d\bar{v}_{tr}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{tr}, \\ \frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} &= \frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}. \end{aligned} \right\} \quad (23.6)$$

Deoarece conform primei formule (23.4) avem  $\bar{v}_{tr} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$ , rezultă că:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Dar fie din formula (20.12), fie din formula (23.2), unde se consideră  $r = \bar{\omega}$ , rezultă că derivata locală a vectorului viteză



unghiulară  $\bar{\omega}$ , este egală cu derivata totală; de aceea, aplicind și formula (18.12), vom obține:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} + (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) \bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}.$$

Suma  $\frac{d\bar{v}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_0$  nu este altceva decât expresia dezvoltată a derivatei totale  $\frac{d\bar{v}_0}{dt}$ , care reprezintă accelerația  $\bar{a}_0$  a punctului  $O$ ; derivata locală  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  reprezintă viteza relativă  $\bar{v}_{rel}$  a punctului  $B$ . Prin urmare, relația precedentă, mai poate fi prezentată și astfel:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt} = \bar{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) \bar{\omega} - \omega^2 \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}.$$

Comparînd această formulă cu formula (22.2) rezultă că primii patru termeni ai ultimei formule reprezintă accelerația punctului  $B$ , în ipoteza că punctul  $B$  este solidar legat de axele  $Oxyz$ , adică acești patru termeni reprezintă accelerația de transport  $\bar{a}_{tr}$  a punctului  $B$ ; în acest fel, avem:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt} = \bar{a}_{tr} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}. \quad (23.7)$$

Formula (23.7) confirmă indicația dată mai înainte că variația vitezei de transport a punctului, depinde, în general, și de viteza mișcării relative.

Folosind formula a doua (23.6) și observînd că din formula a doua (23.4) avem  $\bar{v}_{rel} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ , vom obține:

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}.$$

Deoarece a doua derivată locală reprezintă accelerația relativă  $\bar{a}_{rel}$  a punctului  $B$ , găsim:

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} = \bar{a}_{rel} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}. \quad (23.8)$$

Formula (23.8) confirmă că, așa cum s-a indicat mai sus, la variația vitezei relative a punctului, influențează, de asemenea, în



general, și viteza de transport, și anume, viteza lui unghiulară. Din formulele (23.7) și (23.8) vom găsi:

$$\frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}.$$

În acest fel, ajungem la formula definitivă:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}, \quad (23.9)$$

unde:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_{tr} &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}, \\ \vec{a}_{rel} &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \\ \vec{a}_{cor} &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

Știm că viteza  $\vec{v}$  a mișcării absolute a punctului este egală cu suma vectorială a vitezei de transport și a celei relative, adică  $\vec{v} = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rel}$ . Vedem că, în general, pentru accelerații nu are loc o lege analogă, deoarece în afară de suma vectorială a celor doi termeni  $\vec{a}_{tr} + \vec{a}_{rel}$ , partea dreaptă a formulei (23.9) mai are și un al treilea termen  $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ . Acest termen suplimentar se numește accelerația lui Coriolis. În acest fel, găsim:

*Accelerația lui Coriolis este egală cu dublul produsului vectorial dintre viteza unghiulară și viteza relativă a punctului.*

De aici, pentru modulul accelerației lui Coriolis, obținem:

$$\vec{a}_{cor} = 2\omega \vec{v}_{rel} \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_{rel}}). \quad (23.11)$$

Pentru a cunoaște mărimea și direcția accelerației lui Coriolis, trebuie mutați în același punct vectorii viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  și viteza relativă  $\vec{v}_{rel}$ , trebuie determinat produsul lor vectorial și amplificat cu doi; vectorul obținut va reprezenta accelerația lui Coriolis. Este ușor de văzut că

*Accelerația lui Coriolis este totdeauna dirijată în sensul de mișcare al extremității vectorului  $\vec{v}_{rel}$ , sub acțiunea vitezei unghiulare  $\vec{\omega}$ .*



Evident că accelerația lui Coriolis va fi egală cu zero dacă vom avea: fie viteza unghiulară egală cu zero, fie viteza relativă a punctului egală cu zero, fie vectorul viteză relativă a punctului este paralel cu vectorul viteză unghiulară.

În acest fel, dacă punctul ia parte la două mișcări: la mișcarea de transport și la cea relativă, atunci viteza lui se compune geometric din două viteze: de transport și relativă, dar accelerația lui se compune în general din trei accelerații: de transport, relativă și Coriolis.

Trecînd de la formula vectorială (23.9) la proiecțiile accelerației pe axe de coordonate mobile  $Oxyz$ , vom obține:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{d(v_0)_x}{dt} + \omega_y(v_0)_z - \omega_z(v_0)_y + \frac{d\omega_y}{dt}z - \frac{d\omega_z}{dt}y + \\ &+ \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x + 2\left(\omega_y \frac{dz}{dt} - \omega_z \frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ a_y &= \frac{d(v_0)_y}{dt} + \omega_z(v_0)_x - \omega_x(v_0)_z + \frac{d\omega_z}{dt}x - \frac{d\omega_x}{dt}z + \\ &+ \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y + 2\left(\omega_z \frac{dx}{dt} - \omega_x \frac{dz}{dt}\right) + \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{d(v_0)_z}{dt} + \omega_x(v_0)_y - \omega_y(v_0)_x + \frac{d\omega_x}{dt}y - \frac{d\omega_y}{dt}x + \\ &+ \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z + 2\left(\omega_x \frac{dy}{dt} - \omega_y \frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (23.12)$$

Conform celor arătate la sfîrșitul § 101, formulele (23.12), rezolvînd problema proiecțiilor accelerației mișcării compuse a unui punct, rezolvă totodată și problema aflării proiecțiilor accelerației punctului pe axe mobile de coordonate.

Formulele (23.12) se pot obține și pe calea următoare. Avem:  $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ ; descompunînd expresia din partea dreaptă, după formula (23.2), vom obține:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (23.13)$$

Deoarece:

$$\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z, \quad \bar{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z, \quad \bar{\omega} = \bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z,$$



vom avea:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x. \end{aligned} \right\} \quad (23.14)$$

Este suficient să se introducă în formulele (23.14) valorile proiecțiilor vitezei din formulele (23.5), pentru a ajunge la formulele (23.12). În cazul unor probleme simple, această cale este foarte ușoară și duce uneori mai simplu la rezultat, decât aplicarea formulelor generale (23.12).

**§ 104. Folosirea axelor de coordonate, invariabil legate cu pământul.** Pământul descrie în aproximativ 365,25 zile o curbă închisă în jurul soarelui, apropiată de o circumferință cu raza egală cu 150 000 000 km; deoarece această mișcare a pământului este apropiată de una uniformă, atunci în 1 s pământul parcurge circa 30 km. În acest fel, se poate considera că viteza pământului în mișcarea sa în jurul soarelui este cu aproximație uniformă și egală cu circa 30 km/s. Dacă se duc tangentele la capetele arcului de cerc pe care îl descrie pământul în mișcarea sa în jurul soarelui în 1 s, atunci unghiul dintre aceste tangente va fi egal cu 0",041, adică drumul parcurs de pământ în jurul soarelui într-o secundă se poate considera aproape rectilinie. Prin urmare, într-un interval mic de timp, mișcarea pământului în jurul soarelui se poate considera rectilinie și uniformă. Dar din fizică, din principiul inerției, se știe că peste orice mișcare se poate suprapune totdeauna o mișcare uniformă rectilinie, fără a perturba mișcarea inițială. În acest fel, orice mișcare care se produce pe pământ într-un interval de timp mic, se produce la fel ca și când pământul nu s-ar mișca în jurul soarelui. Prin urmare, în orice problemă tehnică, la studiul mecanic al echilibrului și al mișcării obiectelor materiale, putem neglija mișcarea pământului în jurul soarelui. Cu atât mai mult se poate neglija mișcarea soarelui, deoarece cercetările astronomice nu ne dau nici cele mai mici indicații asupra curburii traiectoriei soarelui în spațiu, nici asupra neuniformității mișcării soarelui. În acest fel, vom lua în considerare numai rotația pământului în jurul axei sale și vom examina expresiile vitezelor și accelerațiilor absolute ale punctelor în raport



vom avea:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x. \end{aligned} \right\} \quad (23.14)$$

Este suficient să se introducă în formulele (23.14) valorile proiecțiilor vitezei din formulele (23.5), pentru a ajunge la formulele (23.12). În cazul unor probleme simple, această cale este foarte ușoară și duce uneori mai simplu la rezultat, decât aplicarea formulelor generale (23.12).

**§ 104. Folosirea axelor de coordonate, invariabil legate cu pământul.** Pământul descrie în aproximativ 365,25 zile o curbă închisă în jurul soarelui, apropiată de o circumferință cu raza egală cu 150 000 000 km; deoarece această mișcare a pământului este apropiată de una uniformă, atunci în 1 s pământul parcurge circa 30 km. În acest fel, se poate considera că viteza pământului în mișcarea sa în jurul soarelui este cu aproximație uniformă și egală cu circa 30 km/s. Dacă se duc tangentele la capetele arcului de cerc pe care îl descrie pământul în mișcarea sa în jurul soarelui în 1 s, atunci unghiul dintre aceste tangente va fi egal cu 0",041, adică drumul parcurs de pământ în jurul soarelui într-o secundă se poate considera aproape rectilie. Prin urmare, într-un interval mic de timp, mișcarea pământului în jurul soarelui se poate considera rectilie și uniformă. Dar din fizică, din principiul inerției, se știe că peste orice mișcare se poate suprapune totdeauna o mișcare uniformă rectilie, fără a perturba mișcarea inițială. În acest fel, orice mișcare care se produce pe pământ într-un interval de timp mic, se produce la fel ca și când pământul nu s-ar mișca în jurul soarelui. Prin urmare, în orice problemă tehnică, la studiul mecanic al echilibrului și al mișcării obiectelor materiale, putem neglija mișcarea pământului în jurul soarelui. Cu atât mai mult se poate neglija mișcarea soarelui, deoarece cercetările astronomice nu ne dau nici cele mai mici indicații asupra curburii traiectoriei soarelui în spațiu, nici asupra neuniformității mișcării soarelui. În acest fel, vom lua în considerare numai rotația pământului în jurul axei sale și vom examina expresiile vitezelor și accelerațiilor absolute ale punctelor în raport



cu axele de coordonate, legate invariabil cu pământul, care se rotește în jurul axei sale.

Neglijând turtirea pământului, îl vom considera ca o sferă, de rază  $R=6\,366\,000$  m. Deoarece pământul se rotește în jurul axei sale într-o zi solară, viteza unghiulară  $\omega$  de rotație a pământului este egală cu  $\omega = \frac{2\pi}{86\,164} = 0,00007292$  rad/s; rotația pământului în jurul axei se produce de la apus spre răsărit. Viteza unui punct, aflat în repaus pe suprafața pământului, datorită rotației pământului în jurul axei sale,

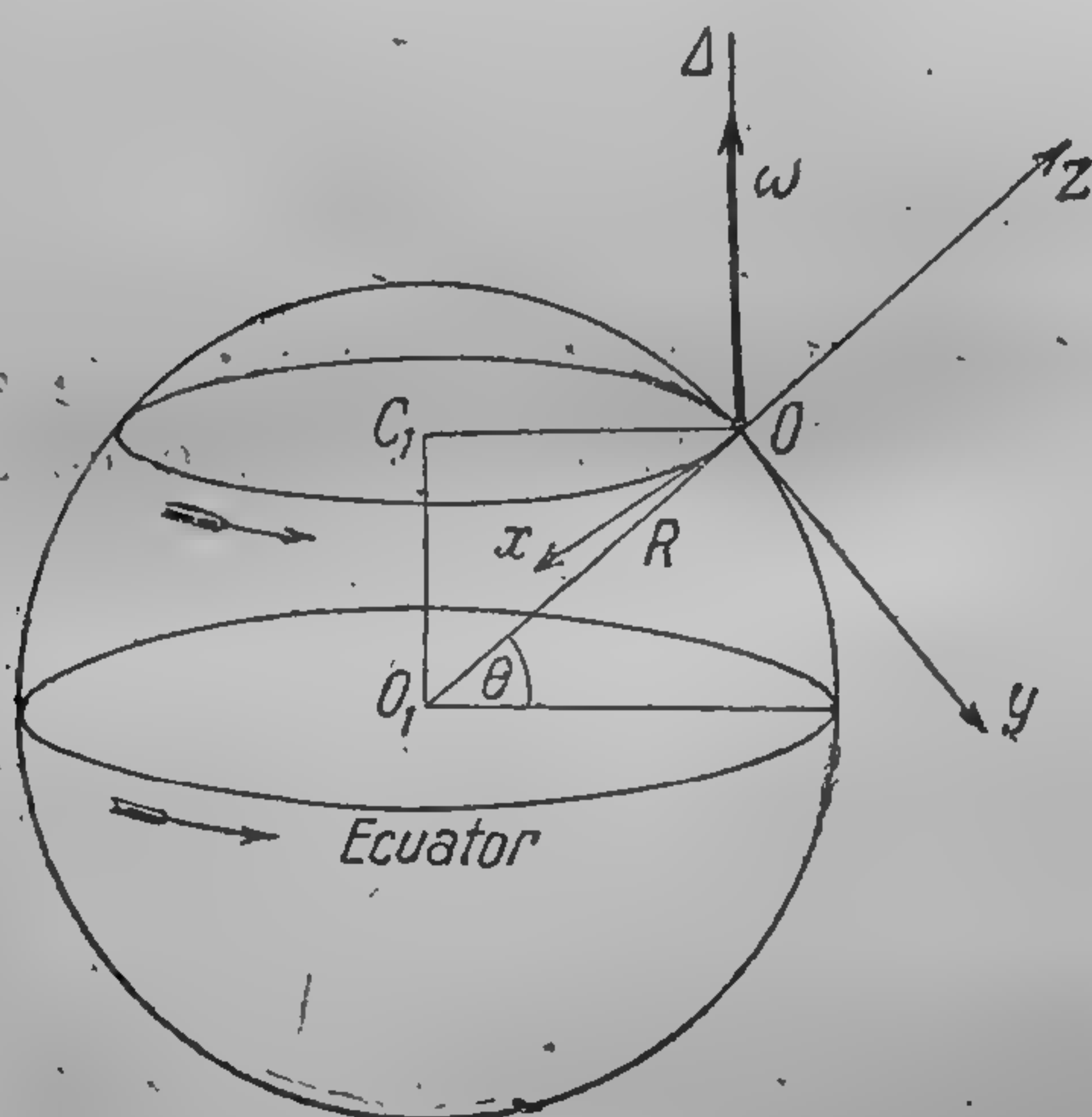


Fig. 220

își va modifica direcția sa într-o secundă cu  $15'',04$ , în timp ce datorită mișcării pământului în jurul soarelui variația direcției vitezei într-o secundă este egală, după cum am văzut, numai cu  $0'',041$ ; în acest fel, ne putem aștepta că observând mișcările corpurilor materiale la suprafața pământului, în unele cazuri va fi posibil să se observe influența rotației pământului în jurul axei sale, asupra acestor mișcări.

Să așezăm axele de coordonate  $Oxyz$  pe suprafața pământului în felul următor: luăm originea  $O$  a coordonatelor pe o paralelă a pământului corespunzătoare unei latitudini oarecare  $\theta$ . Axa  $Oz$  o vom dirija pe verticală în sus; axa  $Oy$  o vom dirija de-a lungul meridianului spre sud, iar axa  $Ox$  o vom dirija spre apus după tangenta la paralelă (fig. 220). Punctul  $O$  are viteza — egală ca modul cu  $\omega \cdot C_1O$ , unde  $C_1O$  este raza paralelei — și dirijată de-a lungul axei  $Ox$  în sensul absciselor negative.

Din fig. 220 avem:

$$C_1O = R \cos \theta.$$

Prin urmare, vom obține:

$$(v_0)_x = -\omega R \cos \theta,$$

$$(v_0)_y = 0,$$

$$(v_0)_z = 0.$$



Deoarece axele de coordonate  $Oxyz$  se rotesc o dată cu pământul, rezultă că vom obține axa lor instantanee de rotație ducând prin punctul  $O$  o dreaptă, paralelă la axa de rotație a pământului; pe această axă instantanee trebuie să se figureze vectorul  $\bar{\omega}$  în sus, ceea ce corespunde cu rotația pământului de la dreapta spre stînga. Din fig. 220 vedem că vectorul  $\bar{\omega}$  formează cu axa  $Oz$  un unghi egal cu  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , cu axa  $Oy$  unghiul egal cu  $\pi - \theta$  iar cu axa  $Ox$  un unghi egal cu  $\frac{\pi}{2}$ . Prin urmare, vom avea:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ \omega_y &= \omega \cos (\pi - \theta) = -\omega \cos \theta, \\ \omega_z &= \omega \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \omega \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (23.15)$$

Din formulele (23.5) vom obține:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\omega R \cos \theta - \omega z \cos \theta - \omega y \sin \theta + \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= \omega x \sin \theta + \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= \omega x \cos \theta + \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (23.16)$$

Pentru a obține proiecțiile accelerației, ne vom folosi de formulele (20.14), cărora, ținînd seamă de formulele (23.15), li se poate da următoarea formă:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} - \omega v_z \cos \theta - \omega v_y \sin \theta,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega v_x \sin \theta,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} + \omega v_x \cos \theta.$$



Introducând în aceste trei relații expresiile (23.16) pentru proiecțiile vitezei și efectuând reducerea, vom găsi:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \left( \cos \theta \frac{dz}{dt} + \sin \theta \frac{dy}{dt} \right) - \omega^2 x, \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega \sin \theta \frac{dx}{dt} - \omega^2 R \sin \theta \cos \theta - \omega^2 \sin \theta (y \sin \theta + z \cos \theta), \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega \cos \theta \frac{dx}{dt} - \omega^2 R \cos \theta - \omega^2 \cos \theta (y \sin \theta + z \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (23.17)$$

Presupunând că punctul este solidar legat de axele de coordonate  $Oxyz$ , trebuie să considerăm constante coordonatele  $x, y, z$ , ale punctului; atunci, din formulele (23.17) vom obține proiecțiile ac-

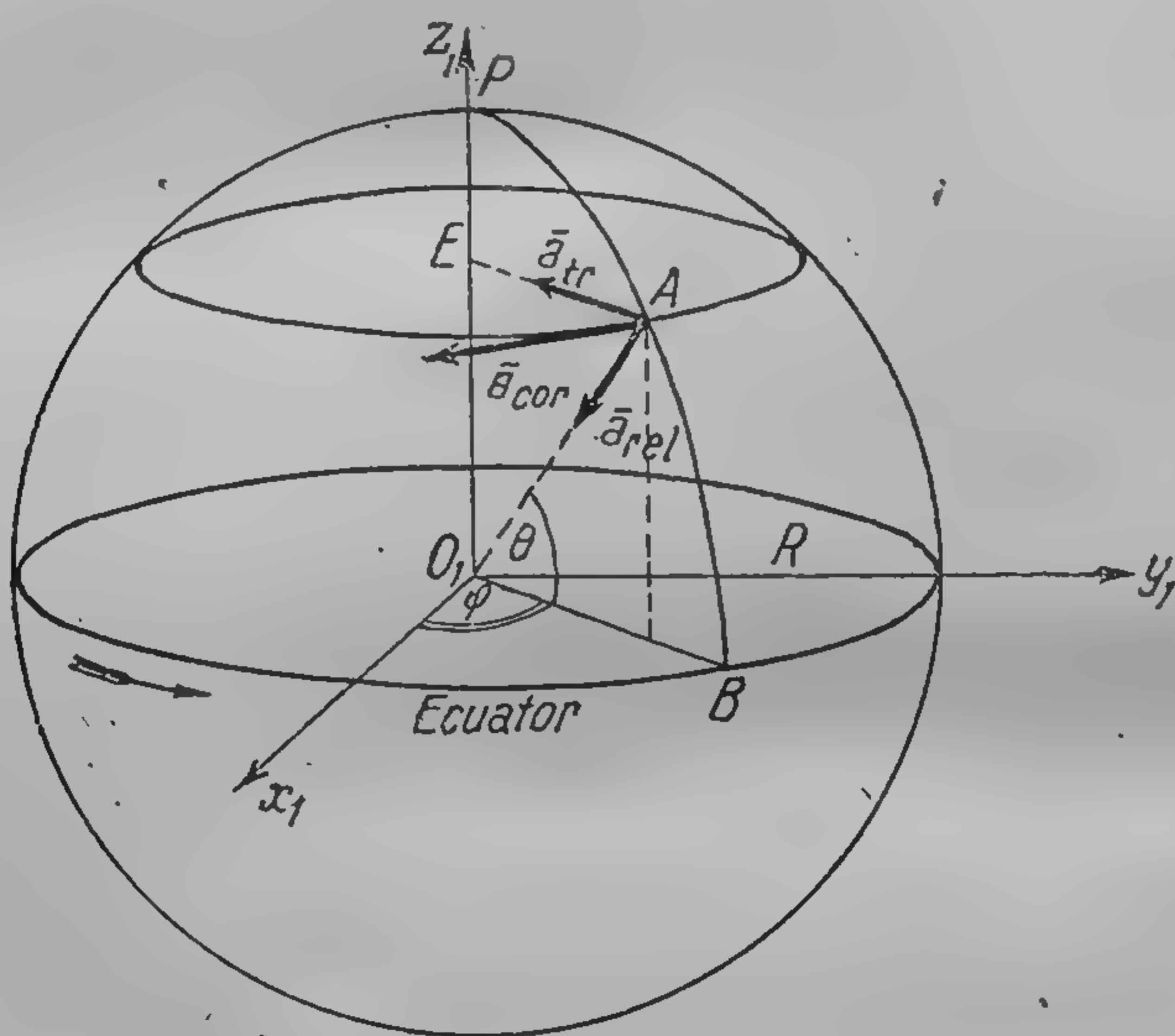


Fig. 221

celerației de transport. Presupunând că axele de coordonate sînt fixe, trebuie să punem în formulele (23.17)  $\omega = 0$ ; atunci din aceste formule vom obține proiecțiile accelerației relative. Părțile rămase din formula (23.17), ce au coeficientul 2, vor fi proiecțiile accelerației lui Coriolis.

Să mai examinăm și următoarea problemă referitoare la mișcarea unui punct pe suprafața pămîntului. Să presupunem, că



punctul  $A$  se mișcă uniform spre pol, de-a lungul meridianului  $BAP$ . Vom construi sistemul fix de coordonate  $O_1x_1y_1z_1$  așa cum se arată în fig. 221. Introducem coordonatele polare ale punctului  $A$ , care vor fi:  $R$  — raza pământului,  $\Theta$  — latitudinea punctului  $A$  și  $\varphi$  — longitudoinea punctului  $A$ . Deoarece punctul  $A$  se mișcă uniform de-a lungul meridianului,  $\Theta = \mu t$ ; deoarece pământul se rotește uniform în jurul axei sale, avem  $\varphi = \omega t$ , unde  $\omega$  este viteza unghiulară de rotație a pământului. Dacă punctul  $A$  nu s-ar mișca de-a lungul meridianului, atunci ar avea numai o mișcare de transport, în care punctul  $A$  ar descrie un cerc paralel cu ecuatorul cu raza  $AE = R \cos \Theta$ . Prin urmare, accelerația de transport a punctului  $A$  este egală cu  $\omega^2 R \cos \Theta$  și dirijată după raza cercului paralel cu ecuatorul către centrul lui. Dacă pământul nu s-ar roti în jurul axei sale, și punctul  $A$  s-ar mișca de-a lungul meridianului, punctul  $A$  ar avea o accelerație relativă egală cu  $\mu^2 R$  și dirijată de-a lungul razei pământului spre centrul lui. Dacă punctul  $A$  participă la ambele mișcări, el va mai avea și a treia accelerație și anume accelerația lui Coriolis. Din fig. 222 se vede că unghiul format de vectorul viteză relativă al punctului  $A$  și vectorul viteză unghiulară  $\bar{\omega}$ , este egal cu latitudinea punctului  $A$ ; prin urmare, modulul accelerației lui Coriolis va fi egal cu  $2\omega v_{rel} \sin \Theta = 2\omega \mu R \sin \Theta$ . Această accelerație este dirijată în sensul de mișcare al extremității vectorului  $\bar{v}_{rel}$ , sub acțiunea vitezei unghiulare  $\bar{\omega}$  adică în cazul fig. 222, perpendicular pe planul desenului, în sensul către cititor. Aceleași rezultate se pot obține calculând direct derivata a doua în raport cu timpul coordonatelor  $x_1, y_1, z_1$  ale punctului  $A$ , față de sistemul axelor de coordonate fixe  $O_1x_1y_1z_1$ . Avem:

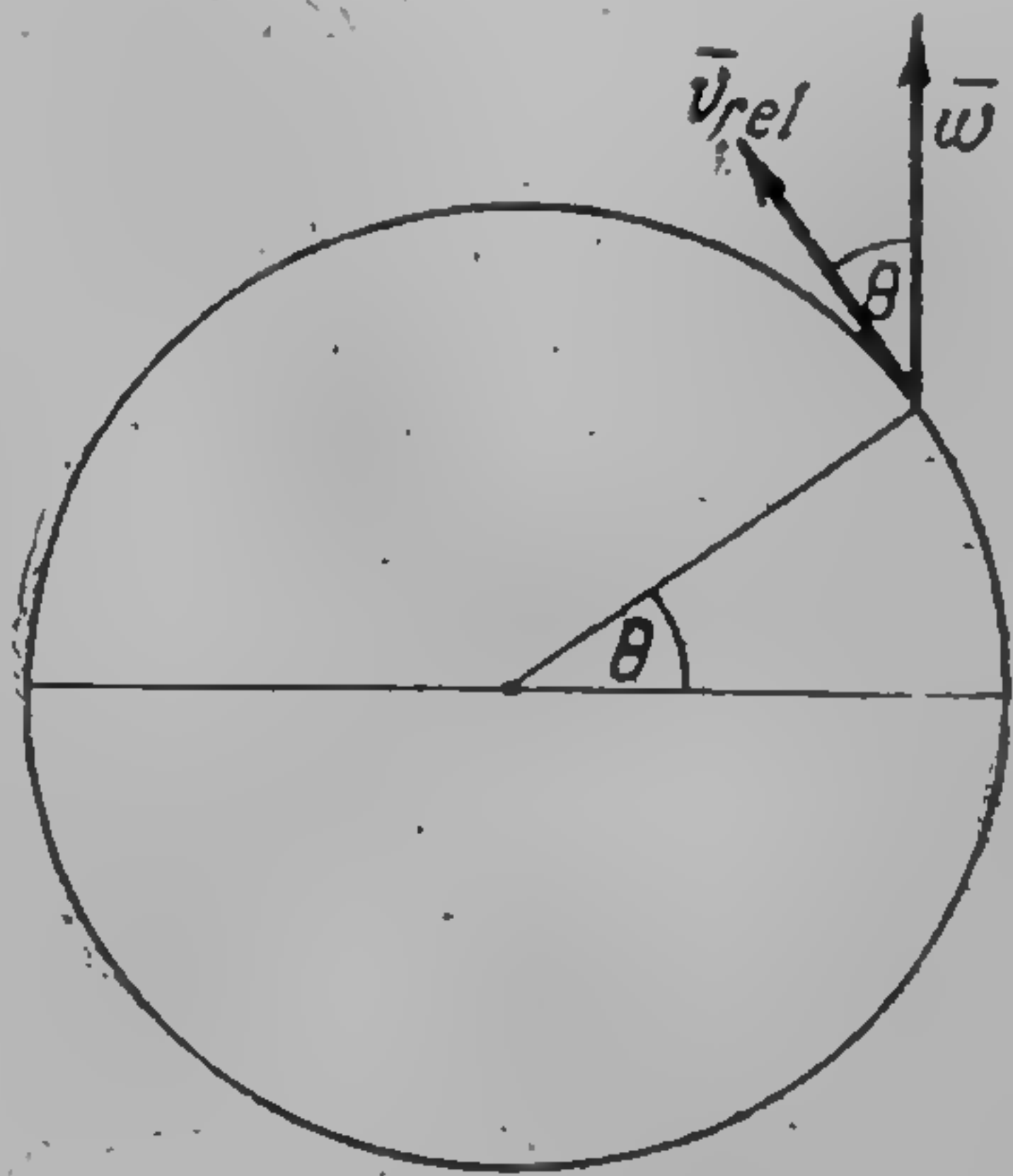


Fig. 222

$$x_1 = R \cos \Theta \cos \varphi = R \cos \mu t \cos \omega t,$$

$$y_1 = R \cos \Theta \sin \varphi = R \cos \mu t \sin \omega t,$$

$$z_1 = R \sin \Theta = R \sin \mu t.$$



De aceea, vom avea:

$$a_{x_1} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\mu^2 R \cos \Theta \cos \varphi - \omega^2 R \cos \Theta \cos \varphi + 2\mu\omega R \sin \Theta \sin \varphi,$$

$$a_{y_1} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\mu^2 R \cos \Theta \sin \varphi - \omega^2 R \cos \Theta \sin \varphi + 2\mu\omega R \sin \Theta \cos \varphi,$$

$$a_{z_1} = \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\mu^2 R \sin \Theta.$$

Vedem că accelerația  $\bar{a}$  este suma vectorială a celor trei accelerații, care formează cu axele de coordonate  $O_1x_1y_1z_1$  unghiuri, aî căror cosinusi sînt egali cu:

accelerația	$O_1x_1$	$O_1y_1$	$O_1z_1$
$\mu^2 R$	$-\cos \Theta \cos \varphi$	$-\cos \Theta \sin \varphi$	$-\sin \Theta$
$\omega^2 R \cos \Theta$	$-\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
$2\mu\omega R \sin \Theta$	$+\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	0

Prima accelerație este accelerația relativă dirijată spre centrul pămîntului de-a lungul razei sale; a doua accelerație este accelerația de transport, situată în planul paralelei și dirijată după raza paralelei, spre centrul ei; a treia accelerație este accelerația lui Coriolis, situată în planul paralelei, de-a lungul tangentei la paralelă, în sens opus sensului de rotație al pămîntului.

Vedem că accelerația lui Coriolis depinde de latitudinea locului, modulul său fiind egal cu zero la ecuator, unde avem  $\Theta=0$  și atingînd valoarea maximă  $2\mu\omega R$  la pol, unde avem  $\Theta=\frac{\pi}{2}$ . Grafic, funcția acestei accelerații se reprezintă printr-o sinusoidă, arătată în fig. 223, pe care  $PABP'$  este lungimea meridianului punctului  $A$ . În emisfera sudică, latitudinea  $\Theta$  este negativă și de aceea accelerația  $\bar{a}_{cor}$  este dirijată în sens contrar. Să presupunem, de exemplu, că într-un rîu apa curge în emisfera nordică, de la sud spre nord; în acest caz, după cum știm, particulele de apă trebuie să capete accelerația  $\bar{a}_{cor}$ , dirijată de la dreapta spre stînga (fig. 223). Această accelerație imprimată particulelor de apă de către malul rîului, împinge spre stînga particulele de apă care se apropie de el. De aceea, malul drept al rîului trebuie să fie ros de apă. Prin urmare, malul drept al rîului trebuie să fie abrupt. Dacă rîul curge de la nord spre sud tot în emisfera nordică, viteza unghiulară  $\mu$  va fi negativă și accelerația lui Coriolis trebuie să fie de sens opus, așa cum se



vede din fig. 224. În acest caz se va roade din nou malul drept al râului, care în consecință va fi abrupt. În emisfera sudică fenomenul se petrece invers. Această proprietate a râurilor, clarificată de academicianul rus Karl Maximovici Ber (1792—1876),

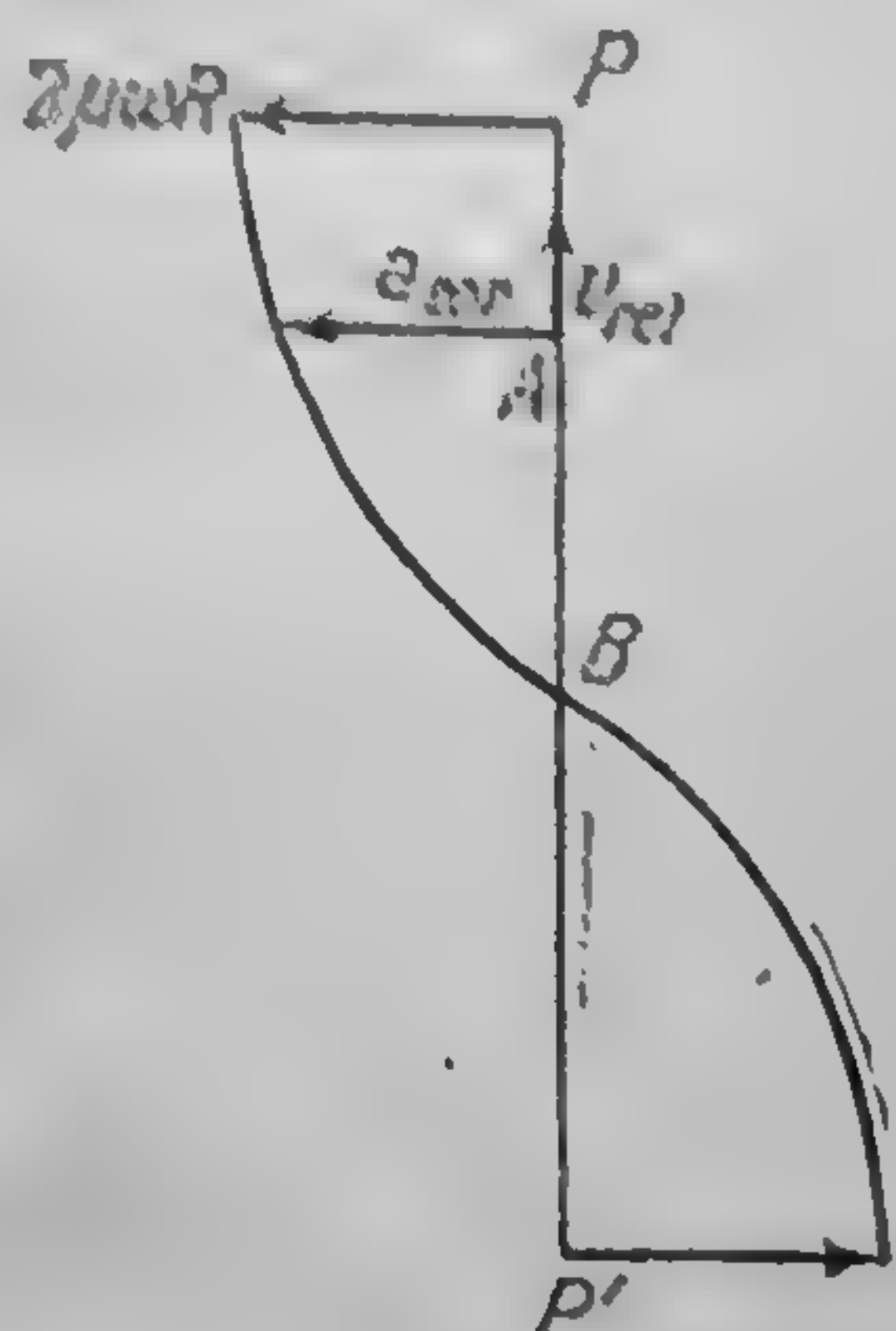


Fig. 223

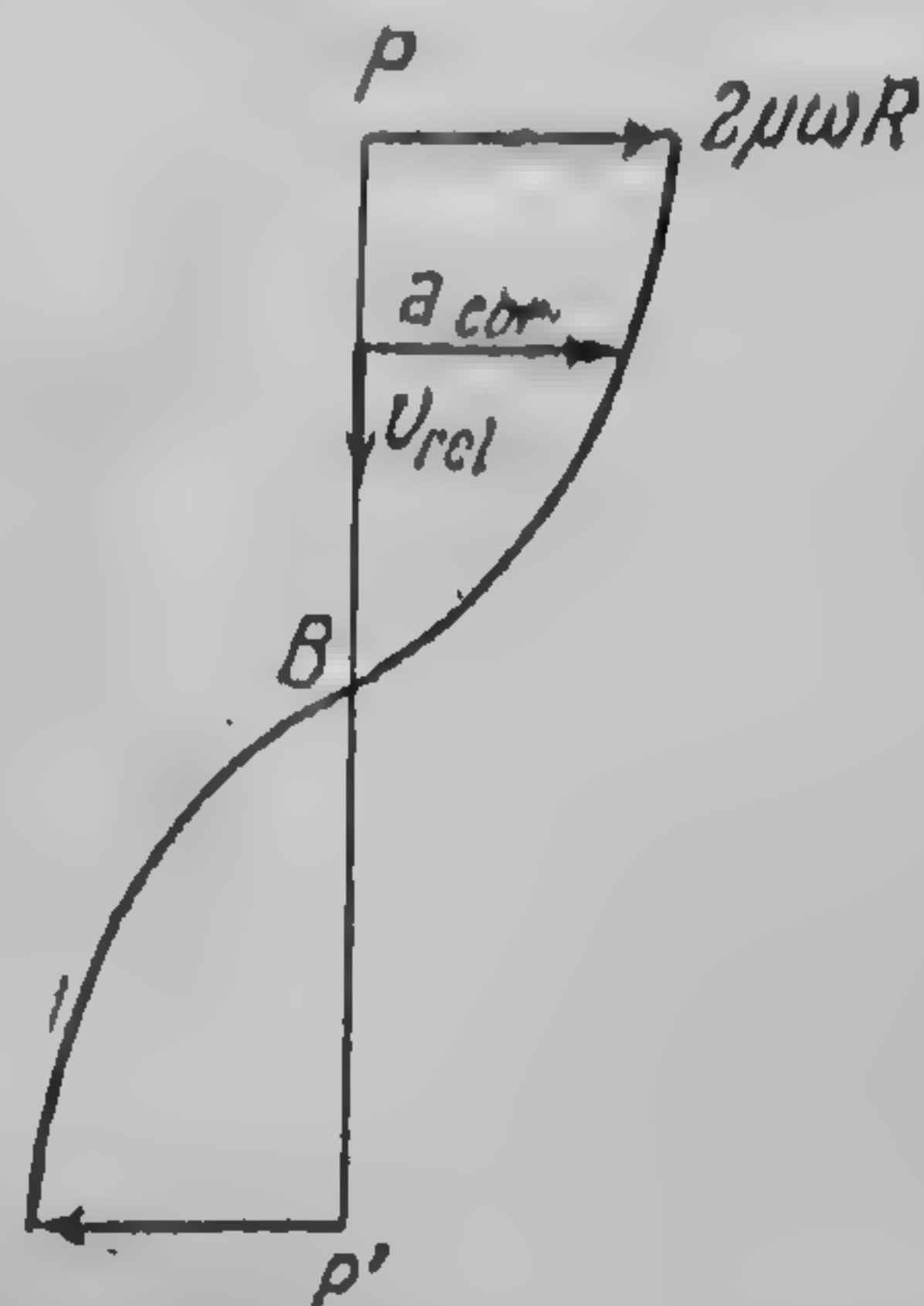


Fig. 224

poartă numele de legea lui Ber. Prin prezența accelerației lui Coriolis, se explică de asemenea și deviația de la direcția nord-sud a vînturilor alizee și a musonilor.

Să examinăm formulele (23.16). Dacă punctul A se află la o distanță mică de originea O a sistemului axelor de coordonate mobile reprezentate în fig. 220, atunci coordonatele sale  $(x, y, z)$  sînt cantități mici; de aceea, dacă nu se cere o precizie prea mare, se pot neglija produsele coordonatelor punctului A cu viteza unghiulară  $\omega$  de rotație a pămîntului. În ce privește produsele  $\omega R \cos \varphi$ , afară de localitățile apropiate de polii pămîntului, pentru care mărimea  $\cos \varphi$  este foarte apropiată de zero, nu se poate neglija acest produs din cauza mărimii razei  $R$  a pămîntului, și ajungem la formulele simplificate:

$$v_x = -\omega R \cos \varphi + \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

adică obținem aceleași formule, ca și cum axele  $Oxyz$  nu s-ar roti, ci ar avea doar o viteză de translație constantă egală ca modul cu  $\omega R \cos \varphi$  și dirijată în sensul de rotație al pămîntului. Dacă în plus mișcarea studiată se face într-un interval mic de timp, atunci arcul de cerc parcurs de originea O a coordonatelor în acest interval de timp, se poate identifica cu un segment de dreaptă.



vede din fig. 224. În acest caz se va roade din nou malul drept al râului, care în consecință va fi abrupt. În emisfera sudică fenomenul se petrece invers. Această proprietate a rîurilor, clarificată de academicianul rus Karl Maximovici Ber (1792—1876).

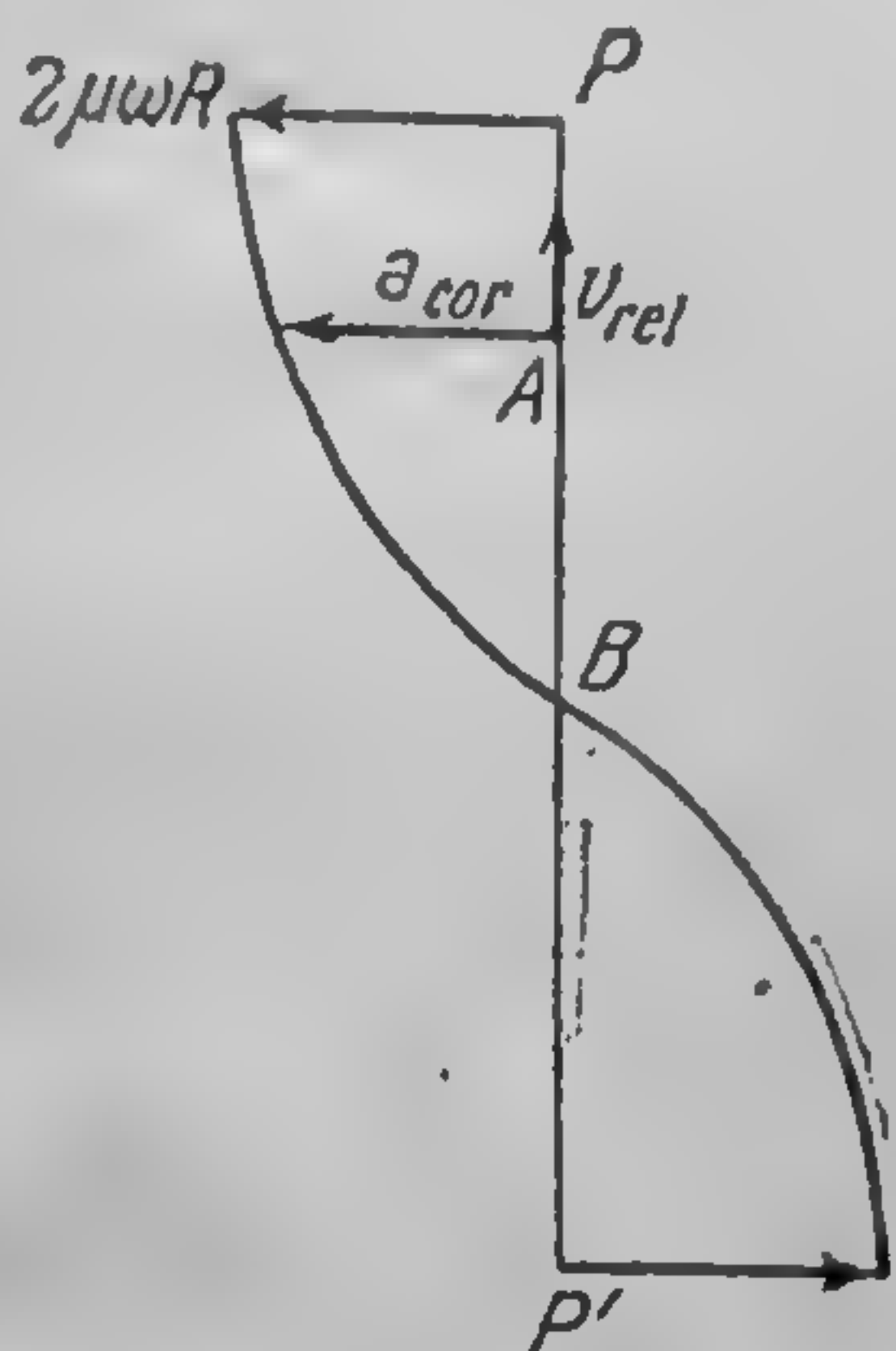


Fig. 223

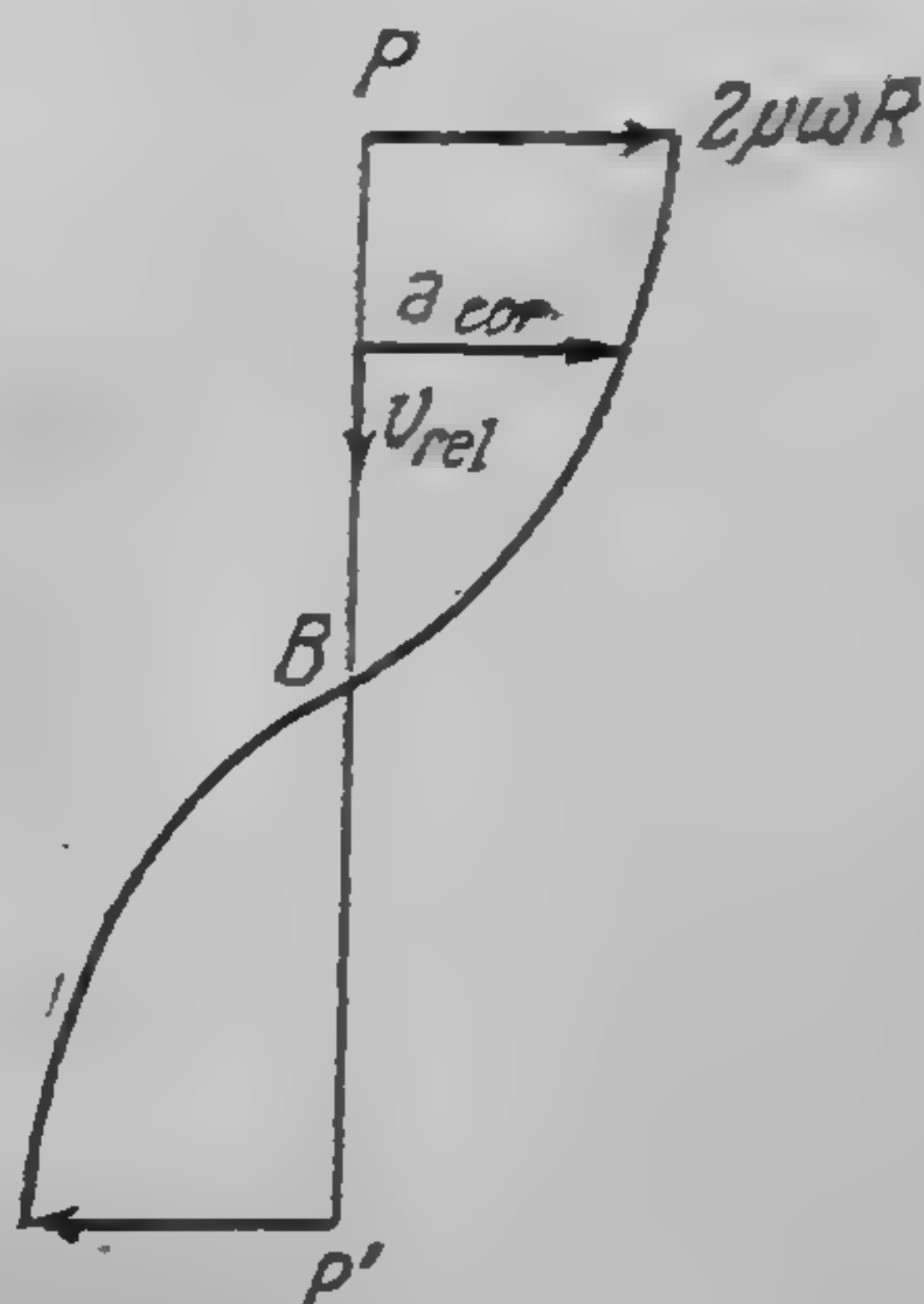


Fig. 224

poartă numele de legea lui Ber. Prin prezența accelerației lui Coriolis, se explică de asemenea și deviația de la direcția nord-sud a vînturilor alizee și a musonilor.

Să examinăm formulele (23.16). Dacă punctul A se află la o distanță mică de originea O a sistemului axelor de coordonate mobile reprezentate în fig. 220, atunci coordonatele sale  $(x, y, z)$  sînt cantități mici; de aceea, dacă nu se cere o precizie prea mare, se pot neglija produsele coordonatelor punctului A cu viteza unghiulară  $\omega$  de rotație a pămîntului. În ce privește produsele  $\omega R \cos \varphi$ , afară de localitățile apropiate de polii pămîntului, pentru care mărimea  $\cos \varphi$  este foarte apropiată de zero, nu se poate neglija acest produs din cauza mărimii razei  $R$  a pămîntului, și ajungem la formulele simplificate:

$$v_x = -\omega R \cos \varphi + \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

adică obținem aceleași formule, ca și cum axele  $Oxyz$  nu s-ar roti, ci ar avea doar o viteză de translație constantă egală ca modul cu  $\omega R \cos \varphi$  și dirijată în sensul de rotație al pămîntului. Dacă în plus mișcarea studiată se face într-un interval mic de timp, atunci arcu de cerc parcurs de originea O a coordonatelor în acest interval de timp, se poate identifica cu un segment de dreaptă.



În acest fel, pe un spațiu mic la suprafața pământului, și într-un interval mic de timp, în prima aproximație se pot considera că axele  $Oxyz$  reprezentate în fig. 220 se mișcă uniform și rectiliniu, sau sînt fixe, ceea ce se și face totdeauna în majoritatea aplicațiilor practice. Totuși, dacă mișcările punctului se produc într-un interval de timp destul de mare, sau dacă coordonatele punctului  $(x, y, z)$  nu pot fi considerate foarte mici, atunci simplificările precedente nu vor conduce la o descriere reală a mișcării punctului și, de aceea, ele nu se pot face; așa sînt, de exemplu, cazul pendulului lui Foucault sau cazul căderii libere a unui punct material de la mare înălțime.

§ 105. Exemple. 75. Să se găsească accelerația unui punct în mișcare plană, în raport cu axele de coordonate  $Oxy$ , care se rotesc uniform în acest plan cu viteza unghiulară  $\omega$  în jurul punctului  $O$ . Presupunînd în formulele (23.5) că  $(v_0)_x = (v_0)_y = 0$ ;  $\omega_x = \omega_y = 0$ ;  $\omega_z = \omega$ , vom avea:

$$v_x = \frac{dx}{dt} - \omega y, \quad v_y = \frac{dy}{dt} + \omega x.$$

Cu aceste condiții, formulele (23.14) pot căpăta forma:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} - \omega v_y, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega v_x.$$

În acest fel, vom obține:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} - \omega \frac{dy}{dt} - \omega \frac{dy}{dt} - \omega^2 x = \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} - \omega^2 x,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} + \omega \frac{dx}{dt} + \omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 y = \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 y.$$

76. Un punct se mișcă de-a lungul unei circumferințe cu viteza unghiulară constantă  $\mu$ , în timp ce cercul se rotește în jurul centrului său în același sens, cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ ; raza circumferinței este egală cu  $R$ . Să se găsească accelerația punctului. Dacă punctul nu s-ar mișca pe circumferință, el ar avea numai o mișcare de transport cu accelerația  $\omega^2 R$ , dirijată spre centrul circumferinței. Dacă cercul nu s-ar mișca, iar punctul s-ar mișca de-a lungul circumferinței, atunci punctul ar avea o accelerație relativă, egală cu  $\omega^2 R$ , și dirijată spre centrul cercului. Dacă se produc în același timp ambele mișcări, atunci punctul va căpăta și accelerația lui Coriolis. Deoarece viteza relativă a punctului, egală cu  $\mu R$ , este situată în planul de mișcare al punctului, iar vectorul  $\omega$  este perpendicular pe acest plan, atunci accelerația lui Coriolis va fi egală cu:  $2\mu\omega R$  și va fi dirijată după rază spre centrul cercului. Prin urmare, accelerația punctului va fi dirijată după rază spre centrul cercului, și va fi egală cu:

$$\omega^2 R + \mu^2 R + 2\mu\omega R = (\omega + \mu)^2 R.$$



Vom ajunge la același rezultat, folosindu-ne de coordonatele fixe  $x_1, y_1$  ale punctului considerat (fig. 225). Avem:

$$x_1 = OB = R \cos(\omega + \mu)t,$$

$$y_1 = BA = R \sin(\omega + \mu)t.$$

De aici, găsim:

$$a_{x1} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(\omega + \mu)^2 R \cos(\omega + \mu)t,$$

$$a_{y1} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -(\omega + \mu)^2 R \sin(\omega + \mu)t.$$

În acest fel, modulul accelerației va fi egal cu:

$$a = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = (\omega + \mu)^2 R,$$

și, după cum rezultă din valorile proiecțiilor  $a_{x1}$  și  $a_{y1}$ , accelerația este dirijată de-a lungul razei cercului către centrul lui.

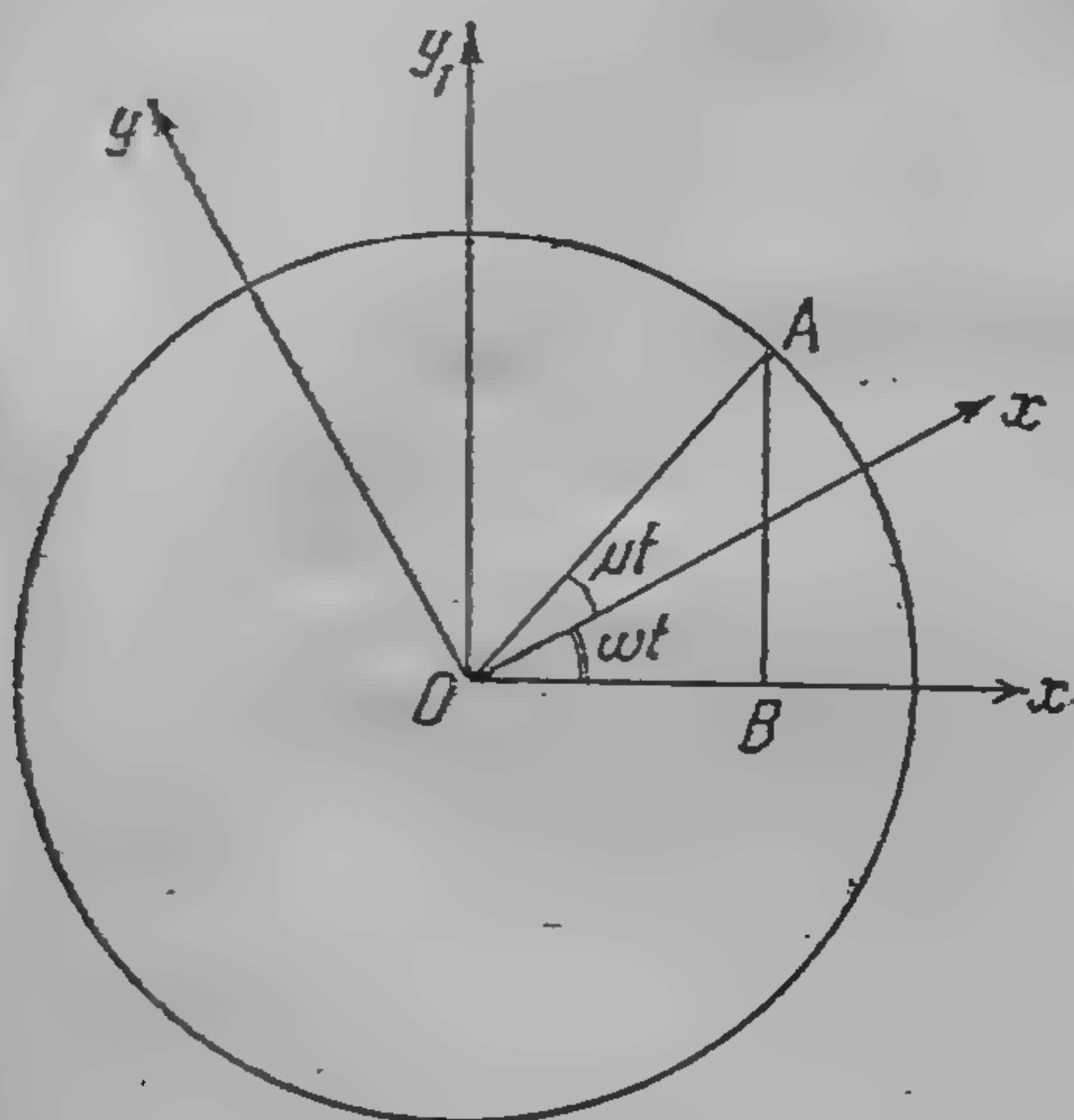


Fig. 225

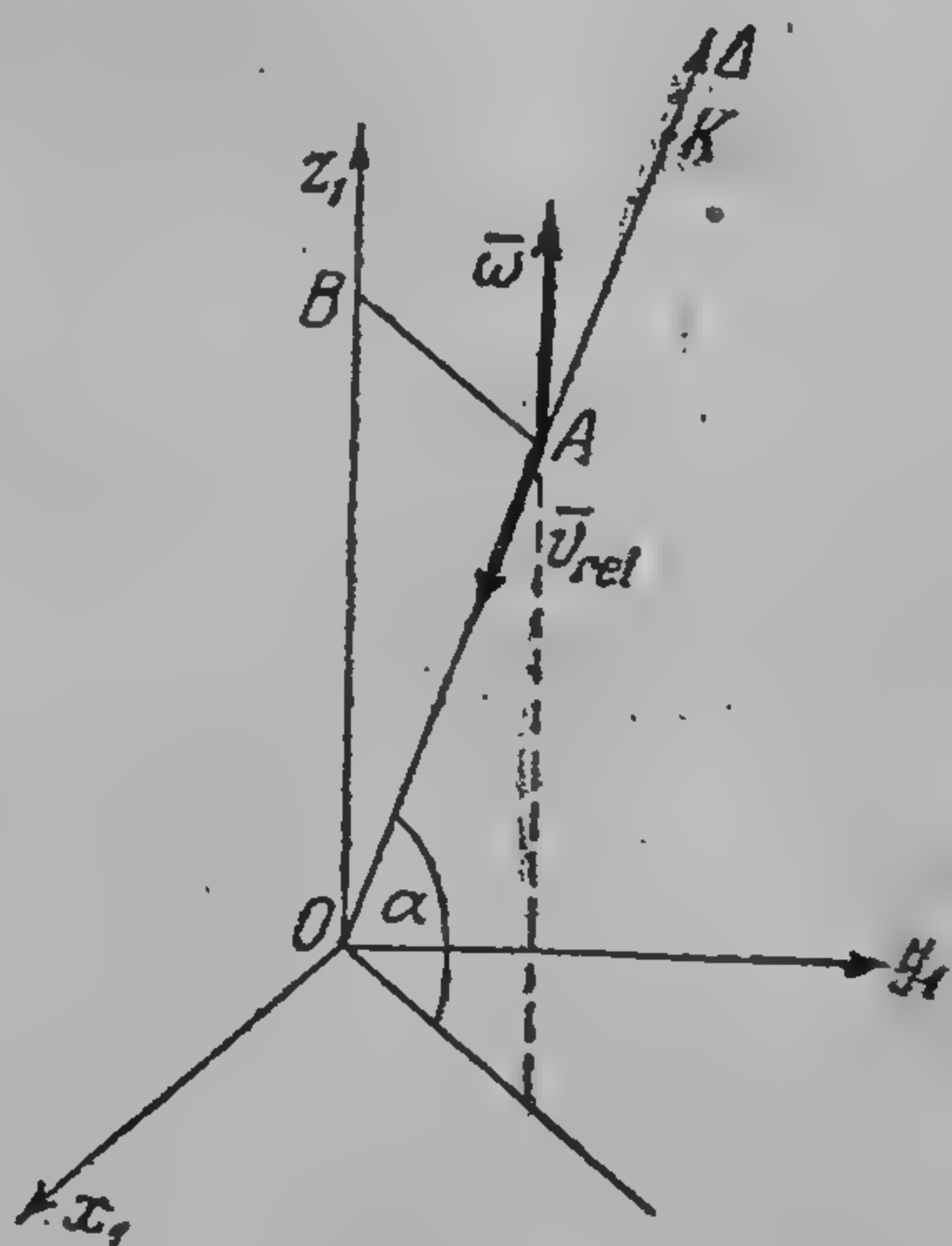


Fig. 226

77. De-a lungul dreptei  $\Delta$ , înclinată față de planul  $Ox_1y_1$  sub unghiul constant  $\alpha$  și care trece prin originea coordonatelor, se deplasează punctul A după legea  $\frac{at^2}{2}$  către punctul O. Dreapta  $\Delta$  se rotește în jurul axei  $Ox_1$  cu viteza unghiulară constantă  $\omega$  (fig. 226). Să se găsească accelerația punctului A. Accelerația de transport a punctului A va fi egală cu  $\omega^2 AB$  și dirijată de-a lungul lui AB de la punctul A spre punctul B. Dacă în



momentul  $t=0$  punctul  $A$  se găsea în punctul  $K$ , unde avem  $OK=s_0$ , vom obține:

$$OA = s_0 - \frac{at^2}{2}$$

și

$$AB = OA \cos \alpha = s_0 \cos \alpha - \frac{a \cos \alpha}{2} t^2.$$

În acest fel, accelerația de transport a punctului  $A$  va fi egală cu  $(s_0 \cos \alpha - \frac{a \cos \alpha}{2} t^2) \omega^2$ . Accelerația relativă a punctului  $A$  este egală cu  $a$  și dirijată de la  $A$  spre  $O$ . Viteza relativă a punctului  $A$ , este egală cu  $at$  și dirijată de la  $A$  spre  $O$ ; de aceea, accelerația lui Coriolis va fi egală:

$$2 at \omega \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = 2 at \omega \cos \alpha$$

și va fi dirijată perpendicular pe planul triunghiului  $OAB$  în sensul rotației de transport.

78. Să se găsească accelerația absolută a punctului material  $A$ , care se mișcă în mod arbitrar de-a lungul dreptei  $\Delta$ , ce trece prin punctul fix  $O$ , și se rotește în planul  $\pi$  cu viteza unghiulară arbitrară  $\omega$ . Evident că accelerația  $\bar{a}$  a punctului  $A$  se va compune din accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația lui Coriolis. Notăm prin  $r$  distanța  $OA$ ; atunci accelerația relativă  $\bar{a}_{rel}$  va fi dirijată de-a lungul lui  $OA$  și egală cu:

$$\bar{a}_{rel} = \frac{d^2 r}{dt^2} \bar{r}^0,$$

unde  $\bar{r}^0$  este vectorul unitar dirijat de-a lungul lui  $OA$ . Pentru a obține accelerația de transport, vom presupune că punctul  $A$  este solidar legat de dreapta  $\Delta$ . Atunci, conform § 73 accelerația de transport  $\bar{a}_{tr}$  va fi:

$$\bar{a}_{tr} = -\omega^2 r \bar{r}^0 + \frac{d\omega}{dt} r \bar{n}^0,$$

unde  $\bar{n}^0$  este vectorul unitar, perpendicular pe dreapta  $\Delta$  și dirijat în sensul creșterii unghiului  $\theta$  format de această dreaptă cu o direcție oarecare fixă. Deoarece vectorul viteză unghiulară  $\bar{\omega}$  este perpendicular pe planul  $\pi$ , iar vectorul viteză relativă  $\bar{v}_{rel}$  este situat de-a lungul dreptei  $\Delta$ , accelerația lui Coriolis va avea direcția vectorului  $\bar{n}^0$ , și vom obține:

$$\bar{a}_{cor} = 2 \omega v_{rel} \bar{n}^0 = 2 \omega \frac{dr}{dt} \bar{n}^0.$$

Prin urmare, accelerația  $\bar{a}$  a punctului  $A$  va fi:

$$\bar{a} = \bar{a}_{rel} + \bar{a}_{tr} + \bar{a}_{cor} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r \right) \bar{r}^0 + \left( \frac{d\omega}{dt} r + 2\omega \frac{dr}{dt} \right) \bar{n}^0.$$



Deoarece  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  obținem:

$$a = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \bar{r}^0 + \left[ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \bar{n}^0,$$

sau

$$a = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \bar{r}^0 + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] \bar{n}^0,$$

adică ajungem la formulele (17.7) pentru proiecțiile accelerației pe axele coordonatelor polare în plan.

79. Să se deducă formulele (23.14) fără aplicarea calculului vectorial. Pentru aceasta, să examinăm sistemul axelor de coordonate mobile  $Oxyz$ , care au originea  $O$  fixă și fie  $\Delta$  o semidreaptă fixă, ce trece prin punctul  $O$ , care formează în momentul considerat  $t$  unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ , cu axele  $Ox, Oy, Oz$ . Punctul  $O$  trebuie să fie fix, deoarece din § 70 se știe că pentru găsirea hodografului vitezelor și al accelerațiilor, trebuie mutați toți vectorii viteză ai punctului mobil, paralel cu ei înșiși în unul și același punct fix din spațiu. Dacă  $\overline{OA} = \bar{r}$  este vector, în general, cu modulul variabil și cu direcția variabilă, și  $r_x, r_y, r_z$  sînt proiecțiile acestui vector în momentul  $t$  pe axele  $Oxyz$ , atunci cosinuşii unghiurilor formați de vectorul  $\bar{r}$  cu axele de coordonate  $Oxyz$  în momentul  $t$ , vor fi egali cu  $\frac{r_x}{r}, \frac{r_y}{r}, \frac{r_z}{r}$ . De aici rezultă că cosinusul unghiului dintre vectorul  $\bar{r}$  și semidreapta  $\Delta$  va fi egal cu

$$\frac{r_x}{r} \cos \alpha + \frac{r_y}{r} \cos \beta + \frac{r_z}{r} \cos \gamma.$$

Prin urmare, proiecția  $r_\Delta$  a vectorului variabil  $\bar{r}$  pe semidreapta fixă  $\Delta$  pentru momentul  $t$ , va fi egală cu

$$r_\Delta = r_x \cos \alpha + r_y \cos \beta + r_z \cos \gamma.$$

În acest fel,  $r_\Delta$  este proiecția vectorului  $\bar{r}$  pe semidreapta fixă  $\Delta$  în timp ce de exemplu, mărimea  $r_x$  este proiecția aceluiasi vector  $\bar{r}$  pe direcția variabilă  $Ox$ . De aceea, creșterea  $\Delta(r_\Delta)$  și  $\Delta(r_x)$  au semnificații diferite; creșterea  $\Delta(r_\Delta)$  depinde numai de variația vectorului  $\bar{r}$ , dar creșterea  $\Delta(r_x)$  depinde nu numai de variația vectorului  $\bar{r}$ , ci mai depinde încă și de rotația axei  $Ox$  și va exista și în cazul cînd vectorul  $\bar{r}$  nu va varia. De aici rezultă că pentru obținerea proiecției vitezei reale a punctului  $A$ , trebuie să pornim de la formula următoare:

$$\frac{d(r_\Delta)}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \cos \alpha + \frac{dr_y}{dt} \cos \beta + \frac{dr_z}{dt} \cos \gamma - r_x \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} - r_y \sin \beta \frac{d\beta}{dt} - r_z \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$

Dacă vectorul  $\bar{r}$  este vectorul viteză  $\bar{v}$ , formula precedentă se transformă în formula:

$$\frac{d(v_\Delta)}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \cos \alpha + \frac{dv_y}{dt} \cos \beta + \frac{dv_z}{dt} \cos \gamma - v_x \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} - v_y \sin \beta \frac{d\beta}{dt} - v_z \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$



Deoarece partea stângă a ultimei formule depinde numai de variația vectorului viteză  $\vec{v}$ , atunci partea stângă reprezintă proiecția accelerației punctului  $A$ , pe dreapta  $\Delta$ , adică

$$a_{\Delta} = \frac{dv_x}{dt} \cos \alpha + \frac{dv_y}{dt} \cos \beta + \frac{dv_z}{dt} \cos \gamma - v_x \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} - v_y \sin \beta \frac{d\beta}{dt} - v_z \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$

Să presupunem că în momentul  $t$ , semidreapta  $\Delta$  coincide cu poziția instantanee a axei  $Ox$ ; vom avea:

$$a_{\Delta} = a_x, \quad z = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2},$$

și vom obține:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} - v_y \frac{d\beta}{dt} - v_z \frac{d\gamma}{dt}.$$

Dar este ușor de observat că, prin suprapunerea lui  $\Delta$  cu  $Ox$ , derivata  $\frac{d\beta}{dt}$  va fi egală cu viteza unghiulară  $\omega_z$ , iar derivata  $\frac{d\gamma}{dt}$  este egală cu viteza unghiulară  $\omega_y$  luată cu semnul minus, deoarece creșterii unghiului  $\gamma$  îi corespunde rotația în jurul axei  $Oy$  în sens negativ sau în sensul acelor unui ceasornic. În acest fel ajungem la prima din formulele (23.14):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y.$$

Celelalte două formule (23.14) se obțin pe aceeași cale, prin suprapunerea în momentul  $t$  a semidreptei  $\Delta$  cu pozițiile instantanee ale celorlalte două axe de coordonate.



## ANEXA

La studiul accelerației punctului în § 72, am folosit unele noțiuni geometrice, pe care le vom prezenta pe scurt cititorului în anexa de față, trimițând pentru detalii la cursurile de analiză, și anume la acele paragrafe în care se expun aplicațiile calculului diferențial la geometrie.

Să examinăm un cerc oarecare cu raza  $\rho$  și să luăm pe el arcul de cerc  $s$ , corespunzător unghiului la centru  $\alpha$  (fig. 227). Știm că:

$$s = \rho \alpha,$$

adică

$$\alpha = \frac{s}{\rho}.$$

Din această relație rezultă că pentru aceeași lungime  $s$ , unghiul  $\alpha$  va fi cu atât mai mic, adică curbura arcului de cerc va fi cu atât mai mică, cu cât raza  $\rho$  a cercului va fi mai mare. De aici rezultă că drept măsură a curburii arcului de cerc putem considera cantitatea  $\frac{1}{\rho}$ . Să

examinăm arcul  $\widehat{AB} = s$  al circumferinței și să ducem în extremitățile acestui arc  $A$  și  $B$  tangentele

$AA_1$  și  $BB_1$ ; unghiul dintre tangen-

tele duse în capetele arcului se numește *unghiul de adiacență*.

Vedem că, deoarece  $AA_1 \perp OA$  și  $BB_1 \perp OB$ , unghiul de adiacență este egal cu unghiul la centru  $OAB$ . În acest fel, dacă avem arcul de circumferință vom găsi raza acestei circumferințe împărțind lungimea arcului cu valoarea unghiului de adiacență.

Să presupunem că nu avem un cerc, ci o curbă plană oarecare ( $C$ ). Luăm pe această curbă un arc infinit mic  $AB$ ; acest

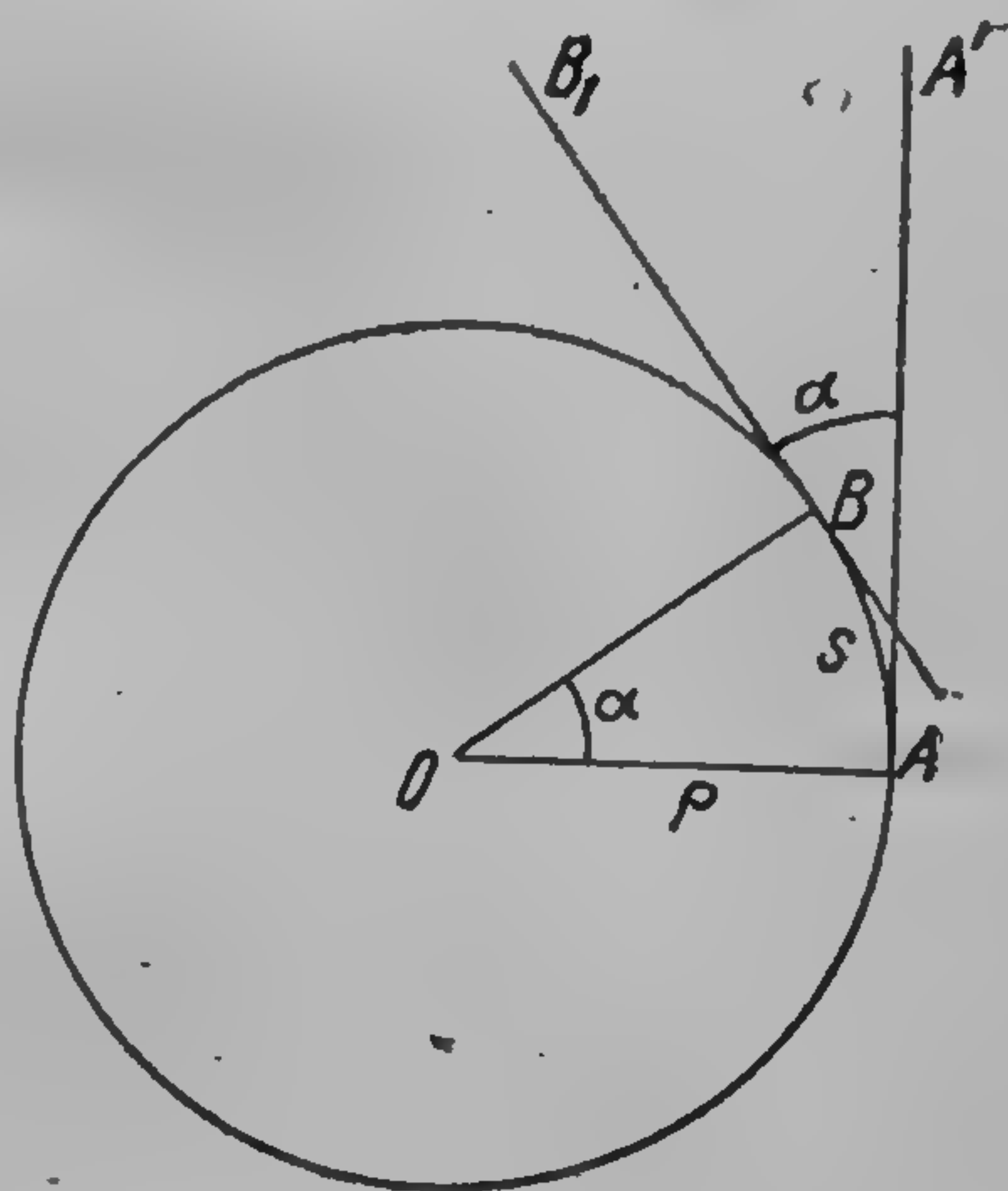


Fig. 227



arc se va apropia cu atât mai mult de un arc de circumferință, cu cât lungimea lui  $\Delta s$  va fi mai mică. De aceea pentru un  $\Delta s$  mic putem considera arcul  $AB$  aproximativ ca un arc de cerc. Să găsim raza acestui cerc. Pentru aceasta, conform celor precedente, construim tangentele  $A_1A$  și  $B_1B$  la capetele  $A$  și  $B$  ale arcului  $\widehat{AB}$  (fig. 228). Aceste tangente formează între ele unghiul de adiacență  $\Delta\alpha$ ; din fig. 228 vedem că unghiul  $\Delta\alpha$  este creșterea unghiului  $\alpha$  format de tangenta la curba  $(C)$  cu axa  $Ox$  la trecerea din punctul  $A$  în punctul  $B$ . Vom obține raza cercului căutat, împărțind  $\Delta s$  cu  $\Delta\alpha$ . Deoarece înlocuirea arcului  $\widehat{AB}$  al curbei  $(C)$  printr-un arc de cerc va fi cu atât mai precisă, cu cât lungimea arcului  $\Delta s$  va fi mai mică, atunci, la limită, vom obține formula care ne dă raza  $\rho$  a cercului, denumit *cerc de curbură*; raza  $\rho$  se numește *rază de curbură*. Avem:

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Nu este greu de dat expresia razei de curbură  $\rho$ , comodă pentru calcule. În adevăr, avem:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2 = (1 + y'^2) dx^2$$

și

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Se știe că

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y',$$

adică

$$\alpha = \operatorname{arctg} y';$$

de aici găsim

$$d\alpha = \frac{y'' dx}{1 + y'^2}.$$

Prin urmare, raza de curbură  $\rho$  va fi egală cu

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx (1 + y'^2)}{y'' dx},$$

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Vom observa că, deoarece raza este de fapt o mărime pozitivă, pentru partea dreaptă a ultimei egalități trebuie să se ia valoarea



ei absolută. De asemenea, este evident că în fiecare punct al curbei, raza de curbură va avea în general o valoare proprie.

Ca exemplu vom găsi raza de curbură  $\rho$  a parabolei  $y^2 = 2px$ . Vom obține succesiv:

$$y = \sqrt{2p} \sqrt{x}, \quad y' = \sqrt{\frac{p}{2}} x^{-\frac{1}{2}}, \quad y'' = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{2}} x^{-\frac{3}{2}}.$$

De aceea, vom avea, luând semnul plus în partea dreaptă, următoarea expresie a razei curbei:

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{p}{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{2}} x^{-\frac{3}{2}}}$$

sau

$$\rho = \sqrt{\frac{(p+2x)^3}{p}}.$$

În vârful parabolei unde  $x=0$ , raza de curbură va fi minimă și egală cu parametrul  $p$  al parabolei.

Cunoscând raza de curbură  $\rho$ , putem construi în fiecare punct al curbei cercul respectiv de curbură. Evident că pentru aceasta trebuie să ducem în punctul dat normala la curbă, în sensul concavității ei, și să măsurăm pe această normală de la punctul considerat, un segment egal cu raza de curbură; vom obține astfel *centrul de curbură*. Cunoscând centrul de curbură și raza de curbură, vom construi direct și cercul de curbură. Cercul de curbură se mai poate determina și altfel. Să considerăm pe curbă, trei puncte foarte apropiate între ele. Se știe că prin trei puncte se poate duce o circumferință și numai una singură. De aceea, vom duce circumferința prin cele trei puncte date și vom apropia aceste trei puncte. La limită vom obține o circumferință, care trece prin cele trei puncte contopite între ele, care evident va coincide chiar cu cercul de curbură determinat mai sus.

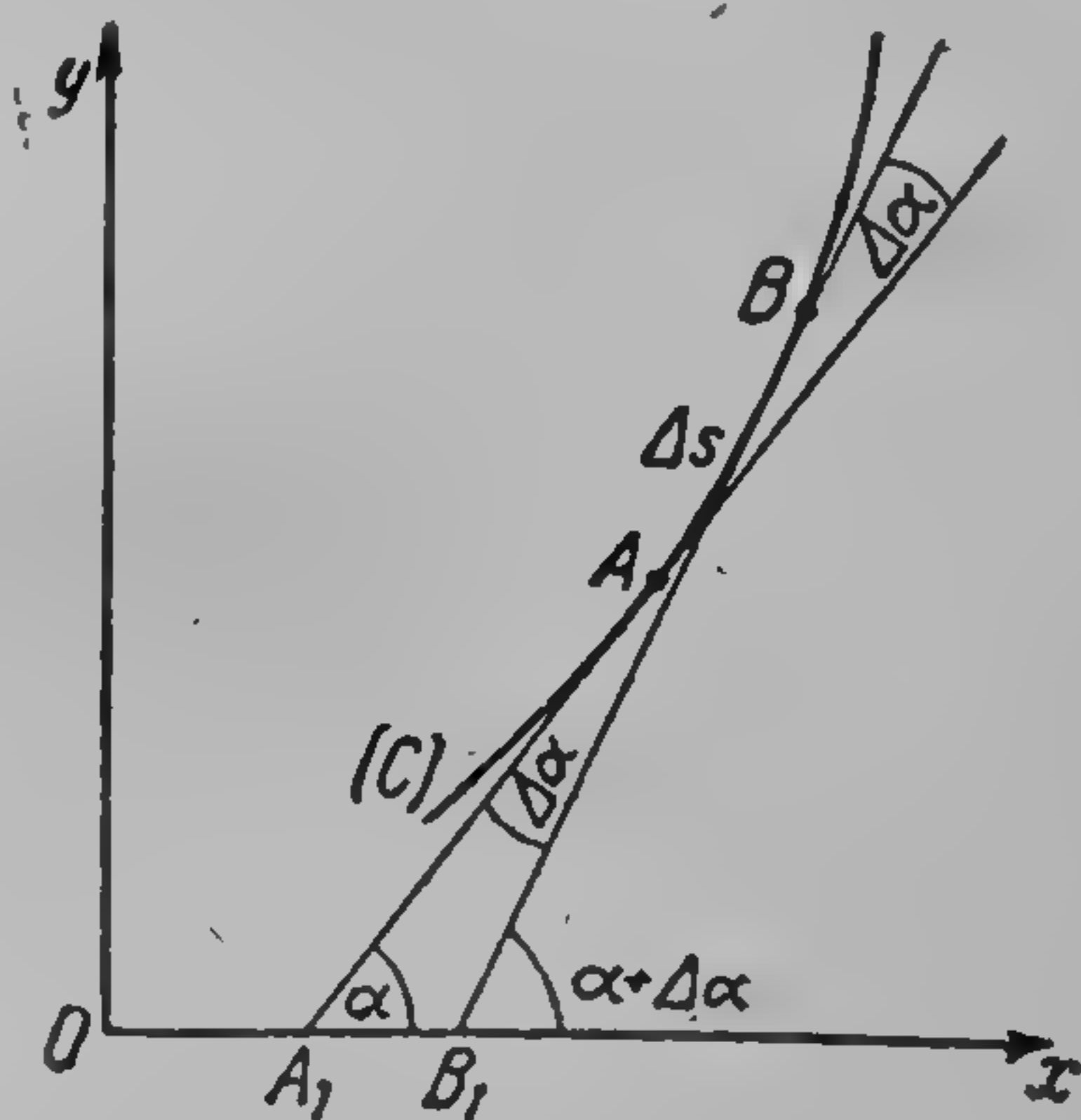


Fig. 228



Să examinăm acum o curbă strîmbă, adică o curbă ale cărei puncte nu sînt situate în același plan. Ca exemplu al unei astfel de curbe, poate servi elicea circulară. Să luăm pe această curbă trei puncte foarte apropiate între ele. Deoarece prin trei puncte se poate duce în general un plan și numai unul singur, atunci prin cele trei puncte considerate vom duce un plan și vom apropia nelimitat aceste trei puncte între ele. La limită vom obține un plan care trece prin cele trei puncte confundate ale curbei; acest plan se numește *plan osculator*. Evident că noi putem considera aproximativ arcul curbei strîmbe (cu dublă curbura) care trece prin trei puncte extrem de apropiate între ele, drept arcul unei curbe plane care se află la limită în planul osculator. În acest fel putem construi în planul osculator un cerc de curbura, și să găsim raza de curbura, ca și pentru curba plană; această rază de curbura se numește *raza primei curbură*, a curbei strîmbe cu dublă curbura.

Deplasîndu-ne de-a lungul curbei strîmbe, planul osculator se va roti; viteza de rotire a planului osculator va determina *torsiunea curbei*. Deoarece tangenta trece prin două puncte confundate, iar planul tangent prin trei puncte confundate, atunci tangenta în fiecare punct al curbei se află în planul osculator construit pentru acest punct. Normala la curbă, dusă în planul osculator se numește *normala principală*, iar normala la curbă, perpendiculară pe planul osculator se numește *binormală*.

Planul osculator se mai poate determina și altfel. Să considerăm pe curbă trei puncte extrem de apropiate între ele  $A, B, C$ . Prin tangenta în punctul  $A$  se poate duce un plan paralel la tangenta în punctul vecin  $B$ . Deoarece tangenta în punctul  $B$  este poziția limită a secantei, care trece prin punctele  $B$  și  $C$ , rezultă că planul osculator poate fi considerat ca poziție limită a planului care trece prin punctul dat  $A$  al curbei și este paralel la tangenta în punctul vecin  $B$ , cînd punctul  $B$  tinde să se suprapună peste punctul  $A$ .



## INDEX ALFABETIC

- Accelerație 282 ș.u. 343, 373  
 Accelerație centripetă 294  
 Accelerația lui Coriolis 413, 415, 417, 422  
 Accelerație normală 293  
 Accelerație tangențială 293  
 Aderență 158, 159  
 Adunare geometrică 26  
 Adunarea și scăderea vectorilor 33  
 Amplitudinea mișcării 245  
 Aparatul lui Tepler 142  
 Archimedeu, spirala lui ~, 251  
 Avansul echinoxurilor 369  
 Axa centrală a sistemului de forțe 148, 172  
 Axa centrală a sistemului de viteze 392  
 Axa de rotație echivalentă 365  
 Axa elicoidală instantanee 401  
 Axa instantanee de rotație 366  
 Axe mobile de coordonate 268  
 Axoidă 333  
 Axoidă fixă 333, 366  
 Axoidă mobilă 333, 367  
  
 Balansor 351  
 Ber., legea lui ~, 425  
 Bielă 351  
 Binormală 434  
 Brațul cuplului 100  
  
 Cazuri static determinate de echilibru 66  
 Cazuri static nedeterminate de echilibru 66  
 Centre de greutate 106, 108, 215  
 Centroidă fixă 326 ș.u.  
 Centroidă mobilă (ruletă) 330 ș.u.  
 Centrul accelerațiilor 345  
 Centrul de curbură 433  
 Centrul de greutate al unui arc de cerc omogen 116  
 Centrul de greutate al unei linii frânte și omogene 115  
 Centrul de greutate al unui paralelipiped omogen 120  
 Centrul de greutate al unui paralelogram omogen 117  
 Centrul de greutate al unui sector circular omogen 118  
 Centrul de greutate al unui segment de cerc omogen 119  
 Centrul de greutate al unui segment omogen de dreaptă 115  
 Centrul de greutate al unui tetraedru omogen 120  
 Centrul de greutate al unui trapez omogen 118  
 Centrul de greutate al unui triunghi omogen 117  
 Centrul forțelor paralele 86  
 Centrul instantaneu (centrul vitezelor) 326, 329  
 Centru maselor 108 ș.u.  
 Cerc de curbură 432  
 Châsles, teorema lui ~, 400  
 Cicloidă 276, 332  
 Cicloidă alungită 333  
 Cicloidă prescurtată (trohoidă) 332  
 C cinematică 12, 243  
 Cîntar cu brațe inegale 101  
 Cîntar decimal 101  
 Coeficient de frecare 160  
 Coeficient de frecare de pivotare 164  
 Coeficient de frecare de rostogolire 163  
 Compunerea cuplurilor 140  
 Compunerea mișcărilor 254  
 Con de frecare 161  
 Condiții de echilibru 66  
 Corespondență reciprocă 200  
 Coriolis, accelerația lui ~, 413, 415, 417 ș.u.



- Corp material 109 ș.u.  
 Cuplu cinematic 350  
 Cuplu cinematic de rotație 350  
 Cuplu cinematic de translație 350  
 Cuplu cinematic elicoidal 350  
 Cuplu cinematic inferior 350  
 Cuplu cinematic superior 350  
 Cuplu de forțe 98 ș.u.  
 Cuplu de viteze unghiulare 380 ș.u.  
 Curbură, prima ~, 434
- Deformație 19  
 Densitatea corpului 108  
 Densitatea cîrbei 107  
 Densitatea suprafeței 107  
 Deplasarea de translație a unui solid 304  
 Derivată 295  
 Derivată geometrică 257  
 Derivată locală 411  
 Descompunerea forței 27  
 Determinant 54  
 Diagrame reciproce 238  
 Dimensiunile mărimilor mecanice 294 ș.u.  
 Dinam 172  
 Dinamică 12  
 Dinamometru cu arc 23  
 Direcția forței 21
- Echilibru absolut 19  
 Echilibrul forțelor paralele 130  
 Echilibru indiferent 98, 193  
 Echilibru relativ 19  
 Echilibrul unui sistem arbitrar de forțe 178 ș.u.  
 Echilibrul unui sistem de forțe în plan 150 ș.u.  
 Echilibrul unui sistem de solide 190  
 Echilibrul unui solid care poate avea o mișcare de șurub 181  
 Echilibrul unui solid cu o axă fixă 179  
 Echilibrul unui solid cu un punct fix 181  
 Echivalența cuplurilor 136  
 Ecuațiile mișcării și traiectoria unui punct 244  
 Elipsograf 332  
 Euler, formulele cinematice ale lui ~, 310
- Figuri reciproce 235  
 Formulele cinematice ale lui Euler 310  
 Forța greutateii 61  
 Forță 9, 19  
 Forță activă 63  
 Forță concentrată 61  
 Forță de frecare de aderență 159  
 Forță de frecare de alunecare 159  
 Forță de volum 61  
 Forță distribuită pe o suprafață 61  
 Forță pasivă 63  
 Forță rezultantă 26  
 Forță tăietoare 226  
 Forțe antiparalele 83, 94  
 Forțe concurente 72  
 Forțe egale ca mărime 21  
 Forțe interioare 188  
 Forțe în echilibru 21  
 Forțe paralele 83  
 Frecare de aderență 158  
 Frecare de alunecare 158 ș.u.  
 Frecare de pivotare 164  
 Frecare de rostogolire 162
- Greutatea corpului material 106  
 Grindă cu zăbrele 228 ș.u.  
 Grindă pe două reazeme 132, 217 ș.u.  
 Guldin, a doua teoremă a lui ~, 122  
 Guldin, prima teoremă a lui ~, 121
- Hodograful vitezelor 282
- Independența acțiunii forțelor 26  
 Invarianți 69  
 Inversarea mișcării 333
- Kilogram forță 23
- Lanț cinematic simplu 350  
 Lanț cinematic simplu deschis 350  
 Lanț cinematic simplu închis 350  
 Legătură bilaterală 62  
 Legătură ideală 64  
 Legătură unilaterală 62  
 Legăturile cuplului 350  
 Legea lui Ber 425  
 Legea lui Kepler 274
- Manivelă 352  
 Mărimea forței 22



- Măsurare statică 23  
 Mecanism 350  
 Mecanism din patru elemente articulate 352  
 Metoda diagramelor reciproce 238  
 Metoda lui Cremona-Maxwell 235  
 Metoda lui Culman 232  
 Metoda lui Ritter 231  
 Metoda maselor negative 114  
 Metoda punctelor echivalente 113  
 Metoda vectorială de reducere a unui sistem de forțe 170  
 Minorul determinantului 54  
 Mișcare absolută 243  
 Mișcare complexă sau compusă 254  
 Mișcare de precesie 368, 369  
 Mișcare de translație 303  
 Mișcare de transport 254, 409  
 Mișcare elicoidală (de șurub) infinit mică 401  
 Mișcare instantanee de translație 305, 384  
 Mișcare oscilatorie armonică 245  
 Mișcare periodică 246  
 Mișcare plan paralelă 322  
 Mișcarea planetelor 274  
 Mișcare relativă 243, 254, 409  
 Mișcarea unui solid rigid 303  
 Mișcări componente 254  
 Modulul vectorului 29, 33  
 Momentul cuplului 98, 99, 136  
 Momentul de inerție al unei figuri plane 213  
 Momentul de inerție polar 213  
 Momentul de răsturnare 153  
 Momentul de stabilitate 153  
 Momentul încovoietor al grinzii 218, 219  
 Momentul minimal 177  
 Momentul static 210  
 Momentul unei forțe în raport cu o axă 47  
 Momentul unei forțe în raport cu un punct 44, 55  
 Normală principală 434  
 Paralelogramul forțelor 23  
 Parametrul dinamului 172  
 Parametrul rototranslației 395  
 Perioadă 246  
 Pîrghie 42, 100  
 Plan osculator 434  
 Planul vitezelor 348  
 Pol (centru) instantaneu 199  
 Poligon funicular (articulat, al lui Varignon) 200, 203 ș.u.  
 Poligonul forțelor 23, 26, 199, 203  
 Poligonul lui Varignon 200  
 Precesie 369, 376  
 Principiul deplasărilor virtuale al lui Lagrange 196  
 Principiul lui Torricelli 193  
 Produs scalar 61 ș.u.  
 Produs vectorial 49 ș.u.  
 Proiecția unui vector pe o axă 30, 33, 35  
 Pulație 246  
 Punct de aplicație al unei forțe 22 ș.u.  
 Punct de concurență 379  
 Punct de reducere 147, 175, 391  
 Punct echivalent 113  
 Punct material 19, 20  
 Rază de curbură 432  
 Reacțiune 61 ș.u.  
 Reacțiunea legăturii 62  
 Reducerea unui sistem de forțe 173  
 Regula paralelipipedului forțelor 26  
 Regula poligonului forțelor 26, 27  
 Rezistența materialelor 20  
 Rezultantă 72  
 rotație finită 386  
 rotația unui solid 364  
 Rototranslație 392  
 Scalari 29  
 Scăderea vectorilor 33, 37  
 Sistem arbitrar de forțe 170  
 Sistem de forțe echivalente 173  
 Sistem de forțe echivalent cu zero 173  
 Sistem de forțe în plan 146  
 Sistem de referință 9, 243  
 Sistem fizic de unități 295  
 Sistem imobil de axe de coordonate 243  
 Sistem inertial de referință 243  
 Sistem rigid 229  
 Sistem tehnic de unități 295  
 Solid rigid 19  
 Spirala logaritmică 251  
 Spirala lui Arhimede 251



Statica 12, 19  
Statica grafică 197, 198  
Sumă geometrică 34,  
Suport 21

Teorema lui Châsles 400  
Teorema lui d'Alembert 365  
Teorema lui Varignon 74, 90, 9  
Teoremele lui Guldin 121  
Teoria cuplurilor 136 ș.u.  
Teoria elasticității 20  
Tepler, aparatul lui ~, 142  
Torricelli, principiul lui ~, 192, 193  
Torsiunea curbei 434  
Traiectorie curbilinie 244  
Traiectorie rectilinie 244  
Triedru fundamental 289  
Triunghiul momentelor 47  
Trohidă 333

Unghi de adiacență 431  
Unghi limită de frecare 159  
Unitate tehnică a forței 23

Varignon, teorema lui ~, 74, 90, 96  
Vector 28 ș.u.  
Vector alunecător 38  
Vector legat 39  
Vector liber 28  
Vector rezultatant 43  
Vector unitar (versor) 30  
Viteză 258 ș.u.  
Viteză areolară 270, 271  
Viteză instantanee 259  
Viteză liniară 305  
Viteză medie 259  
Viteză unghiulară 269, 305, 309 ș.u.



# ERATA

Pag.	Rîndul	In loc de	Se va citi	Din vina cui
24	7 jos	$+AB \cdot AC =$	$+2 AB \cdot AC =$	Editură
112	11,10,9 jos (numitorii la neomogeni)	$\frac{\quad}{V}$	$\frac{\quad}{M}$	"
146	12 sus	temă	lemă	Tipografie
154	25 jos	$\beta > \alpha$	$\beta < \alpha$	Editură
165	12 sus	normala AA	normala $AA_n$	Tipografie
167	20 sus	$R_n$	$R'_n$	"
174	7 jos	$\sqrt{\dots M_z}$	$\sqrt{\dots M_z^2}$	"
186	1 jos	$P \cos \alpha$	$P_1 \cos \alpha,$	"
190	8 sus	$\dots + p(l+z)$	$\dots + p(l-z)$	Editură
238	10, 9 jos	$\gamma$	7	"
248	12 sus	$= b_2 \cos kt$	$+ b_2 \cos kt$	"
248	1 jos	$\bar{r} = \bar{k}_1 t = \bar{r}_0$	$\bar{r} = \bar{k}_1 t + \bar{r}_0$	"
264	16 jos	$= \frac{v_y}{v} \frac{1}{v} \frac{dv}{dt},$	$= \frac{v_y}{v} = \frac{1}{v} \frac{dy}{dt}$	"
273	1 jos	$= \frac{1}{2} \left( x - y \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$	$= \frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$	"
288	14 jos	$\frac{d\bar{r}^0}{dt} + \bar{n}^0 \dots$	$\frac{d\bar{r}^0}{dl} = \bar{n}^0 \dots$	"
298	12 jos	corectă	corectată	"
302	13 jos	$\dots 4 m^2 n^2 + m^2 (m^2 + n^2)$	$\dots 4 m^2 n^2 - m^2 (m^2 + n^2)$	"
302	7 jos	$= \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} r^2}$	$= \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} r}$	Tipografie
337	2 jos	$-\omega (y_1 - y_1)$	$-\omega (y_1 - y'_1)$	"
357	17 jos	$\dots \cos^2 \varphi_1$	$\dots \cos^2 \varphi'_1$	"
358	3 sus	$a \sin =$	$a \sin \alpha =$	"
363	13 jos	$= \frac{\dots}{l \sin (\beta + \gamma + \phi)}$	$= \frac{\dots}{l' \sin (\beta + \gamma + \phi) \dots}$	"
375	2 sus	timpul $a$ al vectorului $\bar{\omega}$	timpul, a vectorului $\bar{\omega}$	Editură
404	3 sus	$\dots + \frac{d\omega_{x_1}}{dt} (z_1 - n) \dots$	$\dots + \frac{d\omega_{y_1}}{dt} (z_1 - n) \dots$	"
405	6 sus	$\dots + \frac{d\omega_y}{dt} x - \dots$	$\dots + \frac{d\omega_y}{dt} z - \dots$	"
411	9 jos	$+ (\bar{\omega} + \bar{j}) y \times (\dots$	$\dots + (\bar{\omega} \times \bar{j}) y + (\dots$	"
422	5 sus	$-\omega^2 R \cos \theta - \dots$	$\dots - \omega^2 R \cos^2 \theta - \dots$	"
426	9 jos	$\omega^2 R$	$\mu^2 R$	"



Editura Tehnică  
(R)

2617

20 F

Editura Tehnică  
(R)

2617

20 F

A. I. Necrasov  
Curs de mecanică teoretică  
vol. I

Numărul din borderoul  
de casă al unității

Lei 15,50

(Rămîne la cumpărător)

Editura Tehnică  
(R)

2617

20 F

A. I. Necrasov  
Curs de mecanică teoretică  
vol. I

Numărul din borderoul  
de casă al unității

Lei 15,50

(Pentru centrul regional  
CLDC)



